

F14 T3 A 4

geg $K = \mathbb{Q}(\pi)$, $f = x^3 - \pi \in K[x]$

$L \subseteq \mathbb{C}$ Zerfällungskörper von f über K

in (a) gezeigt: $[L : K] = 6$

zu (b) schon gezeigt: $L|K$ ist galois'sch

und $G = \text{Gal}(L|K)$ ist isomorph zu S_3

gesucht: alle Zwischenkörper von $L|K$, für
jeden Zwischenkörper ein erzeugendes Element

$|S_3| = 6$ Lagrange $\Rightarrow$ Es gibt in S_3 nur
Untergr. der Ordnung 1, 2, 3 und 6, wobei $\{id\}$
die einzige Untergruppe der Ordnung 1 und S_3
die einzige Untergr. der Ordnung 6 ist.

2 und 3 sind Primzahlen $\Rightarrow$ Jede Untergr. der
Ordnung 2 oder 3 ist zyklisch, wird also von
einem Element der Ordnung 2 bzw. 3 erzeugt

$\Rightarrow$ 3 Untergr. der Ordn. 2, nämlich $\langle (12) \rangle$,
 $\langle (23) \rangle$ und $\langle (13) \rangle$ und eine Untergr. der Ordn. 3,
nämlich $\langle (123) \rangle = \langle (132) \rangle = \{id, (123), (132)\}$

Insgesamt hat S_3 also genau 6 Untergr. Wegen $S_3 \trianglelefteq G$ hat auch G 6 Untergr., je eine von Ordnung 1, 3 und 6 und drei Untergr. der Ordnung 2. Nach dem Hauptsatz der Galustheorie entsprechen den 6 Untergruppen von G 6 Zwischenkörper von $L|K$. Dabei entspricht die Untergr. der Ordn. 1 dem eind. Zwischenkörper M mit $[L:M]=1$, also $M=L$. Ebenso entspricht die Untergr. der Ordn. 6 dem Zwischenkörper K . Die Untergr. der Ordn. 3 entspricht einem Zwischenkörper M_0 mit $[L:M_0]=3$ und (wg. $[L:K]=6$ Grad) $[M_0:K]=2$. Die drei

Untersg. der Ordn. 2 aufspareichen Zwischenkörpern M_1, M_2, M_3 mit $[L: M_j] = 2$ und $[M_j: K] = 3$ für $j \in \{1, 2, 3\}$.
Weitere Zwischenkörp. existieren nach dem Hauptsatz nicht.

[Notation: $\alpha = \sqrt[3]{\pi}$, $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$]

Wegen $\beta \in L$ ist $K(\beta)$ ein Zwischenkörper von $L|K$,
und wir wissen bereits, dass $[K(\beta): K] = 2$ gilt. Also
ist $M_0 = K(\beta)$, ebenfalls bereits bekannt: $[K(\alpha): K] = 3$

Wir können also $M_1 = K(\alpha)$ setzen. Da auch $\beta\alpha, \beta^2\alpha$
Nullstellen des irred. normierten Polynoms $f \in K[x]$ sind,
gilt auch $[K(\beta\alpha): K] = [K(\beta^2\alpha): K] = 3$.

Wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $K(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$. Wegen
 $\beta\alpha, \beta^2\alpha \notin \mathbb{R}$ gilt andererseits $K(\beta\alpha),$
 $K(\beta^2\alpha) \not\subseteq \mathbb{R}$, somit $K(\alpha) \neq K(\beta\alpha), K(\beta^2\alpha)$.

Ang. $K(\beta\alpha) = K(\beta^2\alpha) \Rightarrow \beta\alpha, \beta^2\alpha \in K(\beta\alpha)$

$\Rightarrow \beta = \frac{\beta^2\alpha}{\beta\alpha} \in K(\beta\alpha) \Rightarrow K(\beta)$ ist zwi-

schenkörper von $[K(\beta\alpha) : K] \Rightarrow$

$$3 = [K(\beta\alpha) : K(\beta)] \cdot [K(\beta) : K] =$$

$$[K(\beta\alpha) : K(\beta)] \cdot 2 \quad \nmid \text{ da } 2 \nmid 3$$

Somit sind die Körper $K(\alpha), K(\beta\alpha),$
 $K(\beta^2\alpha)$ paarweise verschieden. Wir können
somit $M_2 = K(\beta\alpha), M_3 = K(\beta^2\alpha)$ setzen.

