Definition der linearen Unabhängigkeit

Definition

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ein Tupel $(v_1, ..., v_n)$ von Vektoren $v_k \in V$ wird linear unabhängig genannt, wenn die Implikation

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0_V \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n$$

für jedes Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$ erfüllt ist.

Wichtige Regeln zur linearen Unabhängigkeit

Satz

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(i) Ist $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\dim V = n$, dann besteht jedes linear unabhängige Tupel von Vektoren aus K aus höchstens n Elementen.

(ii) Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$, also eine $n \times n$-Matrix. Die Zeilen von A sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. (Dieselbe Äquivalenz gilt auch für die Spalten.)

(iii) Ein Tupel $(v_1, ..., v_r)$ von Vektoren aus V ist genau dann linear unabhängig, wenn kein v_k als Linearkombination der übrigen $r - 1$ Vektoren darstellbar ist.

(iv) Sei $(v_1, ..., v_r)$ ein linear unabhängiges Tupel von Vektoren aus V und $w \in V$. Genau dann ist auch $(v_1, ..., v_r, w)$ linear unabhängig, wenn $w \notin \langle v_1, ..., v_r \rangle_K$ gilt, d.h. wenn w nicht als Linearkombination von $(v_1, ..., v_r)$ darstellbar ist.

Folgerung: Ordnung von Matrixgruppen

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, q eine Primzahlpotenz > 1 und K ein Körper mit q Elementen. Dann ist die Ordnung der allgemeinen linearen Gruppe in Dimension n über K gegeben durch

$$|\mathrm{GL}_n(K)| \quad = \quad \prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k) \quad = \quad q^{\frac{1}{2}(n-1)n} \prod_{k=1}^{n}(q^k - 1).$$

H23T2A4

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, entsprechend für y und z.

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad u = (u_1, \dots, u_4) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

Seien $u, u' \in \mathbb{R}^4$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. z.zg.:

(i) $f(u+u') = f(u) + f(u')$ (ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

zu (i) Da die Determinante bl. Vf. in jeder Zeile linear ist, insb. in der vierten, gilt

$$f(u+u') = \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u+u' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u' \end{pmatrix}$$

$$= f(u) + f(u')$$

zu (ii) Aufgrund der Linearität in der vierten Zeile gilt auch $f(\lambda u) = \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda u \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \lambda f(u)$.

(b) Zeigen Sie, dass x, y, z im Kern von f liegen.

z.zg.: $f(x) = f(y) = f(z) = 0$

Die Zeilen der Matrix $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sind linear abhängig

Abbildung ist.

(da die 1. und 4. Zeile übereinstimmen). Die Det. einer Matrix ist gleich null g.d.w. die Zeilen linear abh. sind. Deshalb gilt $f(x) = \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = 0$, und aus demselben Grund auch $f(y) = \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = 0$ und $f(z) = \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

(c) Zeigen Sie: Es gilt $\ker(f) = \langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn (x, y, z) linear unabhängig ist. Nach Teil (b) gilt $\{x, y, z\} \subseteq \ker(f)$, und daraus folgt $\langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \ker(f)$, da $\ker(f)$ ein Unter-

Vektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist

$\Leftarrow$ "

$\mathbb{R}^4$

und z.

$x_2\ x_3\ x_4$
$y_2\ y_3\ y_4$
$z_2\ z_3\ z_4$
$u_2\ u_3\ u_4$

linear

$= \lambda f(u)$

diesem Fall $\ker(f) = \mathbb{R}^4$ □

Vor.: (x, y, z) ist linear unabhängig

Beh.: $\ker(f) \subseteq \langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}}$

Sei $u \in \ker(f) \Rightarrow \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = f(u) = 0$

$\Rightarrow (x, y, z, u)$ ist linear abhängig. Da (x, y, z) linear unabh. ist, ist das nur möglich, wenn u in $\langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}}$ liegt. ($\rightarrow$ Beh.)

$\S$ o. $\langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \ker(f)$, insgesamt gilt also $\langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}} = \ker(f)$.

$\Rightarrow$ " Vor.: $\ker(f) = \langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}}$ zzg.: (x, y, z) ist linear unabhängig Ang.: (x, y, z) ist linear abh. $\rightarrow \forall u \in \mathbb{R}^4$: (x, y, z, u) ist linear abh. $\Rightarrow f(u) = \det\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^4$

das

die

$\in$ V

Koe

Satz

- v

Für

Polyn

det

1. Fall

Dann

rg(A

$\Rightarrow \langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}} = \ker(f) = \mathbb{R}^4$ ↯ da $\langle x, y, z \rangle_{\mathbb{R}}$ als Erzeugnis einer höchstens 3-elementigen Menge von Vektoren höchstens dreidimensional ist, aber $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ gilt.

