Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut

Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorlesung im Sommersemester 2026

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Zusammenfassung

Thema der Vorlesung ist die Theorie der Systeme von Differenzialgleichungen f"ur Funktionen in einer Variablen. Diese Theorie entwickelte sich in erster Linie durch Fragestellungen aus der Physik, besitzt aber auch wichtige Anwendungen in Gebieten der Reinen Mathematik, wie zum Beispiel der Differenzialgeometrie und der Funktionalanalysis. Wir beschäftigen uns mit Verfahren zur Berechnung von Lösungen solcher Gleichungssysteme, leiten Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen her, untersuchen das asymptotische Verhalten von Lösungen und die Abhängigkeit der Lösungen von Parameterwerten. Im Einzelnen werden folgende Themen behandelt.

- elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche DGLs
- Existenz- und Eindeutigkeitssätze, Randverhalten von Lösungen
- lineare Systeme von DGLs (u.a. mit konstanten oder periodischen Koeffizienten)
- Stabilität von Lösungen
- parameterabängige Differenzialgleichungen

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Grundbegriffe 3

§ 2. Elementare Lösungsmethoden 9

§ 3. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf 22

§ 4. Der Existenzsatz von Peano 35

§ 5. Lineare Systeme von Differenzialgleichungen 51

§ 6. Weitere Verfahren zur Untersuchung linearer Systeme 79

§ 7. Autonome Differenzialgleichungen 92

§ 8. Stabilität von Lösungen 102

§ 9. Parameterabhängige Systeme von Differenzialgleichungen 116

§ 1. *Grundbegriffe*

Zusammenfassung. In diesem Kapitel definieren wir Differenzialgleichungen (DGLs) erster Ordnung, ihren Definitionsbereich und ihre Lösungen. Die Lösungskurven und Richtungsvektorfelder ermöglichen eine geometrische Interpretation der DGLs. Wir formulieren hinreichende Kriterien für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Während bei expliziten DGLs der Definitionsbereich oft künstlich eingeschränkt ist, ermöglichen DGLs in symmetrischer Form eine größere Flexibilität.

Wichtige Grundbegriffe

- explizite und implizite DGL erster Ordnung
- (maximale) Lösung einer solchen DGL
- normiertes Richtungsvektorfeld einer DGL
- (lokale) Lipschitz-Bedingung
- Lipschitz-Konstante
- 1-Form auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$
- DGL in symmetrischer Form

Zentrale Sätze

- Existenzsatz von Peano
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Im ersten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns vorwiegend mit Differenzialgleichungen des folgenden Typs.

Definition 1.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennt man eine Gleichung der Form

$$y' \quad = \quad f(x, y)$$

eine (gewöhnliche) ***explizite Differenzialgleichung (DGL)*** erster Ordnung. Eine ***Lösung*** einer solchen DGL ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(t, \varphi(t)) \in D$ und $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Gelegentlich betrachtet man DGLs von etwas allgemeinerer Form.

Definition 1.2 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann wird eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y') \quad = \quad 0$$

eine ***implizite DGL*** erster Ordnung genannt. Eine Lösung ist in diesem Fall eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D$ und $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Jeder expliziten DGL $y' = f(x,y)$ gegeben durch eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ kann eine implizite DGL zugeordnet werden, indem man $\tilde{D} = D \times \mathbb{R}$ und $F : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ durch $F(x,y,y') = y' - f(x,y)$ definiert. Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist offenbar genau dann eine Lösung von $y' = f(x,y)$, wenn sie eine Lösung von $F(x,y,y') = 0$ ist.

Umgekehrt liefert der Satz über implizite Funktionen aus der Analysis mehrerer Variablen ein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine implizite DGL $F(x,y,y') = 0$ gegeben durch eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ zumindest in der Umgebung eines Punktes $(x_0,y_0,z_0) \in D$ in eine explizite DGL umgewandelt werden kann: Ist F stetig differenzierbar und $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, dann gibt es offene Intervalle $I,J,K \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $z_0 \in K$ und eine Funktion $f : I \times J \to K$ mit der Eigenschaft, dass die Äquivalenz

$$F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x,y) \qquad \text{für alle} \quad (x,y,z) \in I \times J \times K$$

erfüllt ist. Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $\varphi(t) \in J$ für alle $t' \in I'$ ist unter diesen Voraussetzungen genau dann eine Lösung von $F(x,y,y') = 0$, wenn sie eine Lösung von $y' = f(x,y)$ ist. Wir werden uns in der Vorlesung aber fast ausschließlich mit expliziten DGLs befassen.

Definition 1.3 Man bezeichnet eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der DGL $y' = f(x,y)$ als ***maximal***, wenn keine Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}$ mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.

Wir definieren nun zwei wichtige geometrische Merkmale einer expliziten DGL.

Definition 1.4 Sei $y' = f(x,y)$ eine explizite DGL erster Ordnung wie oben. Dann nennt man die Funktion $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\vec{f}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1+f(x,y)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

das ***normierte Richtungsvektorfeld*** der DGL. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL, dann bezeichnet man den Graphen von φ gegeben durch $\gamma : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (t, \varphi(t))$ auch als ***Lösungskurve*** der DGL.

Für den weiteren Verlauf führen wir die folgende Sprechweise ein: Wir sagen, eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ***durchläuft*** einen Punkt (x,y) des Definitionsbereichs D der DGL, wenn ein $t \in I$ mit $\gamma(t) = (t, \varphi(t)) = (x,y)$ existiert.

Die Definitionen sind so gewählt, dass für jedes $t \in I$ der Vektor $(\vec{f} \circ \gamma)(t)$ jeweils der normierte Tangentialvektor an die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$ ist. Denn der Tangentialvektor ohne Normierung ist jeweils gegeben durch $\gamma'(t)$, und es gilt

$$\gamma'(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,\varphi(t)) \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{\sqrt{1+f(t,\varphi(t))^2}}{\sqrt{1+f(t,\varphi(t))^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,\varphi(t)) \end{pmatrix} \quad = \quad \sqrt{1+f(t,\varphi(t))^2} \cdot (\vec{f} \circ \gamma)(t).$$

Sehen wir uns diese geometrischen Merkmale anhand einiger konkreter Beispiele an.

(1) Die Differenzialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ besitzt als Lösungen die Funktionen $\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto ct$, wobei c die reellen Zahlen durchläuft. Dies überprüft man unmittelbar durch Differenziation der Funktion φ_c: Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\varphi_c'(t) \quad = \quad c \quad = \quad \frac{ct}{t} \quad = \quad \frac{\varphi_c(t)}{t}.$$

Die entsprechende Lösungskurve ist gegeben durch $\gamma_c(t) = (t, ct)$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$. Das normierte Richtungsvektorfeld der DGL ist gegeben durch

$$\vec{f}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in D$. Offenbar handelt es sich bei allen φ_c um maximale Lösungen der DGL.