Ang.

Wäre

$$= 2)$$

der Ord

Wegen

Normal

2-Syl

wäre da

Gruppen

Ordnung

und $M_3 \mid K$

insgesamt: $L|K$ besitzt genau 6 Zwischenkörper, nämlich $K, K(S), K(\alpha), K(S\alpha), K(S^2\alpha), K(\sqrt{-3}\alpha)$ und L . Wegen $0 \in K$ gilt $K(0) = K$.

Beh.: $L = K(\sqrt{-3} \cdot \alpha)$

z.zg.: (i) $\sqrt{-3} \cdot \alpha \in L$

(ii) $\{\alpha, S\} \subseteq K(\sqrt{-3} \cdot \alpha)$ wg. $L = K(\alpha, S)$

zu (i) $\alpha \in \{\alpha, S\} \Rightarrow \alpha \in L$

$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} \Rightarrow 2S = -1 + \sqrt{-3}$

$\sqrt{-3} = 2S + 1$ Aus $S \in \{\alpha, S\}$ folgt $S \in L$

und damit auch $\sqrt{-3} = 2S + 1 \in L$

$\alpha, \sqrt{-3} \in L \Rightarrow \sqrt{-3} \alpha \in L$

zu (ii) $(\sqrt{-3} \alpha)^2 = -3\alpha^2 \in K(\sqrt{-3} \alpha)$

$$\Rightarrow x^2 \in K(\sqrt{-3} \cdot x) \Rightarrow x^4 = x^3 \cdot x = \pi \cdot x \in$$

$$K(\sqrt{-3} \cdot x) \xrightarrow{\pi \in K} \frac{\pi x}{\pi} = x \in K(\sqrt{-3} \cdot x)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{-3} \cdot x}{x} = \sqrt{-3} \in K(\sqrt{-3} \cdot x) \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

liegt in $K(\sqrt{-3} \cdot x)$ ($\Rightarrow$ Beh.)

$L = K(x, \beta)$ Insgesamt haben wir damit für jeden Zwischenkörper ein erzeugendes Element gefunden.

zu (c) Welche der Zwischenkörper sind normal über dem Grundkörper?

Laut Vorlesung ist jede Körpererweiterung vom Grad 1 oder 2 eine normale Erweiterung. $\Rightarrow K|K, K(\beta)|K$ sind normal. Da $L|K$ galois'sch ist, ist $L|K$ insbesondere normal.

Angenommen, einer der Körper M_j ($j \in \{1, 2, 3\}$)
wäre normal über K . Dann wäre $(\text{wg. } [L : M_j] = 2)$ laut Galois-Theorie eine der Untergruppen
der Ordnung 2 von G ein Normalteiler von G .
Wegen $G \cong S_3$ gäbe es dann auch in S_3 einen
Normalteiler der Ordnung 2. Weil in S_3 die
2-Sylow-Gruppen genau die Untergr. der Ordnung 2 sind,
wäre dann lt. 2. Sylow-Satz die Anzahl n_2 dieser
Gruppen gleich 1. $\downarrow$ da es drei Untergr. der
Ordnung 2 gibt also: $M_1 | K$, $M_2 | K$
und $M_3 | K$ sind keine normalen Erweiterungen



F25T1AS Sei $f = x^{15} - 7 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$ von f über $\mathbb{Q}$ sowie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ galois'sch ist, und dass $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 15 besitzt.

(c) Sei α eine Nullstelle von f in $\mathbb{C}$.

