Übung: F26T2A2

F26T2A1

zu (c) Beweisen oder widerlegen Sie:

Ist $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_{n,\mathbb{C}}$, und haben A und B dasselbe char. Polynom und dasselbe Minimalpolynom, dann sind sie ähnlich zueinander.

Die Aussage ist im Allgem. falsch. Be-

Def

$= A$

fü

trachte die Blockmatrizen $A = \begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} J_2 & & \\ & J_1 & \\ & & J_1 \end{pmatrix}$ bestehend aus den Jordanmatrizen $J_1 = (2)$, $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Größe des größten Jordanblocks ist jeweils 2, deshalb gilt $\mu_A = \mu_B = (x-2)^2$. Die Summe der Größen aller Jordanblöcke zum Eigenwert 2 ist jeweils 4, also ist $\chi_A = \chi_B = (x-2)^4$. Aber A und B sind nicht ähnlich, weil zwei Matrizen in JNF u.U. nur dann ähnlich sind, wenn sie bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke enthalten. $\square$

Gruppentheorie

Def. Gruppe = Paar $(G, \cdot)$, wobei G Menge, $\cdot$ assoziative Verknüpfung, und außerdem gilt

(i) Es gibt ein $e_G \in G$ mit $a \cdot e_G = a$ und $e_G \cdot a = a$ für alle $a \in G$

(ii) Für jedes $g \in G$ gibt es ein $h \in G$ mit $g \cdot h = e_G$ und $h \cdot g = e_G$ (ist jeweils eindeutig bestimmt, wird mit g^{-1} bezeichnet).

additive Schreibweise (nur bei $+$ oder $\oplus$ als Verknüpfungssymbol, nur bei abelschen Gruppen üblich)

- Bezeichnung des Neutralelements: 0_G
- Bezeichnung $-g$ (statt g^{-1}) für das Inverse von g
- unterschiedliche Schreibweise für Potenzen:

$$3\cdot g = g+g+g \qquad (-3)\cdot g = -(g+g+g) \quad \text{additiv}$$

$$g^3 = g\circ g\circ g \qquad g^{-3} = (g\circ g\circ g)^{-1} \quad \text{multiplikativ}$$

Def. Homomorphismus zwischen Gruppen $(G,\circ)$, $(H,*)$
= Abbildung $\phi: G \to H$ mit $\phi(g\circ g') = \phi(g) * \phi(g')$ für alle $g, g' \in G$

Isomorphismus = bijektiver Hom. $\phi : G \to H$

(In diesem Fall ist die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Homomorphismus, genauer ein Isom.) Man nennt zwei Gruppen G und H <u>isomorph</u>, wenn ein Isomorphismus $\phi : G \to H$ existiert.

wichtige Beispiele für abelsche Gruppen:

- R Ring $\Rightarrow$ $(R, +)$ abelsche Gruppe
  (z.B. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$) $\quad K^\times = K \setminus \{0_K\}$
- K Körper $\Rightarrow$ $K^\times$ abelsche Gruppe mit $\cdot$ als Verknüpfung (Bsp.: $\mathbb{F}_p^\times$ ist für jede Primzahl p eine abelsche Gruppe mit $p-1$ Elementen)
- V K-Vektorraum $\Rightarrow$ $(V, +)$ abelsche Gruppe
  z.B. $(K^n, +)$, $(M_{m \times n, K}, +)$

- Sind G und H abelsche Gruppen, dann auch $G \times H$. (Sind $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$, dann ist $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$ mit der komponentenweisen Addition eine Gruppe. Aus dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen folgt, dass bis auf Isomorphie alle endl. abelschen Grp. die Form $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$ haben, mit $r \in \mathbb{N}_0$ und Primzahlpotenzen $q_j > 1$.)

<u>wichtig</u>: Sind G, H isomorphe Gruppen, dann haben G und H <u>identische</u> Struktur-eigenschaften. (u.a.: gleiche Anzahl Untergr., gleiche Anzahl Elt. bestimmter Ordnung, gleiche Anzahl Normalteiler, ist G zyklisch

F
au
gr
Ges
die
Sei
G_3

$:G \to H$
ung
s, ge-
Gruppen
phismus

ruppen:
pe

$\backslash \{0_K\}$
mit $\cdot$ als
jede Primzahl
lementen)
sche Gruppe

(bzw. abelsch, auflösbar) dann gilt dasselbe für H usw.)

wichtige Beispiele für nicht-abelsche Gruppen:

- symmetrische Gruppen S_n mit $n \geq 3$
  alternierende Gruppen A_n mit $n \geq 4$
  Diedergruppen D_n $(n \geq 3)$
  (Ordnungen: $|S_n| = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $|A_n| = \frac{1}{2} n!$ $\forall n \geq 2$, $|D_n| = 2n$ $\forall n \geq 3$)
  Die Gruppe A_4 hat noch die Kleinsche Vierergr. $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ als Untergruppe, aber diese ist abelsch.
- allgemeine lineare Gruppe $GL_n(K)$, falls K Körper und $n \in \mathbb{N}$

, dann
dann ist
enweisen
z über
dass bis
chen Grp:
len. mit
> 1.)
Gruppen,
Struktur-
l Untergs.;
dung,
st G zyklisch

- Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ einer Gruppe G kann abelsch oder nicht-abelsch sein
- Das äußere semidirekte Produkt $N \rtimes_\phi U$ zweier Gruppen N und U ist nicht-abelsch, wenn es mit einem nichttriv. Hom. $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ gebildet wird.

