Sylowsätze

Def: Sei G eine endl. Gruppe, p eine Primzahl und $U \leq G$. Seien $r \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid m$ und $|G| = p^r m$. Man nennt U eine

(i) <u>p-Untergruppe</u> von G, falls $|U| = p^s$ für ein $s \in \{0, 1, \dots, r\}$ gilt

(ii) <u>p-Sylowgruppe</u> von G, falls $|U| = p^r$ ist.

Sylowsätze: Seien die Bezeichnungen wie in der Definition.

(1) Jede p-Untergruppe von G ist in einer p-Sylowgruppe von G enthalten.

(2) Je zwei p-Sylowgr. P, P' von G sind konjugiert (d.h. $\exists g \in G: P' = gPg^{-1}$)

(3) Für die Anzahl ν_p der p-Sylowgruppen von G gilt $\boxed{\nu_p \mid m \text{ und } \nu_p \equiv 1 \bmod p}$.

wichtige Folgerung aus (2): Für jede p-Sylowgruppe P gilt $\boxed{P \trianglelefteq G \iff \nu_p = 1}$

Zusatz: Für die Anzahl ν_p der p-Sylowgruppen gilt $\nu_p = (G : N_G(P))$, wobei P eine bel. p-Sylowg. von G bezeichnet. (Normalisator $N_G(P) = \{g \in P \mid gPg^{-1} = P\}$)

Erinnerung Sei G eine Gruppe und $N, U \leq G$.

(i) G heißt <u>inneres semidirektes Produkt</u> von N und U, falls (1) $N \trianglelefteq G$ (2) $N \cap U = \{e\}$ (3) $G = NU$

(ii) Gilt auch noch $U \trianglelefteq G$, wird G inneres <u>direktes</u> Produkt von N und U genannt. Es gilt dann $G \cong N \times U$.

H15T1A3 Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 143.
(Übung: Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 99.)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 143. $143 = 11 \cdot 13$
Für $p \in \{11, 13\}$ sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G.
3. Sylowsatz $\Rightarrow \nu_{13} \mid 11 \Rightarrow \nu_{13} \in \{1, 11\}$, außerdem
$\nu_{13} \equiv 1 \mod 13 \quad 11 \not\equiv 1 \mod 13 \Rightarrow \nu_{13} = 1$
$\nu_{11} \mid 13 \Rightarrow \nu_{11} \in \{1, 13\}$, außerdem $\nu_{11} \equiv 1 \mod 11$
$13 \equiv 2 \not\equiv 1 \mod 11 \Rightarrow \nu_{11} = 1$

Sei N die einzige 11- und P die einzige 13-Sylowgruppe. 2. Sylowsatz, $\nu_{11} = 1$
$\Rightarrow N \trianglelefteq G$, ebenso $\nu_{13} = 1 \Rightarrow P \trianglelefteq G$

<u>Beh</u>: G ist inneres direktes Produkt von N und P

Außer $N, P \trianglelefteq G$ ist noch zu überprüfen:
(1) $N \cap P = \{e\}$ (2) $G = NP$

<u>zu (1)</u> folgt aus $\text{ggT}(|N|, |P|) = \text{ggT}(11, 13) = 1$

<u>zu (2)</u> $N, P \trianglelefteq G \Rightarrow NP$ ist Untergruppe von G (sogar Normalteiler) $N \subseteq NP$
$\Rightarrow N \leq NP \Rightarrow |N| = 11$ teilt $|NP|$

$P \subseteq NP \Rightarrow P \leq NP \Rightarrow |P| = 13$ teilt $|NP|$

insgesamt: $|NP|$ ist Vielfaches von $\operatorname{kgV}(11, 13)$ $= 143 = |G| \xRightarrow[|NP| \geq |G|]{NP \subseteq G} G = NP$ ($\Rightarrow$ Beh.).

Aus der Beh. folgt $G \cong N \times P$. Da die Ordnungen $|N| = 11$, $|P| = 13$ Primzahlen sind, sind N und P zyklisch. $\Rightarrow N \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $P \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Wegen $\operatorname{ggT}(11, 13) = 1$ und dem Chin. Restsatz folgt $G \cong \mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$. Somit ist $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ bis auf Isomorphie die einzige Gruppe der Ordnung 143.

…zeige
1
G
von

…ufen:

…(11, 13)

…gruppe
NP
|NP|

Erinnerung: Sei G eine Gruppe und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Seien $g, h \in G$, so dass gilt
(i) $G = \langle g, h \rangle$ (ii) $\mathrm{ord}(g) = n$, $\mathrm{ord}(h) = 2$
(iii) $(gh)^2 = e$. Dann gilt $G \cong D_n$.

Übung: Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 14.

F15T1A3: Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:
(a) Die Gruppe G hat einen Normalteiler N mit $|N| = 5$ oder $|N| = 7$.
(b) Die Gruppe G ist auflösbar.

teilt $|NP|$
gV(11, 13)
$\Rightarrow$ Beh.).
die Ord-
hlen sind
$11\mathbb{Z}$, $P \cong$
Wegen
tsatz folgt
z bis auf Iso-
ng 143.

<u>zu (a)</u> $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ Für $p \in \{3, 5, 7\}$ sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G.