Zeigen Sie: $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(x^5)] = 5$

zu (a) Es ist $L = \mathbb{Q}(\zeta, S)$ mit $\zeta = \sqrt[15]{7}$ und
 $S = e^{2\pi i/15}$, und $[L:\mathbb{Q}] = \varphi(15) \cdot 15 =$
 $8 \cdot 15 = 120$ (Details als Übung)

zu (b) Nachweis, dass $L/\mathbb{Q}$ galois'sch ist: Übung
Laut VI sind alle Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$
normal. $\Rightarrow \mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q}$ ist eine normale Körper-
erweiterung. Außerdem ist $\mathbb{Q}(S)$ wg. $S \in L$ ein
Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$. Laut Galois'scher folgt
daraus insgesamt, dass $N = \text{Gal}(L/\mathbb{Q}(S))$ ein
Normalteiler von $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist.

Aus Teil (a) ist $[\mathbb{Q}(S) : \mathbb{Q}] = \varphi(15) = 8$ bekannt. Laut
Galoistheorie folgt daraus $(G : N) = 8$. Wegen $|G| =$
 $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 120$ erhalten wir $|N| = \frac{|G|}{(G : N)} = \frac{120}{8} = 15$.

zu (c) f ist irreduzibel, $f(x) \neq 0$, f normiert $\Rightarrow f = \mu_{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$
 $\Rightarrow [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = \text{grad}(f) = 15$. Sei $g = x^3 - 7$.

Dieses Polynom ist normiert, irred. auf Grund des Eisen-
stein-Kriteriums, und $g(x^5) = (x^5)^3 - 7 = x^{15} - 7 = f(x)$
 $= 0 \Rightarrow g = \mu_{x^5, \mathbb{Q}} \Rightarrow [\mathbb{Q}(x^5) : \mathbb{Q}] = \text{grad}(g) = 3$

$x^5 \in \mathbb{Q}(x) \Rightarrow \mathbb{Q}(x^5)$ ist Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(x) | \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \text{Gradformel} \Rightarrow 15 &= [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] [\mathbb{Q}(\alpha^5) : \mathbb{Q}] \\ &= [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] \cdot 3 \Rightarrow [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] = \frac{15}{3} = 5. \quad \square \end{aligned}$$

F26T2A5 Sei $f = x^5 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Sei $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

ist gezeigt: $[K : \mathbb{Q}] = 20$, außerdem $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$
mit $\alpha = \sqrt[5]{7}$, $\beta = e^{2\pi i/5}$

(b) zeigen Sie, dass G einen Normalteiler H mit folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(i) H \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad (ii) G/H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

Zeige zunächst, dass $K/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist. (...) (Übung)

Da jede Kreisteilungserw. von $\mathbb{Q}$ normal ist, ist $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ eine normale Körpererweiterung. Laut Galois-Theorie ist $H = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_5))$ somit ein Normalteiler von G . Außerdem:

$$[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = \varphi(5) = 4 \quad \xrightarrow{\text{Galoisth.}} (G:H) = 4$$

$$|G| = [K:\mathbb{Q}] = 20 \Rightarrow |H| = \frac{|G|}{(G:H)} =$$

$\frac{20}{4} = 5$. Da 5 eine Primzahl ist, ist H also eine zyklische Gruppe und damit isomorph zu $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Wird $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ eine normale Teilenerweiterung von $K/\mathbb{Q}$ ist, gilt lt. Galois-Theorie neben $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{5})) \leq G$ auch $G/\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{5})) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q})$

Ist $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\zeta_n \in \mathbb{C}^*$ eine primitive n -te Einheitswurzel, dann gilt lt. VL $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Ist n eine Primzahl, dann gilt darüber hinaus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$. Insgesamt erhalten wir $G/H = G/\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{5})) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(c) Zeigen Sie, dass G nicht abelsch ist.

Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ist nicht normal, denn:
Ang. $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ist normal. Das Pol. f ist normiert.

60

$$Q(s)$$

20

$$Q(S_n) \mid Q)$$

darüber
halten

al, donna.

omiet.