(2) Die Differenzialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ besitzt als Lösungen die Funktionen der Form

$$\varphi_c : I_c \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \sqrt{c - t^2} \quad ,$$

definiert jeweils auf dem offenen Intervall $I_c = \left]-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right[$, wobei c die positiven reellen Zahlen durchläuft. Auch hier überprüft man die Lösungseigenschaft unmittelbar durch Differenziation: Für alle $c \in \mathbb{R}^+$ und $t \in I_c$ gilt

$$\varphi_c'(t) \quad = \quad \frac{(-2t)}{2\sqrt{c-t^2}} \quad = \quad -\frac{t}{\varphi_c(t)}.$$

Das normierte Richtungsvektorfeld ist in diesem Fall gegeben durch

$$\vec{f}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x}{y})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in D$. Auch hier ist klar, dass es sich bei allen φ_c um maximale Lösungen handeln muss. Denn nehmen wir an, dass $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL mit $\psi|_{I_c} = \varphi_c$ ist, definiert auf einem offenen Intervall $J \supsetneq I_c$. Dann gilt $-\sqrt{c} \in J$ oder $\sqrt{c} \in J$. Wir beschränken uns auf den zweiten Fall, weil die Argumentation im ersten Fall analog verläuft. Als Lösung der DGL ist die Funktion ψ auf I_c differenzierbar, damit auch stetig, und es folgt

$$\psi(\sqrt{c}) \quad = \quad \lim_{t \to \sqrt{c}} \psi(t) \quad = \quad \lim_{t \to \sqrt{c}} \varphi_c(t) \quad = \quad \lim_{t \to \sqrt{c}} \sqrt{c - t^2} \quad = \quad \sqrt{c - (\sqrt{c})^2} \quad = \quad 0.$$

Aber dies stets im Widerspruch dazu, dass $(t, \psi(t))$ für alle $t \in J$ im Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ der DGL liegen muss.

(3) Betrachten wir allgemein eine DGL der Form $y' = f(x)$ mit einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der Definitionsbereich der DGL durch $D = I \times \mathbb{R}$ gegeben. Bezeichnet $F : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f, dann sind die Lösungen der DGL genau die Funktionen der Form $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi_c(t) = F(t) + c$. Dies folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Diesmal hat das Richtungsvektorfeld der DGL die Form

$$\vec{f}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1+f(x)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Auch in diesem Beispiel sind alle angegebenen Lösungen offenbar maximale Lösungen.

Um ein Kriterium für die Eindeutigkeit von Lösungen formulieren zu können, benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 1.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Man sagt, die Funktion f genügt einer ***Lipschitz-Bedingung***, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $|f(x,y) - f(x,y')| \leq L|y - y'|$ für alle $x, y, y' \in \mathbb{R}$ mit $(x,y), (x,y') \in D$ erfüllt ist. Die Zahl L wird in diesem Zusammenhang eine ***Lipschitz-Konstante*** der Funktion f genannt.

(ii) Die Funktion f genügt einer ***lokalen*** Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x,y) \in D$ eine Umgebung U existiert, so dass $f|_{D \cap U}$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Wie wir später überprüfen werden, genügt f zum Beispiel dann einer lokalen Lipschitz-Bedingung, wenn f stetig und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach der zweiten Variable y ebenfalls stetig ist. Für die definierenden Funktionen in den drei Beispielen, gegeben durch $f(x,y) = \frac{y}{x}$, $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ bzw. $(x,y) \mapsto f(x)$ ist dieses Kriterium offenbar erfüllt. Die folgenden beiden Aussagen werden wir in einem späteren Kapitel in einem allgemeineren Rahmen beweisen.

Satz 1.6 Sei $y' = f(x,y)$ eine explizite DGL erster Ordnung, gegeben durch eine Funktion f auf einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) *(Existenzsatz von Peano)*
Ist f stetig, dann existiert für jeden Punkt $(x,y) \in D$ eine maximale, durch (x,y) verlaufende Lösung der DGL.

(ii) *(Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)*
Genügt f darüber hinaus einer lokalen Lipschitz-Bedingung, dann existiert für jeden Punkt $(x,y) \in D$ eine *eindeutig bestimmte* maximale Lösung durch (x,y).

Geometrisch lässt sich der Existenzsatz von Peano dahingehend interpretieren, dass die Lösungskurven der DGL den Definitionsbereich D der DGL überdecken, wobei es aber vorkommen kann, dass zwei Lösungskurven zusammenlaufen oder sich überkreuzen. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf bedeutet, dass die Lösungskurven darüber hinaus eine *Zerlegung* des Definitionsbereichs bilden.

Anhand der Beispiele (1) und (2) von oben wird ein Problem der expliziten DGLs in der Form $y' = f(x,y)$ deutlich: Die definierende Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besitzt häufig Definitionslücken, wodurch der Definitionsbereich von Lösungen unnötig eingeschränkt wird. So wäre es wünschenswert, die DGL im Beispiel (1) so umzuschreiben, dass die Lösungen $\varphi_c(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Ebenso würde man die DGL im Beispiel (2) gern in eine Form bringen, bei der die Lösungskurven vollständige Kreisbahnen darstellen, und nicht nur Halbkreise.

Insgesamt wird die Beschreibung von Lösungen häufig vereinfacht, wenn man DGLs und Lösungen einer etwas allgemeineren Form betrachtet. Unser nächstes Ziel besteht darin, eine solche Form zu definieren. Sie wird später im Abschnitt über exakte DGLs Verwendung finden. Außerdem liefert diese Fassung einen Ansatz, um DGLs auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten zu definieren, ein wichtiges Thema im Rahmen der Differenzialgeometrie.

Definition 1.7 Eine ***Linearform*** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass diese linearen Abbildungen selbst einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden, den wir als den ***Dualraum*** V^* von V bezeichnen.

Wir interessieren uns im Folgenden nur für den Dualraum $(\mathbb{R}^2)^*$. Dieser enthält zwei ausgezeichnete Elemente e_1^* und e_2^*, die auf einem beliebigen Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ durch $e_1^*(v) = v_1$ und $e_2^*(v) = v_2$ definiert sind.

Definition 1.8 Eine 1-***Form*** auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $\omega : D \to (\mathbb{R}^2)^*$.

Auf jeder Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es zwei ausgezeichnete 1-Formen, die mit dx und dy bezeichnet werden und durch die konstanten Werte $dx(x,y) = e_1^*$ bzw. $dy(x,y) = e_2^*$ für alle $(x,y) \in D$ gegeben sind. Weil es sich bei (e_1^*, e_2^*) um eine geordnete Basis des Dualraus $(\mathbb{R}^2)^*$ handelt, gibt es für jede 1-Form ω auf D eindeutig bestimmte Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, so dass

$$\omega(x,y) \quad = \quad f(x,y)\, e_1^* + g(x,y)\, e_2^*$$

für alle $(x,y) \in D$ erfüllt ist. Dies bedeutet, dass ω stets in der Form $\omega = f\, dx + g\, dy$ dargestellt werden kann, mit geeigneten Funktionen f und g auf D. Man bezeichnet die 1-Form ω als stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar, wenn f und g auf D stetige, differenzierbare bzw. stetig differenzierbare Funktionen sind.

Definition 1.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und seien ω und η zwei auf D definierte 1-Formen. Dann bezeichnen wir die Gleichung

$$\omega(x,y) \quad = \quad \eta(x,y)$$

als eine DGL ***in symmetrischer Form***. Eine differenzierbare Funktion $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ wird eine ***Lösung*** der DGL genannt, wenn $\gamma(t) \in D$ und

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \quad = \quad \eta(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Auch den DGLs in symmetrischer Form können wir normierte Richtungsvektorfelder zuordnen, die aber im Allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt sind. Ist $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor, dann bezeichnen wir mit $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ seine euklidische Norm.

Definition 1.10 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und seien ω und η zwei auf D definierte 1-Formen. Wir bezeichnen eine Abbildung $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^2$ als ***normiertes Richtungsvektorfeld*** der DGL $\omega(x,y) = \eta(x,y)$, wenn für alle $(x,y) \in D$ jeweils

$$\|\vec{f}(x,y)\| = 1 \qquad \text{und} \qquad \omega(x,y)(\vec{f}(x,y)) \;=\; \eta(x,y)(\vec{f}(x,y))$$

erfüllt ist.

