F26T1A1 p Primzahl, $m, q \in \mathbb{N}$

$p \nmid q$, G Gruppe mit $|G| = p^m q$

P p-Sylowgruppe von G

(b) gezeigt: Es existiert ein Gruppenhom.
$\varphi : G \to S_q$ mit $\ker(\varphi) \subseteq P$.

(c) Zeigen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung $p^m q$, falls $p^m \nmid (q-1)!$

ist falsch, $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist Gegenbeispiel

zeige statt dessen: Gilt $p^m \nmid (q-1)!$ und

G einfach, dann gilt $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Sei $N = \ker(\varphi)$, dies ist (als Kern eines Hom.) ein Normalteiler von G. G einfach $\Rightarrow N = G$ oder $N = \{e\}$.

<u>1. Fall</u>: $N = G \overset{N=\ker(\varphi)\leq P}{\underset{\text{nach Teil (b)}}{\Longrightarrow}} G \leq P \Rightarrow G = P$

P p-Sylowg. $\Rightarrow |P| = p^m \Rightarrow G$ ist eine p-Gruppe $\overset{(a)}{\underset{G \text{ einfach}}{\Longrightarrow}} G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

<u>2. Fall</u>: $N = \{e\} \Rightarrow \varphi$ ist injektiv $\Rightarrow G$ ist isomorph zur Untergruppe $\varphi(G)$ von S_q Lagrange $\Rightarrow$

$|\varphi(G)| = |G| = p^m q$ ist Teiler von $|S_q| = q!$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ mit $q! = k \cdot p^m q \Rightarrow (q-1)! = k \cdot p^m$

$\Rightarrow p^m \mid (q-1)!$ ↯ zur Voraussetzung $\square$

<u>H16T3A3</u> (Übung: H13T1A2)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 392 $(392 = 2^3 \cdot 7^2)$

Es sei ν_7 die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G

Zeigen Sie, dass nicht einfach ist, durch folgende Schritte.

(a) Zeigen Sie: $\nu_7 \in \{1, 8\}$ (Übung)

(b) Begründen Sie, dass G im Fall $\nu_7 = 1$ nicht einfach ist. (Übung) fach ist. (Übung)

(c) Begründen Sie, dass durch $\bullet : G \times Syl_7 \to Syl_7$, $(g, P) \mapsto gPg^{-1}$ eine transitive Operation von G auf der Menge Syl_7 der 7-Sylowgruppen von G definiert ist.

z.zg.: (1) $\bullet$ ist Gruppenop. (2) Transitivität von $\bullet$

<u>zu(1)</u> Seien $P \in Syl_7$ und $g, h \in G$. Dann gilt
$e_G \bullet P = e_G P e_G^{-1} = P$ und $g \bullet (h \bullet P) = g \bullet (hPh^{-1}) =$
$g(hPh^{-1})g^{-1} = (gh)P(h^{-1}g^{-1}) = (gh)P(gh)^{-1} = (gh) \bullet P$.

<u>zu(2)</u> Sei $P \in Syl_7$, z.zg.: $G(P) = Syl_7$

„$\subseteq$" offensichtlich nach Def. von $G(P)$

„$\supseteq$" Sei $Q \in Syl_7$. 2. Sylowsatz $\Rightarrow \exists g \in G$ mit
$Q = gPg^{-1} \Rightarrow Q = g \bullet P \Rightarrow Q \in G(P)$

...n.
Gruppe
...)!
...spiel
...und

(d) Zeigen Sie, dass G auch im Fall $\nu_7 = 8$ keine einfache Gruppe ist.

Die Gruppenoperation aus Teil (c) liefert einen Hom. $\varphi : G \to \mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7(G))$ definiert durch $\varphi(g)(P) = g \cdot P = gPg^{-1}$ $\forall g \in G$ und $P \in \mathrm{Syl}_7$. Als Kern eines Hom. ist $N = \ker(\varphi)$ ein Normalteiler von G. Angenommen G ist einfach. Dann gilt $N = G$ oder $N = \{e\}$.

