

F26T3A2 G endliche Gruppe, $|G| > 2$

mit $a = a^{-1} \quad \forall a \in G$

bereits gezeigt: G ist abelsch

zu (c) z.z.g.: $\prod_{a \in G} a = 1$

Da G eine endliche abelsche Gruppe ist,
gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Primzahlpotenzen
 $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{N}$ mit $q_j > 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}$
so dass $G \cong \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$

Dies
gleich

Wegen $a = a^{-1} \forall a \in G$ sind alle Elemente $\neq e_G$ in G von Ordnung 2. $\Rightarrow q_j = 2$

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$$

Wegen $|G| > 2$ muss $r \geq 2$ gelten.

Es genügt nun also zu zeigen: $\sum_{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r} a = 0_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r}$

Tatsächlich gilt $\sum_{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r} (a_1, \dots, a_r) =$

$$\sum_{a_i \in \{0,1\}} \dots \sum_{a_r \in \{0,1\}} (a_1, \dots, a_r) \quad \text{Für } 1 \leq j \leq r$$

ist die j -te Komponente dieser Summe
jeweils geg. durch $\sum_{a \in A_j} a_j + \sum_{a \in B_j} a_j$ mit

$$A_j = \{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \mid a_j = \bar{0}\}, B_j = \{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \mid a_j = \bar{1}\}$$

Diese Summe ist gleich $|A_j| \bar{0} + |B_j| \bar{1}$

$r \geq 2 \Rightarrow |B_j| = 2^{r-1}$ ist gerade \rightarrow

$$\sum_{a \in A_j} a_j + \sum_{a \in B_j} a_j = |A_j| \bar{0} + |B_j| \bar{1} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

Dies zeigt, dass alle Komponenten der Summe
gleich $\bar{0}$ sind. \square

2 | ist die j -te Komponente dieser Summe
jeweils geg. durch $\sum a_i + \sum a_i$ mit

Erinnerung:

(i) Normalteiler einer Gruppe $G =$ Untergruppe
 N mit der Eigenschaft $gN = Ng \quad \forall g \in G$
(äquivalente Bed.: $gNg^{-1} \subseteq N \quad \forall g \in G$
oder $gng^{-1} \in N \quad \forall g \in G, n \in N$)

(wichtige Beispiele für Normalteiler:
Kerne von Homomorphismen, triviale Normalteiler
 $\{e\}, G$, Untergruppen vom Index 2)

(ii) Index einer Untergruppe U einer Gruppe G
 $=$ Anzahl der Linksnebenklassen von U)

(oder: Anzahl der Rechtsnebenklassen)

iii) Eine Gruppe G wird einfach genannt, wenn sie genau zwei Normalteiler hat, nämlich $\{e, 1\}$ und G (d.h. es gilt außerdem $G \neq \{e, 1\}$).

(Beispiele: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, wobei p Primzahl

A_n mit $n \geq 5$)

F26T1A1 (a) Sei p eine Primzahl und G eine p -Gruppe, d.h. eine Gruppe von p -Potenzordnung. Zeigen Sie: G ist einfach $\iff |G| = p$.

Laut

Ist \mathbb{Z}

Nach

ge G

teiler

$|G| > 1$

Zu Fall

unterteil

3. Fall:

" \Leftarrow " $|G| = p \Rightarrow$ Für jede Untergr. U

von G ist $|U|$ Teiler von p , also

$|U| \in \{1, p\} \Rightarrow U = \{e\}$ oder

$U = G$, außerdem $|G| > 1 \Rightarrow$

$G \neq \{e\} \Rightarrow G$ ist einfach

" \Rightarrow " Sei $r \in \mathbb{N}_0$ die Zahl
mit $|G| = p^r$.

1. Fall: $r = 0$

$|G| = p^0 = 1 \Rightarrow G = \{e\} \rightarrow$

G ist nicht einfach \downarrow

2. Fall: $r \geq 2$

F2

W

(a) g

(b) z

Sei g

1. Fall:

[allgemein]

2. Fall:

und wegen
beiden \downarrow
 G disjunkt
ist, erhalten

Klassen)

Laut III. besitzt G ein Zentrum $Z(G) \neq \{e\}$ als p -Gruppe $\neq \{e\}$

Ist $Z(G) = G$, dann ist G abelsch.

Nach dem Lemma von Cauchy gibt es ein $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = p \Rightarrow \langle g \rangle$ ist Normalteiler von G mit $\{e\} \neq \langle g \rangle \neq G$ (wg. $|\langle g \rangle| = p, |G| > p$) $\Rightarrow G$ ist nicht einfach

Im Fall $Z(G) \neq G$ ist $Z(G)$ ein nichttriv. Normalteiler von $G \Rightarrow G$ ist nicht einfach \downarrow

3. Fall: $r = 1$ In diesem Fall gilt $|G| = p^1 = p$.



Reze-
d.h. eine
zeigen Sie!

F26T3A1 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G .

(a) Geben Sie die Def. des Index $(G:H)$ an. (s.o.)

(b) Zeigen Sie: Aus $(G:H) = 2$ folgt $H \trianglelefteq G$.

Sei $g \in G$, $z.z.g. = gH = Hg$

1. Fall: $g \in H$ Dann gilt $gH = H = Hg$

[allgemein: $gH = g'H \implies g' \in gH$]

2. Fall: $g \notin H$ Dann gilt $gH \neq H$,

und wegen $(G:H) = 2$ sind dies die einzigen beiden linksnebenklassen von H . Da G disjunkte Vereinigung der linksnebenklassen ist, erhalten wir die Zerlegung $G = H \cup gH$

$\rightarrow gH = G \setminus H$ genauso ergibt sich aus
 $Hg + H$ die Zerlegung $G = H \cup Hg$ und
 $Hg = G \setminus H$, also: $gH = G \setminus H = Hg$

(c) Geben Sie ein Beispiel an für eine Gruppe G und
eine Untergruppe H mit $(G:H) = 3$, wobei H kein
Normalteiler von G ist.