Dieser Typ von Differenzialgleichungen steht zu den oben definierten, expliziten DGLs der Form $y' = f(x,y)$, gegeben durch eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, in folgendem Zusammenhang: Seien ω und η die 1-Formen auf D gegeben durch $\omega = dy$ und $\eta = f\,dx$. Dann ist durch $dy = f(x,y)\,dx$ also eine DGL in symmetrischer Form gegeben. Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, ist genau dann eine Lösung von $y' = f(x,y)$, wenn die zugehörige Lösungskurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \varphi(t))$ eine Lösung von $dy = f(x,y)\,dx$ ist. Weil nämlich für alle $t \in I$ sowohl

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \quad = \quad e_2^*(\gamma'(t)) \quad = \quad e_2^*(1, \varphi'(t)) \quad = \quad \varphi'(t)$$

als auch

$$\eta(\gamma(t))(\gamma'(t)) \quad = \quad f(t,\varphi(t)) \cdot e_1^*(1,\varphi'(t)) \quad = \quad f(t,\varphi(t)) \cdot 1 \quad = \quad f(t,\varphi(t)),$$

gilt, ist Letzteres äquivalent zur Gleichung $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ für alle $t \in I$.

An Stelle der DGLs (1) und (2) von oben können wir nun die folgenden DGLs in symmetrischer Form mit erweitertem Definitionsbereich betrachten.

(1') Wir betrachten auf $D = \mathbb{R}^2$ die DGL gegebeben durch $x\,dy = y\,dx$. Dann ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ durch $\gamma_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (t, ct)$ eine Lösung dieser DGL gegeben. Setzen wir nämlich $\omega = x\,dy$ und $\eta = y\,dx$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils $\omega(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) = \omega(t,ct)(1,c) = t \cdot e_2^*(1,c) = t \cdot c = ct$, und ebenso $\eta(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) = \eta(t,ct)(1,c) = ct \cdot e_1^*(1,c) = ct \cdot 1 = ct$. Ein Richtungsvektorfeld der DGL ist durch

$$\vec{f}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

und $\vec{f}(0,0) = (1,0)$ gegeben. Im Fall $(x,y) \neq (0,0)$ gilt nämlich $\omega(x,y)(\vec{f}(x,y)) = (x^2+y^2)^{-1/2} x \cdot e_2^*(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2} xy$, und ebenso $\eta(x,y)(\vec{f}(x,y)) = (x^2+y^2)^{-1/2} y e_1^*(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2} xy$. Außerdem ist $\omega(0,0)(1,0) = 0 = \eta(0,0)(1,0)$. (Für den Wert $\vec{f}(0,0)$ kann in der Tat ein beliebiger normierter Vektor gewählt werden, weil die DGL $x\,dy = y\,dx$ im Punkt $(0,0)$ „entartet".)

(2') Auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ betrachten wir die DGL $y\,dy = -x\,dx$. Dann erhalten wir für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ durch $\gamma_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (c\cos(t), c\sin(t))$ eine Lösung der DGL. Definieren wir nämlich $\omega = y\,dy$ und $\eta = -x\,dx$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ einerseits

$$\omega(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) \quad = \quad \omega(c\cos(t), c\sin(t)) \begin{pmatrix} -c\sin(t) \\ c\cos(t) \end{pmatrix} \quad = \quad c\sin(t) e_2^* \begin{pmatrix} -c\sin(t) \\ c\cos(t) \end{pmatrix} \quad = \quad c^2 \cos(t)\sin(t) \quad ,$$

andererseits aber auch

$$\begin{aligned} \eta(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) \quad &= \quad \eta(c\cos(t), c\sin(t)) \begin{pmatrix} -c\sin(t) \\ c\cos(t) \end{pmatrix} \quad = \quad -(c\cos(t)) \cdot e_1^* \begin{pmatrix} -c\sin(t) \\ c\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \quad -(c\cos(t)) \cdot (-c\sin(t)) \quad = \quad c^2 \cos(t)\sin(t). \end{aligned}$$

Man überprüft ohne Schwierigkeiten, dass durch $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^{-1/2}(y,-x)$ ein Richtungsvektorfeld der DGL definiert ist.

§ 2. *Elementare Lösungsmethoden*

Zusammenfassung. In diesem Kapitel behandeln wir eine Reihe von elementaren Lösungsmethoden für gewöhnliche DGLs erster Ordnung von spezieller Form, im Einzelnen

- Lösung von DGLs mit getrennten Variablen
- Lösung linearer DGLs durch Variation der Konstanten
- Rückführung auf bekannte Typen durch Substitution
- Lösung exakter durch Bestimmung einer Stammfunktion bzw. eines integrierenden Faktors

2.1 Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen

In diesem Abschnitt betrachten wir DGLs der folgenden Form.

Definition 2.1 Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man $y' = f(x)g(y)$ eine Differenzialgleichung mit ***getrennten Variablen***.

Der folgende Satz gibt ein Kriterium für die Eindeutigkeit der Lösung durch einen Punkt und liefert zugleich ein Verfahren für die Bestimmung der Lösung.

Satz 2.2 Seien f, g wie oben definiert und außerdem $(a, b) \in I \times J$ mit $g(b) \neq 0$. Sei $J' \subseteq J$ ein Intervall mit $b \in J'$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J'$, und seien $F : I \to \mathbb{R}$ und $G : J' \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{und} \quad G(y) = \int_b^y g(t)^{-1}\,dt.$$

Dann besitzt G eine Umkehrfunktion $H : G(J') \to J'$, und es existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J')$. Darüber hinaus ist die Funktion $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi = H \circ F$ die einzige durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL auf I'.

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass ein offenes Intervall J' mit der angegebenen Eigenschaft existiert, denn wegen $g(b) \neq 0$ und der Stetigkeit von g gilt $g(y) \neq 0$ für alle y in einem hinreichend kleinen offenen Teilintervlal $J' \subseteq J$, das b enthält. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass im Fall $g(b) > 0$ auch $g(y) > 0$ für alle $y \in J'$ gilt, und $g(y) < 0$ für alle $y \in J'$ im Fall $g(b) < 0$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $G'(y) = g(y)^{-1}$ für alle $y \in J'$. Dies zeigt, dass G im Fall $g(b) > 0$ streng monoton wachsend und im Fall $g(b) < 0$ streng monoton fallend auf J' ist. Daraus wiederum folgt die Existenz der Umkehrfunktion H von G.