<u>1. Fall</u>: $N = G$

Sei $P \in \mathrm{Syl}_7(G)$. Dann gilt für alle $g \in G$ jeweils $gPg^{-1} = \varphi(g)(P) \underset{g \in N}{\overset{\wedge}{=}} \mathrm{id}_{\mathrm{Syl}_7(G)}(P) = P$. $\Rightarrow P \trianglelefteq G$ 2. Sylowsatz $\Rightarrow \nu_7 = 1$

↯ zur Voraussetzung $\nu_7 = 8$

2. Fall $N = \{e\}$

Dann ist φ injektiv und somit G isomorph zur Untergruppe $\varphi(G)$ von $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7(G))$. Lagrange

$\Rightarrow |\varphi(G)| = |G| = 2^3 \cdot 7^2$ ist Teiler von $|\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7(G))|$

Wegen $|\mathrm{Syl}_7(G)| = \nu_7 = 8$ gilt $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7(G)) \hat{=} S_8$.

$\rightarrow |\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7(G))| = |S_8| = 8!$ Also ist $2^3 \cdot 7^2$ ein Teiler von $8!$. ↯ weil der Primfaktor 7 in $2^3 \cdot 7^2$ zweifach vorkommt, in $8! = 6! \cdot 7 \cdot 8$ wegen $7 \nmid 6!$ nur einfach $\square$

$\nu_7 = 8$
...nnen
...ch
und
... $N =$
...genommen
... $N = \{e\}$
... alle $g \in G$
... $N_{Syl_7(G)}(P)$
N
$\Rightarrow \nu_7 = 1$

H24T1A2 Sei G eine Gruppe der Ordnung $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Zeigen Sie:

(a) G hat einen Normalteiler der Ordnung 23

(folgt aus 3. Sylowsatz, Übung)

(b) Sei $H \trianglelefteq G$ mit $|H| = 23$. Dann operiert H durch Konjugation transitiv auf der Menge $\mathcal{U}$ der Untergruppen von G der Ordnung 11.

Betrachte die Abb. $\bullet : H \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $(h, U) \mapsto hUh^{-1}$. Zeige zunächst, dass $\bullet$ eine Gruppenop. ist. (...) (Übung)

Auf Grund der Ordnung von G ist $\mathcal{U}$ die Menge

...ph zur
...range
...$l_7(G))|$
$) \leq S_8$.
ist
Primfaktor
$! = 6! \cdot 7 \cdot 8$

$\square$

der 11-Sylowgruppen von G. Sei $\nu_{11} = |\mathcal{U}|$.
3. Sylowsatz $\Rightarrow \nu_{11} \mid 8 \cdot 23 \Rightarrow \nu_{11} \in \{1, 2, 4, 8, 23, 46, 92, 184\}$, außerdem $\nu_{11} \equiv 1 \bmod 11$, $2, 4, 8 \not\equiv 1 \bmod 11$, $23 \equiv 1 \bmod 11$.
$46 \equiv 2 \cdot 23 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \not\equiv 1 \bmod 11$, $92 \equiv 4 \cdot 23 \equiv 4 \not\equiv 1 \bmod 11$, $184 = 8 \cdot 23 \equiv 8 \not\equiv 1 \bmod 11$
$\Rightarrow \nu_{11} \in \{1, 23\}$

1. Fall: $\nu_{11} = 1$ Dann besteht $\mathcal{U}$ nur aus einem Element. Es gibt also nur eine Bahn, und die Operation ist somit transitiv.

2. Fall: $\nu_{11} = 23$ Sei $P \in \mathcal{U}$ bel. gewählt. Dann gilt $(H : H_P) = |H(P)|$, wobei H_P den Stabilisator von P in H bezeichnet,

also $H_P = \{h \in H \mid h P h^{-1} = P\}$

$|H| = 23$, 23 ist Primzahl, $|H(P)| = (H : H_P)$ ist Teiler von $|H| \Rightarrow |H(P)| \in \{1, 23\}$. Im Fall $|H(P)| = 23$ muss wegen $|\mathcal{U}| \in \{1, 23\}$ die Bahn $H(P)$ mit $\mathcal{U}$ übereinstimmen, d.h. die Operation ist in diesem Fall transitiv.

Betrachte nun den Fall $|H(P)| = 1$. $\Rightarrow$

$$H(P) = \{P\} \Rightarrow h \cdot P \cdot h^{-1} = P \ \forall h \in H$$

Betrachte nun den Fall $|H(P)| = 1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow H \subseteq N_G(P) \Rightarrow |H| = 23$ ist ein Teiler von $|N_G(P)|$ $\quad P \leq N_G(P) \Rightarrow |P| = 11$ ist Teiler von $|N_G(P)| \rightarrow |N_G(P)|$ ist Vielfaches von $\mathrm{kgV}(11, 23) = 11 \cdot 23$

$\rightarrow \nu_{11} = (G : N_G(P)) = \dfrac{|G|}{|N_G(P)|}$ ist Teiler von $\dfrac{|G|}{11 \cdot 23}$, also von 8 $\quad \nu_{11} \in \{1, 23\} \rightarrow$

$\nu_{11} = 1 \Rightarrow H(P) = \{P\} = \mathcal{U} \rightarrow$

Die Operation ist transitiv. $\square$

F23T2A2 (Übung: F25T2A4, H24T1A2(c))

(Hinweis: Teil (c) hängt nicht mit H24T1A2(b) zusammen)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 30 $(= 2\cdot 3\cdot 5)$, und sei U_3 eine 3-, U_5 eine 5-Sylowgruppe von G.