<u>F26T2A4</u> Zeigen Sie, dass es <u>bis auf Isomorphie</u> mindestens vier verschiedene Gruppen der Ordnung 18 gibt. $[18 = 2 \cdot 3^2]$

Gesucht sind vier Gruppen G_1, G_2, G_3, G_4, die paarweise nicht isomorph sind.

Sei $G_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$G_3 = D_9$ (= 18-elementige Diedergr.), $G_4 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times S_3$

Alle vier Gruppen sind von Ordnung 18; und außerdem sind sie paarweise nicht isomorph, denn:

- Die Gruppen G_1, G_2 sind abelsch, G_3, G_4 aber nicht abelsch (weil D_n $\forall n \geq 3$ nicht abelsch ist). Also sind G_1 und G_2 weder zu G_3 noch zu G_4 isomorph.
- Wegen $\operatorname{ggT}(2,9) = 1$ gilt $G_1 \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ nach dem Chin. Restsatz, d.h. G_1 ist zyklisch von Ordnung 18 und enthält somit ein Element der Ordnung 18.

  Dagegen gilt für alle $(a,b,c) \in G_2$ mit $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $b, c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ jeweils $6(a,b,c) = (\bar{0},\bar{0},\bar{0})$, d.h. die Ordnungen der Elemente in G_2 sind alles Teiler von 6 $\Rightarrow$ kein Elt. der Ordn. 18 in G_2 $\Rightarrow$ G_1 nicht isom. zu G_2

- Bekanntlich enthält D_n für jedes $n \geq 3$ eine zykl. Untergruppe der Ordnung n (bestehend aus den Drehungen) und somit auch ein Element der Ordnung n. $\Rightarrow$ G_3 enthält ein Element der Ordnung 9. Wegen $|S_3| = 6$ gilt $\sigma^6 = id$ für alle $\sigma \in S_3$. Für alle $(a, \sigma) \in G_4$ (mit $a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\sigma \in S_3$) gilt somit $(a, \sigma)^6 = (6a, \sigma^6) = (\bar{0}, id) = e_{G_4}$. Jede Elementordnung in G_4 ist also ein Teiler von 6, insb. gibt es kein Elt. der Ordnung 9 in G_4. $\Rightarrow$ G_3 ist nicht isomorph zu G_4. $\square$

Übung: F25 T3 A2

<u>F26 T3 A2</u> Sei G eine endliche Gruppe mit mehr als zwei Elementen und der Eigenschaft $a^{-1} = a \ \forall a \in G$. Zeigen Sie:

(a) Die Gruppe G ist abelsch.

(b) Es gibt in G eine Untergruppe der Ordnung 4.

(c) Das Produkt $\prod_{a \in G} a$ aller Elemente von G ist gleich 1_G.

<u>zu (a)</u> [Erinnerung: In Gruppen gilt $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$]

Seien $a, b \in G$, z.zg: $ab = ba$.

Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

<u>zu (b)</u> [Erinnerung: Untergruppe einer Gruppe G
= Teilmenge $U \subseteq G$ mit den Eigenschaften
(i) $e_G \in U$ (ii) $\forall g, h \in U: gh \in U$ (iii) $\forall g \in U: g^{-1} \in U$]

Seien a, b zwei verschiedene Elemente $\neq e_G$ in G. (Diese existieren wg. $|G| \geq 3$.)

Sei $c = ab$. Dann gilt $c \notin \{e_G, a, b\}$.

denn: Ang. $c = e_G \Rightarrow ab = e_G \Rightarrow b = a^{-1} = a$ ↯

Ang. $c = a \Rightarrow ab = a \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}a \Rightarrow e_G b = e_G$
$\Rightarrow b = e_G$ ↯. Ang. $c = b \Rightarrow ab = b \Rightarrow abb^{-1} =$
$bb^{-1} \Rightarrow ae_G = e_G \Rightarrow a = e_G$ ↯

Also ist $U = \{e_G, a, b, ab\}$ eine 4-elementige Teilmenge von G. Beh.: U ist Untergr. von G

- Es gilt $e_G \in U$.
- Für alle $g \in U$ gilt $g^{-1} = g$, also $g^{-1} \in U$.
- noch z.zg.: $gh \in U \; \forall g, h \in U$

$\cdot$	e_G	a	b	ab
e_G	e_G	a	b	ab
a	a	e_G	ab	b
b	b	ab	e_G	a
ab	ab	b	a	e_G

$\forall g \in U: g \cdot e_G = e_G g = g$
$\forall g \in U: g \cdot g = g g^{-1} = e_G$
außerdem: $a \cdot b = ab$

$a \circ (ab) = a^2 \cdot b = e_G \cdot b = b$

$b \circ (ab) = (ab) \circ b = a \cdot b^2 = a \cdot e_G = a$

Da die Gruppe abelsch ist, erhält man die restl. Einträge der Tabelle durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Die Tabelle zeigt, dass $gh \in U \; \forall g, h \in U$ erfüllt ist

$\square$