Nach Definition gilt $F(a) = G(b) = 0$, also ist $G(J')$ eine offene Intervallumgebung von $F(a)$. Auf Grund der Stetigkeit von F existiert somit eine offene Intervallumgebung $I' \subseteq I$ von a mit $F(I') \subseteq G(J')$. Daraus wiederum folgt, dass $\varphi = H \circ F$ auf dem gesamten Intervall I' definiert ist. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechung gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und $G'(y) = g(y)^{-1}$ für alle $y \in J'$. Weil G die Umkehrfunktion von H ist, gilt $G \circ \varphi = F$ auf dem gesamten Intervall I', und für alle $t \in I'$ gilt auf Grund der Kettenregel

$$f(t) \quad = \quad F'(t) \quad = \quad (G \circ \varphi)'(t) \quad = \quad G'(\varphi(t))\varphi'(t) \quad = \quad g(\varphi(t))^{-1}\varphi'(t)$$

was zu $\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t))$ umgeformt werden kann. Wegen $G(b) = 0$ gilt außerdem $H(0) = b$ und somit $\varphi(a) = (H \circ F)(a) = H(0) = b$. Ingesamt ist damit gezeigt, dass φ tatsächlich eine durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL ist.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\psi : I' \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der DGL durch (a, b). Dann folgt $\psi'(t) = f(t)g(\psi(t))$ für alle $t \in I'$. Da $g \circ \psi$ stetig ist, und wegen $g(\psi(a)) = g(b) \neq 0$, existiert eine offene Intervallumgebung $I'' \subseteq I'$ von a mit $\psi(t) \subseteq J'$. Es folgt dann $g(\psi(t)) \neq 0$ für alle $t \in I''$. Die Gleichung kann dann zu $g(\psi(t))^{-1}\psi'(t) = f(t)$ umgestellt werden. Es gilt also $G'(\psi(t))\psi'(t) = F'(t)$ für alle $t \in I''$, und Anwendung des Integrals $\int_a^x$ auf beiden Seiten liefert $(G \circ \psi)(x) = F(x)$ für alle $x \in I''$. Die Gleichung $G \circ \psi = F$ kann zu $\psi = H \circ F$ umgestellt werden; dies zeigt, dass ψ auf I'' mit φ übereinstimmt.

Nehmen wir nun an, dass ein Punkt $x \in I'$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$ existiert. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $x > a$ ist; im Fall $x < a$ verläuft die Argumentation analog. Definieren wir $x_0 = \sup\{x \in I' \mid \varphi|_{[a,x]} = \psi|_{[a,x]}\}$, dann gilt $x_0 > a$ und $x_0 \in I$. Auf Grund der Stetigkeit von φ und ψ gilt außerdem $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Dieselbe Überlegung, angewendet auf x_0 an Stelle von a, zeigt, dass φ in einer offenen Umgebung von x_0 mit ψ übereinstimmt. Aber dies steht zur Definition von x_0 im Widerspruch. Also müssen φ und ψ auf ganz I' übereinstimmen. □

Um das Lösungsverfahren zu illustrieren, bestimmen wir für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ eine Lösung φ_c der Differenzialgleichung

$$y' \quad = \quad y^2 \qquad \text{mit} \qquad \varphi_c(0) = c$$

im Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Dazu betrachten wir die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ und $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2$. Die zugehörigen Funktionen F und G sind dann definiert durch

$$F(x) \quad = \quad \int_0^x dt \quad = \quad x \qquad \text{und} \qquad G(y) \quad = \quad \int_c^y \frac{dt}{t^2} \quad = \quad -\frac{1}{t}\Big|_c^y \quad = \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen $G(\,]0, +\infty[\,) = \left]-\infty, \frac{1}{c}\right[$ können wir $I' = \left]-\infty, \frac{1}{c}\right[$ wählen; dies ist das maximale offene Intervall mit $F(I') = I' \subseteq G(\,]0, +\infty[\,)$. Die Umkehrfunktion H von G erhält man durch die Umformung

$$x = G(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{c} - x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\frac{1}{c} - x} = \frac{c}{1 - cx} \quad ,$$

die gesuchte Funktion ist also $y = H(x)$. Für alle $x \in I'$ gilt $H(F(x)) = H(x) = \frac{c}{1-cx}$. Durch $\varphi_c(x) = \frac{c}{1-cx}$ ist also eine Lösung $\varphi_c : I' \to \mathbb{R}$ der DGL mit $\varphi_c(0) = c$ definiert. Tatsächlich gilt

$$\varphi_c'(x) \quad = \quad (-c^2)(-1)(1-cx)^{-2} \quad = \quad \frac{c^2}{(1-cx)^2} \quad = \quad \left(\frac{c}{1-cx}\right)^2 \quad = \quad \varphi_c(x)^2.$$

für alle $x \in I'$.

Im Fall $g(b) = 0$ können durch den Punkt (a, b) unendlich viele verschiedene Lösungen verlaufen. Als Beispiel betrachten wir die DGL $y' = \sqrt{|y|}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$. Hier erhält man für alle $a \in \mathbb{R}$ jeweils unendlich viele Lösungen durch den Punkt $(a, 0)$, sogar in jeder beliebig kleinen Umgebung von $(a, 0)$. Sind nämlich $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < a < c$, dann ist zum Beispiel die Funktion $\varphi_{bc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi_{bc}(t) \quad = \quad \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-b)^2 & \text{für } t < b \\ 0 & \text{für } b \le t < c \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{für } t \ge c \end{cases}$$

eine Lösung. Denn für $t < b$ ist $\varphi'_{bc}(t) = -\frac{1}{2}(t-b)$ und ebenso $\sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} = \sqrt{\frac{1}{4}(t-b)^2} = \frac{1}{2}|t-b| = -\frac{1}{2}(t-b)$ wegen $t - b < 0$. Auch für $t \ge c$ ist die DGL wegen $\varphi'_{bc}(t) = \frac{1}{2}(t-c)$ und $\sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} = \sqrt{\frac{1}{4}(t-c)^2} = \frac{1}{2}|t-c| = \frac{1}{2}(t-c)$ erfüllt. Für $b < t < c$ gilt offenbar $\varphi'_{bc}(t) = 0 = \sqrt{|\varphi_{bc}(t)|}$. Durch Vergleich der links- und rechtsseitigen Ableitung zeigt man, dass diese Gleichungen auch in den Punkten b und c erfüllt sind.

Im Fall $g(b) = 0$ ist auf jeden Fall $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto b$ eine Lösung von $y' = f(x)g(y)$ durch den Punkt (a, b). Wir formulieren noch ein hinreichendes Kriterium, dass die Eindeutigkeit auch in dieser Situation sicherstellt.

Proposition 2.3 Seien die Bezeichnungen wie in Satz 2.2 gewählt. Ist $g(b) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass $g(y) > 0$ für alle $y \in]b, b + \alpha]$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_b^{b+\alpha} \frac{dy}{g(y)}$$

divergiert, dann gibt es keine Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\varphi(t) > b$ für ein $t \in I'$.

Beweis: Nehmen wir an, dass die angegebene Bedingung erfüllt ist, aber dennoch eine Lösung φ wie angegeben existiert, wobei $t_1 \in I'$ mit $\varphi(t_1) > b$ sei. O.B.d.A. können wir $t_1 > a$ annehmen; im Fall $t_1 < a$ verläuft die Argumentation analog. Setzen wir $t_0 = \sup\{t \in [a, t_1[\mid \varphi(t) = b\}$, dann gilt $t_0 < t_1$, $\varphi(t_0) = b$ (auf Grund der Stetigkeit von φ) und $\varphi(t) > b$ für alle $t \in]t_0, t_1]$, denn nach Definition des Supremums ist $\varphi(t) = b$ für diese t ausgeschlossen, und auch $\varphi(t) < b$ würde auf Grund des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch zur Definition liefern. Durch eventuelle Verkleinerung von t_1 können wir erreichen, dass $\varphi(t) \in]b, b + \alpha]$ für alle $t \in]t_0, t_1]$ gilt. Es folgt dann $g(\varphi(t)) > 0$ für all diese t.

