F25T3A1 Rest von Teil (a)

geg. $A \in \mathcal{M}_{m,K}$, $B \in \mathcal{M}_{n,K}$, $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

noch zu zeigen:

(ii) Für alle $f \in K[x]$ folgt aus $\mu_A \mid f$ und $\mu_B \mid f$ jeweils $\mu_C \mid f$.

$\mu_A \mid f \Rightarrow \exists\, g \in K[x]$ mit $f = g \cdot \mu_A$

$\Rightarrow f(A) = (g\,\mu_A)(A) = g(A)\,\mu_A(A)$

$= g(A) \cdot 0 = 0$

Aus $\mu_B \mid f$ folgt ebenso $f(B) = 0$.

$$\Rightarrow f(C) = \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_C \mid f \quad \square$$

Die Jordansche Normalform

Def. K Körper, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in K$

(i) Jordanmatrix der Größe n zum Eigenwert λ = Matrix
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} =: J$$
(Es ist $\chi_J = \mu_J = (x-\lambda)^n$)

(ii) Matrix in JNF = Blockmatrix der Form
$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$
wobei $J_1, \dots, J_r$ Jordanmatrizen.

wobei $J_1, \dots, J_r$ Jordanmatrizen.

F25T3A1 in (a) gezeigt: $\mu_C = \mathrm{kgV}(\mu_A, \mu_B)$
falls C Blockmatrix d. Form $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

(b) Gibt es eine Matrix $A \in M_{6,\mathbb{R}}$ mit
$\chi_A = x^6 + x^4$ und grad $\mu_A = 5$?

Es ist $x^6 + x^4 = x^4(x^2+1)$.
(x^4, x^2+1 ist teilerfremd, da $x \nmid (x^2+1)$)

Setze $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\chi_B = x^2 + 1$.

$$\left[\; A = \begin{pmatrix} B & \\ & 0_{M_{4,\mathbb{R}\times\mathbb{R}}} \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} \chi_A = x^4(x^2+1) \\ \mu_A = \mathrm{kgV}(x^2+1, x) \\ \quad = x^3 + x \end{array} \;\right]$$

$M_{n,K}$ in JNF, wenn χ_A in $K[x]$ in Linearfak-

Setze $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $J_2 = (0)$.

Dann gilt $\mu_{J_1} = x^3$, weil J_1 eine Jordanmatrix der Größe 3 ist, und $\mu_{J_2} = x$, da J_2 Jordanmatrix der Größe 1. Setze $J = \begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix} \xRightarrow{(a)}$
$\mu_J = \text{kgV}(\mu_{J_1}, \mu_{J_2}) = \text{kgV}(x^3, x) = x^3$

Beh: $\mu_B = x^2 + 1$ Wegen $\chi_B(i) = \chi_B(-i) = 0$ sind $\pm i$ Eigenwerte von B und somit auch Nullstellen von μ_B. $\Rightarrow x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ ist Teiler von μ_B. Außerdem gilt $\mu_B \mid \chi_B$ wie für jede quadr. Matrix.

außerdem sind μ_B, χ_B beide normiert $\Rightarrow \mu_B = \chi_B = x^2+1$

Aus der Teilerfremdheit von x^2+1 und x^3 folgt mit Teil (a) für das Min. pol. von $C = \begin{pmatrix} B & \\ & J \end{pmatrix} \in M_{6,\mathbb{R}}$ nun

$\mu_C = \mathrm{kgV}(\mu_B, \mu_J) = (x^2+1)\cdot x^3 = x^5 + x^3$, insb. grad $\mu_C = 5$,

und $\chi_C = \chi_B \cdot \chi_J = (x^2+1)\cdot x^4 = x^6 + x^4$ $\square$

<u>Satz</u>: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n,K}$.

(i) Genau dann ist A ähnlich zu einer Matrix $J \in M_{n,K}$ in JNF, wenn χ_A in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

(ii) Jede weitere Matrix $J' \in M_{n,K}$ in JNF ist genau dann ähnlich zu A (und J), wenn sie bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke wie J enthält.

(iii) Sei nun $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Dann ist $\mu_g(A,\lambda)$ die Anzahl der Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ.

(iv) Es ist $\mu_a(A,\lambda)$ die Summe der Größen aller Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ.

(v) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_A ist die Größe des größten Jordanblocks in J zum Eigenwert λ.

d

F2

V

mi

(a)

(b)

Übungen zur Theorie der JNF: H16T3A1, F20T2A1

H14T2A5 (IV)

$J \in M_{7,\mathbb{C}}$

Bestimmen Sie die Menge der 7×7-Matrizen in JNF mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\chi_J = (x-2)^7$ (ii) $\mu_J = (x-2)^3$ (iii) $\operatorname{rg}(J-2E) \geq 4$

Für jedes $A \in M_{7,\mathbb{C}}$ gilt auf Grund des Dimensionssatzes $\operatorname{rg}(A) + \dim\ker(A) = 7$.