(a) Zeigen Sie, dass U_3 oder U_5 ein Normalteiler von G ist.
(funktioniert durch Elementezählen, Übung)

(b) Zeigen Sie, dass im Fall $U_3 \trianglelefteq G$ die Faktorgruppe G/U_3 einen Normalteiler vom Index 2 hat, und dass Entsprechendes auch für U_5 gilt.

$|G/U_3| = (G:U_3) = \frac{|G|}{|U_3|} = \frac{30}{3} = \underline{10}$ Da 5 ein Primteiler von 10 ist, existiert eine Untergruppe $\bar{U}$ von G/U_3 mit $|\bar{U}| = 5$.

G/U_3 einen Normalteiler vom Index 2 hat, und dass Entsprechendes auch für U_5 gilt.

$\Rightarrow (G/U_3 : \bar{U}) = \frac{|G/U_3|}{|\bar{U}|} = \frac{10}{5} = 2$ Als Untergr. vom Index 2 ist $\bar{U}$ ein Normalteiler von G/U_3. (Die Ausführung für U_5 läuft analog. Details als Übung.)

(c) Beweisen Sie, dass G eine Untergruppe U_{15} vom Index 2 hat.

Nach Teil (a) gilt $U_3 \trianglelefteq G$ oder $U_5 \trianglelefteq G$

1. Fall: $U_3 \trianglelefteq G$ Sei $\pi: G \to G/U_3$ der kanonische Epimorphismus und $U_{15} = \pi^{-1}(\bar{V})$, wobei $\bar{V}$ die Untergruppe vom Index 2 aus Teil (b) bezeichnet. Auf Grund des Korrespondenzsatzes ist U_{15} eine Untergruppe von G vom Index $(G : U_{15}) = (G/U_3 : \pi^{-1}(\bar{V})) = 2$.

2. Fall: $U_5 \trianglelefteq G$ analog (Übung)

(d) Zeigen Sie, dass alle 3- und alle 5-Sylowgruppen von G in U_{15} liegen.

$(G : U_{15}) = 2 \Rightarrow U_{15} \trianglelefteq G$

$|U_{15}| = 15$ ist Vielfaches von 5 und 3, enthält also Elemente der Ordnung 5 und 3, und somit auch eine Untergr. P_3 der Ordnung 3 und eine Untergr. P_5 der Ordnung 5. Dabei ist P_3 eine 3- und P_5 eine 5-Sylowgruppe von G.

Sei nun P eine beliebige 3-Sylowgr. 2. Sylowsatz $\Rightarrow \exists g \in G : P = g P_3 g^{-1} \underset{P_3 \subseteq U_{15}}{\Rightarrow} P = g P_3 g^{-1} \subseteq g U_{15} g^{-1} \underset{U_{15} \trianglelefteq G}{=} U_{15}$ (Nachweis für die 5-Sylowgr.

(E
un
An
3-
Or
in
Ang
24
U_{15}
da 2

e 5-

3, ent-

3, und

ng 3 und

bei ist P_3

er G.

2. Sylowsatz

$= g P_3 g^{-1} \subseteq$

die 5-Sylowgr.

analog, Übung)

(e) Beweisen Sie, dass G genau eine 3- und genau eine 5-Sylowgruppe besitzt.

Ang. $\nu_3 > 1$. Teil (a) $\Rightarrow \nu_3 = 10$, und die 10 3-Sylowgruppen enthalten 20 Elemente der Ordnung 3. Nach Teil (d) liegen diese alle in U_{15}. $\lightning$, da $20 > 15 = |U_{15}|$.

Ang. $\nu_5 > 1$ Teil (a) $\Rightarrow \nu_5 = 6$, und es gibt 24 Elemente der Ordn. 5 in G. Teil (d) $\Rightarrow$ U_{15} enthält 24 Elemente der Ordnung 5 $\lightning$, da $24 > 15$.

$\square$