Weil φ eine Lösung der DGL ist, gilt außerdem jeweils $\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t))$. Sei $x \in]t_0, t_1]$. Division durch $g(\varphi(t))$ und Integration über $[x, t_1]$ auf beiden Seiten liefert

$$\int_x^{t_1} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\, dt \quad = \quad \int_x^{t_1} f(t)\, dt \quad ,$$

was durch Anwendung der Substitutionsregel auf die Form

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(t_1)} \frac{ds}{g(s)} \quad = \quad \int_x^{t_1} f(t)\, dt$$

gebracht werden kann. Lassen wir nun x innerhalb des Intervalls $]t_0, t_1]$ gegen t_0 laufen, dann läuft $\varphi(x)$ gegen $\varphi(t_0) = b$, und auf Grund unserer Voraussetzung divergiert das Integral auf der linken Seite der Gleichung. Die

rechte Seite dagegen ist für $x \to t_0$ konvergent auf Grund der Stetigkeit von f. Die Annahme der Existenz einer solchen Lösung hat also zu einem Widerspruch geführt. □

Genauso zeigt man: Ist $g(b) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass $g(y) < 0$ für alle $y \in [b-\alpha, b[$ gilt und das uneigentliche Integral $\int_{b-\alpha}^{b} g(y)^{-1}\, dy$ divergiert, dann gibt es keine Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\varphi(t) < b$ für ein $t \in I'$. Sind beide Bedingungen zugleich erfüllt, dann ist die konstante Funktion mit dem Wert b also tatsächlich die einzige Lösung auf I durch den Punkt (a, b).

2.2 Lineare Differenzialgleichungen

Definition 2.4 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' \quad = \quad f(x)y + g(x)$$

eine ***lineare DGL*** erster Ordnung. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann spricht man von einer ***homogenen***, ansonsten von einer ***inhomogenen*** Differenzialgleichung.

Folgende allgemeine Aussagen lassen sich über die Lösungsmenge linearer DGL formulieren.

Proposition 2.5

(i) Für jedes Paar $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch (a, b). Diese ist gegeben durch $\varphi(t) = be^{F(t)}$ mit der Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ von f.

(ii) Sind φ_1, φ_2 Lösungen der homogenen linearen DGL, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda\varphi_1$ Lösungen dieser DGL.

(iii) Sei ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL. Dann sind die Lösungen dieser DGL insgesamt die Funktionen der Form $\psi = \psi_0 + \varphi$, wobei φ die Lösungen der homogenen linearen DGL durchläuft.

Beweis: zu (i) Auf Grund des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, und mit der Kettenregel erhalten wir $\varphi'(t) = be^{F(t)}F'(t) = be^{F(t)}f(t) = f(t)\varphi(t)$ auf Grund der Kettenregel, für beliebiges $t \in I$. Außerdem gilt $F(a) = 0$ und somit $\varphi(a) = be^{F(a)} = be^0 = b$. Die Lösung ist nach Satz 1.6 (ii) eindeutig bestimmt, weil die DGL einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt: Auf Grund der Stetigkeit von f existiert eine offene Umgebung $I' \subseteq I$ von a und eine konstante L, so dass $|f(x)| \leq L$ für alle $x \in I'$ gilt. Für alle $(x, y), (x, z) \in I' \times \mathbb{R}$ erhalten wir dann $|f(x)y - f(x)z| = |f(x)||y - z| \leq L|y - z|$.

zu (ii) Beide Gleichungen können direkt nachgerechnet werden: Für alle $t \in I$ gilt $(\varphi_1 + \varphi_2)'(t) = \varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) = f(t)\varphi_1(t) + f(t)\varphi_2(t) = f(t)(\varphi_1 + \varphi_2)(t)$, und ebenso erhält man $(\lambda\varphi_1)'(t) = \lambda\varphi_1'(t) = \lambda f(t)\varphi_1(t) = f(t)(\lambda\varphi_1)(t)$.

zu (iii) Auch diese Äquivalenz überprüft man durch reines Einsetzen. Ist φ eine Lösung der homogenen und ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL, dann ist $\psi = \psi_0 + \varphi$ ebenfalls eine Lösung der inhomogenen DGL, denn für alle $t \in I$ gilt jeweils $\psi'(t) = \psi_0'(t) + \varphi'(t) = f(t)\psi_0(t) + g(t) + f(t)\varphi(t) = f(t)(\psi_0 + \varphi)(t) + g(t) = f(t)\psi(t) + g(t)$. Ist umgekehrt ψ eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL und definieren wir $\varphi = \psi - \psi_0$, dann gilt offenbar $\psi = \psi_0 + \varphi$, und φ ist eine Lösung der homogenen DGL, denn es gilt $\varphi'(t) = \psi'(t) - \psi_0'(t) = f(t)\psi(t) + g(t) - f(t)\psi_0(t) - g(t) = f(t)(\psi - \psi_0)(t) = f(t)\varphi(t)$. □

Satz 2.6 *(Variation der Konstanten)*

Sei $(a,b) \in I \times \mathbb{R}$ vorgegeben und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch $(a,1)$. Sei $u : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) \quad = \quad b + \int_a^t \frac{g(s)}{\varphi(s)}\, ds \qquad \text{für alle} \quad t \in I.$$

Dann ist $\psi = u\varphi$ die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen linearen DGL $y' = f(x)y + g(x)$ durch den Punkt (a,b).

Beweis: Dass es sich bei ψ um eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL handelt, ist äquivalent zu

$$\psi'(t) = f(t)\psi(t) + g(t) \quad \Leftrightarrow \quad u(t)\varphi'(t) + u'(t)\varphi(t) = f(t)u(t)\varphi(t) + g(t) \quad \Leftrightarrow$$
$$u(t)f(t)\varphi(t) + u'(t)\varphi(t) = u(t)f(t)\varphi(t) + g(t) \quad \Leftrightarrow \quad u'(t)\varphi(t) = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad u'(t) = \frac{g(t)}{\varphi(t)} \quad ,$$

jeweils für alle $t \in I$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung äquivalent dazu, dass $u(t) = b' + \int_a^t \frac{g(s)}{\varphi(s)}\, ds$ mit einer Konstanten $b' \in \mathbb{R}$ gilt. Die Lösung $\psi = u\varphi$ läuft genau dann durch den Punkt (a,b), wenn $b' = u(a) = u(a)\varphi(1) = b$ gilt. Die Lösung ist nach Satz 1.6 (ii) eindeutig bestimmt, weil auch die inhomogene DGL einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt: Wiederum können wir eine offene Umgebung $I' \subseteq I$ von a und eine Konstante L wählen, so dass $|f(x)| \leq L$ für alle $x \in I'$ gilt. Für alle $(x,y),(x,z) \in I' \times \mathbb{R}$ erhalten wir dann $|(f(x)y + g(x)) - (f(x)z + g(x))| = |f(x)||y - z| \leq L|y - z|$. □

Zur Illustration bestimmen wir für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $\psi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der DGL

$$y' \quad = \quad 2xy + x^3 \qquad \text{mit} \quad \psi_b(0) = b.$$

Diese inhomogene lineare DGL ist aus den Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^3$ aufgebaut. Die zugehörige Funktion F erhalten wir durch

$$F(x) \quad = \quad \int_0^x f(t)\, dt \quad = \quad \int_0^x 2t\, dt \quad = \quad t^2\Big|_0^x \quad = \quad x^2.$$

Somit ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{t^2}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = 2xy$ mit $\varphi(0) = 1$. Um die inhomogene lineare DGL zu lösen, bestimmen wir die Hilfsfunktion u. Mit Hilfe der Substitutionsregel und durch partielle Integration erhalten wir

$$u(t) \quad = \quad b + \int_0^t \frac{g(s)}{\varphi(s)}\, ds \quad = \quad b + \int_0^t \frac{s^3}{e^{s^2}}\, ds \quad = \quad b + \tfrac{1}{2}\int_0^t (2s)s^2 e^{-s^2}\, ds \quad =$$
$$b + \tfrac{1}{2}\int_0^{t^2} se^{-s}\, ds \quad = \quad b - \tfrac{1}{2}\left[se^{-s}\right]_0^{t^2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{t^2} e^{-s}\, ds \quad = \quad b - \left[\tfrac{1}{2}se^{-s} + \tfrac{1}{2}e^{-s}\right]_0^{t^2} \quad =$$
$$b - \tfrac{1}{2}t^2e^{-t^2} - \tfrac{1}{2}e^{-t^2} + \tfrac{1}{2} \quad = \quad b + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(t^2+1)e^{-t^2}.$$

Durch $\psi_b(t) = \varphi(t)u(t) = (b + \frac{1}{2})e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2+1)$ ist also eine Lösung mit $\psi_b(0) = b$ gegeben.