(d) Bestimmen Sie $\ker(f)$ in dem Fall, dass (x, y, z) linear abhängig ist.

Wie in Teil (c) gezeigt wurde, gilt in diesem Fall $\ker(f) = \mathbb{R}^4$. □

Dimensionssätze

Satz

Sei K ein Körper.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, W ein beliebiger K-Vektorraum und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$n \quad = \quad \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi).$$

(ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$. Dann gilt

$$n \quad = \quad \dim \ker(A) + \operatorname{rg}(A) \quad ,$$

wobei $\operatorname{rg}(A)$ den Rang von A bezeichnet.

Anwendung: Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Satz

Seien K ein Körper, $m, n \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n,K}$ und $b \in K^m$.

(i) Die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0_{K^m}$ ist ein Untervektorraum des K^n der Dimension $n - \mathrm{rg}(A)$.

(ii) Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des inhomogenen LGS $Ax = b$ ist genau dann nichtleer, wenn der Rang von A mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $\tilde{A} = (A, b) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1),K}$ übereinstimmt. In diesem Fall handelt es sich um einen affinen Unterraum des K^n der Dimension $n - \mathrm{rg}(A)$.

da $\langle x,y,z\rangle_{\mathbb{R}}$

...enzigen Menge

... ist, aber

...lass (x,y,z)

..., gilt in

□

F23 T2 A1 (6)

Für jedes $r \in \mathbb{R}$ betrachten wir das LGS gegeben durch

$$\begin{aligned} rx + y + z &= 1 \\ x + ry + z &= 1 \\ x + y + rz &= 1 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle $r \in \mathbb{R}$, für die das System (i) keine (ii) genau eine (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

Für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist

$$A_r = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & r \end{pmatrix} \in M_{3,\mathbb{R}}$$ jeweils

rig

(u) = 0

. Da (x,y,z)

h, wenn

ch.)

unt gilt also

z.zg.: (x,y,z)

rg. , (x,y,z)

(x,y,z,u) ist

) = 0 ∀u∈R⁴

die Koeff.-matrix und $\tilde{A}_r = (A, b)$ $\in M_{3\times 4,\mathbb{R}}$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Sarrus-Regel $\Rightarrow \det(A_r) = r^3 + 1 + 1 - r - r - r = r^3 - 3r + 2$

Für $r = 1$ gilt $r^3 - 3r + 2 = 0$.

Polynomdivision liefert

$$\det(A_r) = (r-1)^2(r+2)$$

1. Fall: $r \notin \{-2, 1\}$

Dann ist $\det(A_r) \neq 0$ und somit $\operatorname{rg}(A_r) = 3$.

Wegen $rg(\tilde{A}_r) = rg(A_r, G) \geq rg(A_r)$
und $rg(\tilde{A}_r) \leq \min\{3,4\} = 3$ (da $\tilde{A}_r \in M_{3\times 4,\mathbb{R}}$)
gilt $rg(A_r) = 3 = rg(\tilde{A}_r)$. Laut Vl. ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_r \subseteq \mathbb{R}^3$ damit ein affiner Unterraum der Dimension $3 - rg(A_r) = 3-3 = 0$, d.h. $\mathcal{L}_r$ ist einelementig.

2. Fall: $r = 1$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt $rg(A_1) = rg(\tilde{A}_1) = 1$, da $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ der Spaltenraum beider Matrizen (und als solcher 1-dim.) ist. $\Rightarrow \mathcal{L}_1$ ist affiner Unterraum der Dim. $3 - rg(A_1) = 2$

$= \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \\ \vec{u} \end{pmatrix}$ (a) Zeigen Sie, dass f eine lineare

3. Fall: $r = -2$

$$\tilde{A}_{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform zeigt, dass $rg(A_{-2}) = 2$ und $rg(\tilde{A}_{-2}) = 3$ ist. $\Rightarrow rg(A_{-2}) < rg(\tilde{A}_{-2}) \Rightarrow$

$\mathcal{L}_{-2} = \emptyset$ (keine Lsg. in diesem Fall) $\square$