Sei $G = S_3$ und $H = \langle (12) \rangle = \{ \text{id}, (12) \}$.

Aus $|G| = 3! = 6$ und $|H| = 2$ folgt $(G:H) =$

$\frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$. Es gilt $(13) \in G$, $(12) \in H$, aber

$$(13) \circ (12) \circ (13)^{-1} = (13) \circ (12) \circ (13) = (23) \notin M$$

$\Rightarrow M$ ist kein Normalteiler von G .

$$[(13) \circ (12) \circ (13) = (1)(23) = (23)]$$

(d)* gesucht: nicht-abelsche Gruppe G , Untergruppe M
mit $(G:M) = 3$, $M \trianglelefteq G$

Sei $G = A_4$ und $M = V_4$, die Klein'sche Vierergruppe.

Für V gilt $|G| = 12$, $|M| = 4$, also $(G:M) = \frac{|G|}{|M|} = \frac{12}{4} = 3$

noch zuzuf.: $M \trianglelefteq G$ Sei $\sigma \in A_4$ und $\tau \in V_4$.

zuzuf.: $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in V_4$ 1. Fall: $\tau = \text{id}$

$\Rightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \text{id} \circ \sigma^{-1} = \text{id} \in V_4$

2. Fall: τ ist Doppeltransp.

Dann ist auch $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ eine Doppeltransp., weil Konjugation mit σ den Zyklustyp erhält. $\Rightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in V_4$ (c)

alternative Möglichkeit:

$$\text{Sei } G = S_3 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, H = S_3 \times \langle \bar{2} \rangle$$

(Überprüfung: als Übung)

Erinnerung:

Ordnung eines Gruppenelements $g \in G$
= Ordnung der Untergruppe $\langle g \rangle = \{g^a \mid a \in \mathbb{Z}\}$

(äquivalent dazu: $\text{ord}(g) =$ kleinstes $n \in \mathbb{N}$
mit $g^n = e_G$ bzw. $\text{ord}(g) = \infty$, falls kein
solches $n \in \mathbb{N}$ existiert)

wichtige Regel:

G Gruppe, $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$, dann:

$$g^n = e_G \iff \text{ord}(g) \mid n$$

F26TZA1 Beweise oder widerlege

(a) Es gibt eine Gruppe G , deren sämtliche nichttriviale Elemente entweder von Ordnung 2 oder von Ordnung 1013 sind, wobei beide Ordnungen vorkommen. (ohne Beweis: 1013 ist Primzahl)

Ja, die Gruppe D_{1013} hat diese Eigenschaft. Bekanntlich haben alle Elemente der Diedergruppe D_n für $n \geq 3$ jeweils Ordnung 2, oder die Ordnung ist ein Teiler von n . Im Fall $n = 1013$ sind 1 und 1013 die einzigen Teiler. Außerdem besitzt n jeweils ein Frobenius-system bestehend aus einem Element der Ordnung 2 und einem Element

der Ordnung n . In D_{1013} gibt es also
Elemente der Ordnungen 2 und 1013.

(6) Es gibt eine abelsche Gruppe, deren
sämtliche nichttriviale Elemente entweder
von Ordnung 2 oder von Ordnung 1013 sind.

Ja, die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat diese Eigenschaft.
Das einzige nichttriv. Element hat Ordnung 2.

Übungen: H23T1A2
H13T3A3

Anmerkung:

In Teil (b) wäre es sinnvoller gewesen, wie in Teil (a) nach der Existenz einer abelschen Gruppe zu Fragen, bei der 1, 2 und 1013 die einzigen vorkommenden Elementordnungen sind (in der also alle drei Ordnungen auch tatsächlich vorkommen). In diesem Fall lautet die Antwort nein.

Nehmen wir an, G ist eine solche Gruppe. Seien $g, h \in G$ mit $\text{ord}(g) = 2$ und $\text{ord}(h) = 1013$. Weil 2026 ein Vielfaches von 2 und von 1013 ist, gilt $g^{2026} = h^{2026} = e_G$. Weil G abelsch ist, dürfen wir die Rechenregel $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ für alle $a, b \in G$ und $m \in \mathbb{Z}$ anwenden, und erhalten

$$(gh)^{2026} = g^{2026} \cdot h^{2026} = e_G \cdot e_G = e_G.$$

Es folgt $\text{ord}(gh) \mid 2026$, und somit $\text{ord}(gh) \in \{1, 2, 1013, 2026\}$.
Wäre $\text{ord}(gh)$ ein Teiler von 2, würden wir

$$e_G = (gh)^2 = g^2 \cdot h^2 = e_G \cdot h^2 = h^2$$

und somit $\text{ord}(h) \mid 2$ erhalten, im Widerspruch zu $\text{ord}(h) = 1013$.
Aus $\text{ord}(gh) = 1013$ würde sich

$$\begin{aligned} e_G &= (gh)^{1013} = g^{1013} \cdot h^{1013} = g^{1013} \cdot e_G \\ &= (g^2)^{506} \cdot g = e_G^{506} \cdot g = g \end{aligned}$$

ergeben, im Widerspruch zu $\text{ord}(g) = 2$. So aber müsste gh ein Element der Ordnung 2026 sein, was ausgeschlossen ist, weil 1, 2 und 1013 die einzigen vorkommenden Elementordnungen sind. Also existiert eine Gruppe G mit den angegebenen Eigenschaften nicht.