2.3 Modifikation einer DGL durch Substitution

Satz 2.7 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $V \subseteq I \times \mathbb{R}$ ein Gebiet und $f : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $\phi : V \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung derart, dass für jedes $x \in I$ mit $V_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in V\} \neq \emptyset$ die Abbildung $\phi_x : V_x \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \phi(x,y)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf ihre Bildmenge $\phi_x(V_x)$ ist. Für jedes offene Intervall $J \subseteq I$ und jede Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sind dann äquivalent:

(i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL $y' = f(x,y)$.

(ii) Die Funktion $\eta : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \phi(t, \varphi(t))$ ist eine Lösung von

$$y' \quad = \quad (\phi_x^{-1})'(y)^{-1} f(x, \phi_x^{-1}(y)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \phi_x^{-1}(y)).$$

Beweis: „(i) ⇒ (ii)“ Auf Grund der Voraussetzung gilt $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $t \in J$. Die Ableitung von $t \mapsto (t, \varphi(t))$ ist gegeben durch $t \mapsto (1, \varphi'(t))$ und die totale Ableitung von ϕ durch

$$(x,y) \quad \mapsto \quad \left(\tfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \quad \tfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\right) \quad = \quad \left(\tfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \quad \phi_x'(y)\right).$$

Durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir somit

$$\eta'(t) \quad = \quad \phi_t'(\varphi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)) \quad = \quad \phi_t'(\varphi(t)) f(t, \varphi(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)).$$

Die Gleichung $\eta(t) = \phi(t, \varphi(t)) = \phi_t(\varphi(t))$ kann zu $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t))$ umgeformt werden. Die Ableitung von $\phi_t \circ \phi_t^{-1} = \mathrm{id}_{\phi_t(V_t)}$ liefert die Gleichung $(\phi_t' \circ \phi_t^{-1}) \cdot (\phi_t^{-1})' = 1$, was zu $((\phi_t^{-1})')^{-1} = \phi_t' \circ \phi_t^{-1}$ äquivalent ist. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta'(t) \quad &= \quad \phi_t'(\phi_t^{-1}(\eta(t))) f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) \\ &= \quad (\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass η eine Lösung der DGL $y' = (\phi_x^{-1})'(y)^{-1} f(x, \phi_x^{-1}(y)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \phi_x^{-1}(y))$ ist.

„(ii) ⇒ (i)“ Die Gleichung von oben

$$\eta'(t) \quad = \quad \phi_t'(\varphi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t))$$

liefert durch Umstellen nach $\varphi'(t)$ die Identität

$$\varphi'(t) \quad = \quad \phi_t'(\varphi(t))^{-1} \left(\eta'(t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t))\right).$$

Auf Grund der Voraussetzung gilt $\eta'(t) = (\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t)))$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\varphi'(t) \quad = \quad \phi_t'(\varphi(t))^{-1} \left((\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t))\right).$$

Durch Einsetzen der Identität $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t))$ vereinfacht sich dies zu

$$\varphi'(t) \quad = \quad \phi_t'(\varphi(t))^{-1}\left((\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1}f(t,\varphi(t)) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\varphi(t)) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\varphi(t))\right) \quad =$$

$$\phi_t'(\varphi(t))^{-1}(\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1}f(t,\varphi(t)).$$

Einsetzen von $\eta(t)$ in die Gleichung $((\phi_t^{-1})')^{-1} = \phi_t' \circ \phi_t^{-1}$ von oben ergibt wegen $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t))$ die Identität $(\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} = \phi_t'(\varphi(t)))$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\varphi'(t) \quad = \quad \phi_t'(\varphi(t))^{-1}\phi_t'(\varphi(t))f(t,\varphi(t)) \quad = \quad f(t,\varphi(t)).$$

Dies zeigt, dass φ eine Lösung von $y' = f(x,y)$ ist. □

Wir demonstrieren die Anwendung von Satz 2.7 anhand zweier Beispiele.

(1) Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Um die Differenzialgleichung

$$y' \quad = \quad f(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

zu vereinfachen, betrachten wir die Substitutionsfunktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$. Offenbar ist $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, deren Umkehrfunktion $\phi_x^{-1}(z) = \frac{1}{\beta}z - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$ man durch die Umformung

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad \Leftrightarrow \quad z - \alpha x - \gamma = \beta y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\beta}z - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$$

erhält. Nach Satz 2.7 führt dies wegen $(\phi_x^{-1})'(z) = \frac{1}{\beta}$, $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = \alpha$ und

$$f(\alpha x + \beta\phi_x^{-1}(y) + \gamma) \quad = \quad f(\alpha x + \beta(\tfrac{1}{\beta}y - \tfrac{\alpha}{\beta}x - \tfrac{\gamma}{\beta}) + \gamma) \quad = \quad f(y)$$

auf die modifizierte DGL $z' = \alpha + \beta f(z)$. Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen, die mit den Methoden aus Abschnitt 2.1 gelöst werden kann. Ist $\eta : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung der modifzierten DGL, dann ist $\varphi : J \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t)) = \frac{1}{\beta}\eta(t) - \frac{\alpha}{\beta}t - \frac{\gamma}{\beta}$ eine Lösung der ursprünglichen DGL.

(2) Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, welche die y-Achse nicht schneidet, und es sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(\sigma x, \sigma y) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in V$ und $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die DGL $y' = f(x,y)$ mit dem Definitionsbereich V und wenden auf diese die Transformationsfunktion $\phi : V \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$ an. Definieren wir V_x und ϕ_x wie im Satz, dann ist die Funktion $\phi_x : V_x \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{y}{x}$ ist wiederum für jedes x mit $V_x \neq \varnothing$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf ihr Bild, mit der Umkehrfunktion $\phi_x^{-1} : \phi_x(V_x) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto xy$. Wegen $(\phi_x^{-1})'(y) = x$, $f(x, \phi_x^{-1}(y)) = f(x,xy) = f(1,y)$ und $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}$ führt die Transformationsfunktion auf die modifizierte DGL mit getrennten Variablen

$$z' \quad = \quad \frac{f(1,z)}{x} + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\phi_x^{-1}(z)) \quad = \quad \frac{f(1,z)}{x} + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,xz) \quad = \quad \frac{f(1,z)}{x} - \frac{xz}{x^2} \quad = \quad \frac{f(1,z)-z}{x}.$$

Ist $\eta : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser DGL, dann ist durch $\varphi : J \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t)) = t\eta(t)$ eine Lösung der ursprünglichen DGL definiert.