3. Sylowsatz $\Rightarrow \nu_5 \mid 3 \cdot 7 \Rightarrow \nu_5 \in \{1, 3, 7, 21\}$

außerdem $\nu_5 \equiv 1 \mod 5$, $3 \not\equiv 1 \mod 5$, $7 \equiv 2 \not\equiv 1 \mod 5 \Rightarrow \nu_5 \in \{1, 21\}$

$\nu_7 \mid 3 \cdot 5 \Rightarrow \nu_7 \in \{1, 3, 5, 15\}$, außerdem $\nu_7 \equiv 1 \mod 7$ $3, 5 \not\equiv 1 \mod 7 \Rightarrow \nu_7 \in \{1, 15\}$.

<u>1. Fall</u>: $\nu_5 = 1$ Dann ist nach dem 2. Sylowsatz die einzige 5-Sylowgr. ein Normalteiler von G, und $|N| = 5$ wegen $|G| = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

<u>2. Fall</u>: $\nu_7 = 1$ Dann ist entsprechend die einzige 7-Sylowgruppe ein Normalteiler der Ordnung 7.

<u>3. Fall</u>: $\nu_5 = 21$ und $\nu_7 = 15$

Allgemein gilt: Ist G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, dann gibt es in G $(p-1)$-mal soviele Elemente der Ordnung p wie Untergruppen der Ordnung p (denn: Jedes solche Element g ist in genau einer Untergr. der Ordn. p enthalten, nämlich $\langle g \rangle$, und umgekehrt ist jede Untergr. von Ordnung p zyklisch und enthält somit $\varphi(p) = p-1$) Elemente der Ordnung p.) Somit gibt es in G genau $4 \cdot \nu_5 = 4 \cdot 21 = 84$ Elemente der Ordnung 5 und genau $6 \cdot \nu_7 = 6 \cdot 15 = 90$ Elemente der Ordnung 7. $\Rightarrow |G| \geq 84 + 90 = 174$ ↯ zu $|G| = 105$. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

<u>zu (b)</u> z.z.g.: G ist auflösbar

<u>1. Fall</u>: G hat einen Normalteiler N der Ordnung 5

Es genügt z.z.g., dass N und G/N beide auflösbar sind
(denn daraus folgt die Auflösbarkeit von G). $|N| = 5$ ist
Primzahl $\Rightarrow$ N ist zyklisch, damit auch abelsch und auflösbar.
$|G/N| = (G:N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{105}{5} = 21$. Für $p \in \{3, 7\}$ sei
$\bar{\nu}_p$ die Anzahl der p-Sylowgr. von $\bar{G} = G/N$. 3. Sylowsatz
$\Rightarrow \bar{\nu}_7 \mid 3 \Rightarrow \bar{\nu}_7 \in \{1, 3\}$, außerdem $\bar{\nu}_7 \equiv 1 \mod 7$
$3 \not\equiv 1 \mod 7 \Rightarrow \bar{\nu}_7 = 1$. Sei $\bar{P}$ die einzige 7-Sylowgruppe
von $\bar{G}$. 2. Sylowsatz $\Rightarrow \bar{P} \trianglelefteq \bar{G}$. Die Ordnungen

$|\bar{M}| = 7$ und $|\bar{G}/\bar{M}| = \frac{21}{7} = 3$ sind beides Primzahlen

$\Rightarrow \bar{M}, \bar{G}/\bar{M}$ sind beide zyklisch und somit auflösbar

$\Rightarrow \bar{G}$ ist auflösbar

2. <u>Fall</u>: G hat einen Normalteiler der Ordnung 7

analog zum 1. Fall (Dass jede Gruppe der Ordn. 15 zyklisch ist, wurde schon in der Vl. gezeigt.) $\square$

Übung:

- Zeigen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 56.
- F22T2A2

F26T1A1

(a) Sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann einfach ist, wenn $|G| = p$ gilt.

Ab jetzt sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^m q$, wobei p eine Primzahl bezeichnet und $m, q \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid q$ sind. Weiter sei P eine p-Sylowgruppe von G.

(b) Zeigen Sie: Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to S_q$ mit $\ker(\varphi) \subseteq P$.

Sei $\bullet : G \times G/P \to G/P$ die Opera-

tion von G auf der Menge der Linksneben-
klassen von G geg durch

$$g \circ (hP) = (gh)P \text{ für alle } g, h \in G.$$

Zu dieser existiert ein
Hom $\phi : G \to \mathrm{Per}(G/P)$, geg. durch

$$\phi(g)(hP) = g \circ (hP) = (gh) \ \forall g, h \in G.$$

<u>Beh</u>: $\ker(\phi) \subseteq P$

Sei $g \in \ker(\phi)$. $\Rightarrow \phi(g) = id_P \Rightarrow$

$$\phi(g)(P) = id_P(P) = P \Rightarrow gP = P$$

$\Rightarrow$ g

Wegen

$= q$

Sq.

Sq. un

ker(φ

(c) Ze

gilt

der G

...eschreiben-

-

$g, h \in G.$

...rert ein

durch

$\forall g, h \in G.$

$(\phi) \subseteq P$

$\phi \Longrightarrow$

$= P$

$\Rightarrow g \in P$

Wegen $|G/P| = (G:P) = \frac{|G|}{|P|} = \frac{p^m q}{p^m} = q$ gibt es ein Isom. $\iota: \mathrm{Per}(G/P) \to S_q \Rightarrow \varphi = \iota \circ \phi$ ist ein Hom $G \to S_q$ und weil ι ein Isom. ist, folgt $\ker(\varphi) = \ker(\iota \circ \phi) = \ker(\phi) \subseteq P$

(c) Zeigen Sie: Falls $p^m \nmid (q-1)!$ gilt, gibt es keine einfache Gruppe der Ordnung $p^m q$.