Somit ist $\operatorname{rg}(A) \geq 4$ äquivalent zu

$7 - \dim\ker(A) \geq 4$ und zu $\dim\ker(A) \leq 3$

Die Bed. (iii) besagt also, dass $\mu_g(J,2) = \dim \operatorname{Eig}(J,2) = \dim\ker(J-2E) \leq 3$ ist, dass also in J höchstens 3 Jordanblöcke zum Eigenwert 2 vorkommen.

Bed (i) besagt, dass in J nur Jordanblöcke zum Eigenwert 2 vorkommen.

Nach Bed. (ii) muss 3 die Größe des größten Jordanblocks in J sein.

In J muss also mind. ein Jordanblock der Größe 3 vorkommen, aber es darf keinen größeren Block geben. Bezeichnet r die Anzahl der Jordanblöcke und $(n_1, \dots, n_r)$ die Größen der Jordanblöcke in J absteigend geordnet, dann gilt außerdem $n_1 + \dots + n_r = 7$. Die einzigen Möglichkeiten sind also $(n_1, \dots, n_r) = (3,3,1)$ und $(n_1, \dots, n_r) = (3,2,2)$.

JNF

), wenn

Jordan-

A. Dann

danblöcke

größen aller

rt λ.

lstelle von

danblocks

Setzen wir $J_1 = (2)$, $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dann besteht die ges. Menge aus den Blockmatrizen $\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_3 & \\ & & J_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_1 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_3 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_2 & \\ & & J_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J_2 & & \\ & J_3 & \\ & & J_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} J_2 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$. $\square$

<u>F26T3A5</u>

V endl.-dim. K-Vektorraum, K Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$ mit $\phi^2 = \mathrm{id}_V$

(a) zeige: ϕ ist diagonalisierbar

(b) zeige: Die Aussage ist falsch für $\operatorname{char}(K) = 2$.

<u>zu (a)</u> Sei $n = \dim V$. Wegen $\phi^2 - \mathrm{id}_V = 0$ ist ϕ Nullstelle von $x^2 - 1$ $\Rightarrow$ μ_ϕ teilt $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ $\Rightarrow$ $\mu_\phi \in \{x-1, x+1, x^2-1\}$, und ± 1 sind die beiden einzigen Eigenwerte von ϕ (Beachte: Wegen $\operatorname{char} K \neq 2$ gilt $1 \neq -1$, d.h. ϕ hat tatsächlich zwei verschiedene Eigenwerte.)

Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V

und $A = M_{\mathcal{B}}(\phi)$. Lt. VL ist ϕ genau dann diag.-bar, wenn A diagonalisierbar.
Sei $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Dann zerfällt χ_A in $\tilde{K}[x]$ in Linearfaktoren. Wegen $\mu_A \mid (x^2-1)$ sind ± 1 auch die einzigen beiden Eigenwerte von A in $\tilde{K}$. $\Rightarrow \pm 1$ sind die einzigen beiden Nullstellen von χ_A in $\tilde{K}$

$\Rightarrow \chi_A = (x-1)^m (x+1)^{n-m}$ für ein $m \in \{0, \dots, n\}$!

Zu (c)

Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V

Dies zeigt, dass χ_A bereits über K in Linear-faktoren zerfällt. Es existiert also eine zu A ähnliche Matrix $J \in M_{n,K}$ in Jordan'scher Normalform. Da ± 1 höchstens einfache Nullst. von μ_A sind, gibt es in J nur Jordanblöcke der Größe 1.

$\Rightarrow J$ ist Diagonalmatrix $\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar, also auch ϕ.

<u>zu (b)</u> Sei $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{F}_2}$ und $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2^2)$ geg. durch $\phi(v) = Av \ \forall v \in \mathbb{F}_2^2$.

also auch ϕ.

$\Rightarrow$ (b) Sei $A = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \cdots\end{pmatrix} \in M \ldots$ und $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}_2^2)$

$$A^2 = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} \Rightarrow$$ Für alle $v \in \mathbb{F}_2^2$ gilt $\phi^2(v) = \phi(\phi(v)) = A(Av) = A^2 v = Ev = v$.

$\Rightarrow \phi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2^2}$

Es ist A eine Matrix in JNF, aber keine Diagonalmatrix. $\Rightarrow$ A ist nicht diagonalisierbar. Wegen $A = M_{\mathcal{E}}(\phi)$ mit der Einheitsbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ ist somit auch ϕ kein diagonalisierbarer Endomorphismus. $\square$