2.4 Exakte Differenzialgleichungen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Lösbarkeit symmetrischer DGLs. Entscheidend ist dabei folgende Eigenschaft der einer solche DGL zu Grunde liegenden 1-Form.

Definition 2.8 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, dann bezeichnet man die 1-Form

$$df \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

als ***äußere Ableitung*** von f. Eine 1-Form ω auf U wird ***exakt*** genannt, wenn eine partiell differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $dg = \omega$ existiert. Die Funktion g bezeichnet man in diesem Fall als ***Stammfunktion*** von ω.

Differenzialgleichungen in symmetrischer Form, die durch eine exakte 1-Form definiert sind, lassen sich oft auf einfachere Weise lösen.

Satz 2.9 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ω eine stetige exakte 1-Form auf U und $F : U \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω. Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to U$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Kurve γ ist eine Lösung der DGL $\omega(x, y) = 0$.

(ii) Die Funktion $F \circ \gamma$ ist auf I konstant.

Beweis: „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Für alle $t \in I$ gilt

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\, dx(\gamma(t))(\gamma'(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\, dy(\gamma(t))(\gamma'(t)) \quad =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) e_1^*(\gamma'(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) e_2^*(\gamma'(t)) \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

Auf Grund der mehrdimensionale Kettenregel gilt

$$(F \circ \gamma)'(t) \quad = \quad F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad = \quad \left(\tfrac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) \quad \tfrac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))\right) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

Weil $F \circ \gamma$ nach Vorausetzung konstant ist, gilt jeweils $(F \circ \gamma)'(t) = 0$ und somit auch $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$. Also ist γ tatsächlich eine Lösung der DGL.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Wie die Rechnung im ersten Teil des Beweises zeigt, ist die Voraussetzung äquivalent zu $(F \circ \gamma)'(t) = 0$ für alle $t \in I$. Daraus folgt, dass $F \circ \gamma$ auf dem Intervall I konstant ist. □

Der dargestellte Sachverhalt lässt sich auch ohne den Begriff der Differenzialform formulieren.

Definition 2.10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man bezeichnet die Differenzialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' \quad = \quad 0$$

als ***exakt***, wenn eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ existiert, deren Gradient ∇F mit $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ übereinstimmt. Man bezeichnet F dann als ***Stammfunktion*** der DGL.

Es sei daran erinnert, dass der Gradient einer Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ die Funktion $\nabla F : U \to \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $(\nabla F)_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ für $1 \le k \le n$ ist. Nach Definition ist $F : U \to \mathbb{R}$ also genau dann eine Stammfunktion der DGL $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$, wenn $\partial_1 F = f$ und $\partial_2 F = g$ ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn F eine Stammfunktion der 1-Form $\omega = f\,dx + g\,dy$ ist.

Folgerung 2.11 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ eine exakte DGL und $F : U \to \mathbb{R}$ eine zugehörige Stammfunktion. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL.

(ii) Die Funktion $\tilde{\varphi} : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ ist konstant.

Beweis: Sei $\omega = f\,dx + g\,dy$, und sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$. Wie in § 1 gezeigt wurde, ist φ genau dann eine Lösung der angegebenen DGL, wenn γ eine Lösung der symmetrischen DGL $\omega(x,y) = 0$ ist, mit der 1-Form $\omega = f\,dx + g\,dy$. Wie oben angemerkt, ist die Funktion F zugleich eine Stammfunktion von ω. Nach Satz 2.9 ist γ genau dann eine Lösung der symmetrischen DGL, wenn $F \circ \gamma$ konstant ist. Wegen $F \circ \gamma = \tilde{\varphi}$ ist dies gleichbedeutend damit, dass $\tilde{\varphi}$ konstant ist. □

Wir zeigen anhand eines konkreten Beispiel, wie man die Lösungen einer exakten DGL bestimmt und betrachten dazu die Gleichung

$$(2xy + e^x) + x^2 y' \quad = \quad 0.$$

Diese DGL ist exakt, denn $F(x,y) = e^x + x^2 y$ ist eine Stammfunktion; es ist $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy + e^x$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^2$. Für jede Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der DGL auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ existiert nach Folgerung 2.11 eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$e^t + t^2 \varphi(t) \quad = \quad c \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt ist. Wenn wir nun beispielsweise eine Lösung φ durch den Punkt $(1,0)$ suchen, dann muss $c = e$ gewählt werden, denn es ist $\varphi(1) = 0$ und somit $c = e^1 + 1^2 \cdot 0 = e$. Durch Umformung der Gleichung $e^t + t^2\varphi(t) = e$ finden wir die Lösung

$$\varphi(t) \quad = \quad \frac{e - e^t}{t^2}.$$

Sie ist definiert auf dem offenen Intervall $I =]0, +\infty[$.

Zumindest die lokale Existenz von Lösungen wird durch folgendes Kriterium sichergestellt.

Satz 2.12 Seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$, die eine exakte Differenzialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)y' \quad = \quad 0 \qquad \text{definieren.}$$

Sei außerdem $(a,b) \in U$ ein Punkt mit $g(a,b) \neq 0$. Dann existiert eine auf einem offenen Intervall I definierte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ durch den Punkt (a,b), und dies ist auf dem Intervall I die einzige Lösung durch diesen Punkt.

Beweis: Sei $F : U \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der DGL, wobei wir (nach eventueller Änderung von F durch eine Konstante) $F(a,b) = 0$ annehmen dürfen. Es gilt dann $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = g(a,b) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen aus der Analysis mehrerer Variablen gibt es offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$, $b \in J$, $I \times J \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Eigenschaft, dass für alle $(x,y) \in I \times J$ die Äquivalenz

$$F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt dann also $F(t, \varphi(t)) = 0$ für alle $t \in I$, und dies ist nach Folgerung 2.11 äquivalent dazu, dass φ eine Lösung der DGL darstellt. Wegen $F(a,b) = 0$ gilt insbesondere $\varphi(a) = b$.

Nehmen wir nun an, dass $\psi : I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung der DGL durch diesen Punkt ist. Dann nimmt die Funktion $t \mapsto F(t, \psi(t))$ auf dem Intervall I einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an, wiederum auf Grund von Folgerung 2.11. Dabei ist $c = F(a, \psi(a)) = F(a,b) = 0$. Somit gilt $F(t, \psi(t)) = 0$ für alle $t \in I$. Weil $I \times J$ offen und $t \mapsto (t, \psi(t))$ stetig ist, und weil $(a, \psi(a)) = (a,b)$ in $I \times J$ liegt, gibt es ein offenes Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $(t, \psi(t)) \in I' \times J$ für alle $t \in I'$. Die Äquivalenz $F(x,y) \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ ist erst recht für alle $(x,y) \in I' \times J$ gültig. Aus $F(t, \psi(t)) = 0$ für alle $t \in I'$ folgt somit $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I'$.

Um zu zeigen, dass diese Gleichung sogar für alle $t \in I$ erfüllt ist, setzen wir $t_1 = \sup\{t \in I \mid \psi|_{[a,t]} = \varphi_{[a,t]}\}$. Nehmen wir an, dass t_1 nicht mit dem rechten Randpunkt von I übereinstimmt. Wegen der Stetigkeit von φ und ψ muss $\varphi(t_1) = \psi(t_1) \in J$ gelten, und weil J offen ist, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\psi(t) \in J$ für alle $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon[$. Dann zeigt aber dasselbe Argument wie oben, dass $\varphi(t) = \psi(t)$ auch noch für alle $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon[$ erfüllt ist, im Widerspruch zur Definition von t_1. Genauso zeigt man, dass $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle t links von a erfüllt ist. □

Die vorhergenden Sätze zeigen, dass es eine wichtige Aufgabe ist, die Exaktheit einer 1-Form zu überprüfen. Um hierfür ein geeignetes Kriterium zu formulieren, wiederholen wir einen wichtigen Grundbegriff aus der Topologie. Sei X ein topologischer Raum, und seien $\gamma, \delta : [a,b] \to X$ stetige Funktionen, definiert auf einem kompakten Intervall $[a,b]$. Eine ***Homotopie*** zwischen γ und δ ist eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to X$ mit $H(s,0) = \gamma(s)$ und $H(s,1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a,b]$. Gilt zusätzlich $H(a,t) = \gamma(a) = \delta(a)$ und $H(b,t) = \gamma(b) = \delta(b)$ für alle $t \in [0,1]$, dann spricht man von einer Homotopie relativ zu den Endpunkten.

Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to X$, also eine Kurve mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, wird ***nullhomotop*** oder ***zusammenziehbar*** genannt, wenn eine Homotopie zwischen γ und der konstanten Abbildung $c : [a,b] \to X$, $t \mapsto \gamma(a)$ relativ zu den Endpunkte existiert. Der topologische Raum X wird als ***einfach zusammenhängend*** bezeichnet, wenn er zusammenhängend und jede geschlossene Kurve in X nullhomotop ist. Es ist zum Beispiel leicht zu zeigen, dass sternförmige und insbesondere konvexe Gebiete im $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend sind.

Satz 2.13 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und ω eine 1-Form auf U, $\omega = f\,dx + g\,dy$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$. Ist ω exakt, dann gilt $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ auf ganz U. Ist U einfach zusammenhängend, dann gilt auch die Umkehrung.

Beweis: Setzen wir voraus, dass ω exakt und F eine Stammfunktion von ω ist. Dann gilt $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = g$. Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Die zweifach partiellen Ableitungen von F sind auf Grund unserer Voraussetzungen also stetig. Nach dem Satz von Schwarz aus der Analysis mehrerer Variablen stimmen sie also überein. Daraus folgt $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Einen elementaren Beweis der Umkehrung für sternförmige Gebiete findet man zum Beispiel bei [Heu08] im Abschnitt 182 (wo er nicht für 1-Formen, sondern für Vektorfelder formuliert ist, was aber auf dasselbe hinausläuft). Die Voraussetzung an die Funktionen f und g ist gleichbedeutend mit der Feststellung, dass es sich bei ω um eine ***geschlossene*** 1-Form handelt. Die Aussage für einfach zusammenhängende Teilmengen ist somit ein Spezialfall des Poincaré-Lemmas, welches besagt, dass jede geschlossene 1-Form auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ exakt ist. Der Beweis dieses Lemmas erfordert einige Hilfsmittel aus der Algebraischen Topologie, die wir hier aus Zeitgründen nicht bereitstellen können, die aber in jedem einschlägigen Lehrbuch zu finden sind.

Deshalb soll hier nur die grobe Beweisskizze angegeben werden. Die Aussage ist äquivalent zu der Feststellung, dass die erste de Rham-Kohomologie $H^1_{\mathrm{dR}}(U)$, also der Faktorraum der geschlossenen modulo der exakten 1-Formen, gleich null ist. Nun ist sogar für jede beliebige orientierbare Mannigfaltigkeit M, erst recht also für Gebiete im $\mathbb{R}^n$, bekannt, dass $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ kanonisch isomorph zum Dualraum von $H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M) \otimes \mathbb{R}$, der ersten reellen singulären Homologie von M, ist. Es genügt also zu zeigen, dass die erste singuläre Homologiegruppe $H_1(U)$ von U verschwindet. Dass das Gebiet U einfach zusammenhängend ist, ist gleichbedeutend mit der Trivialität $\pi_1(U)$ der ersten Fundamentalgruppe. Als Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist U wegzusammenhängend, und für jeden wegzusammenhängenden topologischen Raum X ist die singuläre Kohomologie $H_1(X)$ kanonisch isomorph zu $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$, der maximalen abelschen Faktorgruppe der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$. Es ist also tatsächlich $H_1(U) = \{0\}$. □

Ist ω wie im Satz angegeben und existiert eine Stammfunktion F auf U, dann kann diese zumindest lokal durch folgendes Verfahren ermittelt werden: Zunächst wählt man einen beliebigen Punkt $(a, b) \in U$ und offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und $b \in J$. O.B.d.A. dürfen wir $F(a, b) = 0$ annehmen; ansonsten ändern wir F durch eine Konstante ab. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt für alle $x \in I$ dann

$$F(x, b) \quad = \quad \int_a^x \frac{\partial F}{\partial x}(t, b)\,dt \quad = \quad \int_a^x f(t, b)\,dt.$$

Ebenso erhalten wir für beliebige $y \in J$ dann

$$F(x, y) \quad = \quad F(x, b) + \int_b^y \frac{\partial F}{\partial y}(x, t)\,dt \quad = \quad F(x, b) + \int_b^y g(x, t)\,dt.$$

Natürlich kann auch in umgekehrter Reihenfolge vorgegangen werden, d.h. man berechnet zuerst $F(a, y)$ für alle $y \in J$ und dann $F(x, y)$ für alle $(x, y) \in I \times J$.

Als Beispiel betrachten wir auf dem $\mathbb{R}^2$ die 1-Form

$$\omega \quad = \quad (y^2e^{xy} + 3x^2y)\,dx + (x^3 + (1+xy)e^{xy})\,dy.$$

Setzen wir $f(x,y) = y^2e^{xy} + 3x^2y$ und $g(x,y) = x^3 + (1+xy)e^{xy}$, dann gilt also $\omega = f\,dx + g\,dy$. Die Übereinstimmung der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad (xy^2 + 2y)e^{xy} + 3x^2 \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

zeigt nach Satz 2.13, dass ω exakt ist. Wir berechnen die eindeutig bestimmte Stammfunktion F von ω mit $F(0,0) = 0$. Wir erhalten zunächst $F(x,0) = \int_0^x f(t,0)\,dt = \int_0^x 0\,dt = 0$ und dann im Fall $x \neq 0$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} F(x,y) \quad &= \quad \int_0^y g(x,t)\,dt \quad = \quad \int_0^y (x^3 + (1+xt)e^{xt})\,dt \quad = \quad x^3y + \int_0^y e^{xt}\,dt + x\int_0^y te^{xt}\,dt \\ &= \quad x^3y + \frac{e^{xy}-1}{x} + \frac{(xy-1)e^{xy}+1}{x} \quad = \quad x^3y + \frac{e^{xy}-1+xye^{xy}-e^{xy}+1}{x} \quad = \quad x^3y + ye^{xy}. \end{aligned}$$

Man überprüft nun unmittelbar, dass $F(x,y) = x^3y + ye^{xy}$ auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$ eine Stammfunktion von ω ist.

Leider sind die meisten 1-Formen nicht exakt. Häufig kann eine 1-Form aber durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion zu einer exakten 1-Form gemacht werden.

Definition 2.14 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\omega = f\,dx + g\,dy$ eine 1-Form auf U, mit stetigen Funktionen f und g. Eine stetige Funktion $m : U \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ wird ***integrierender Faktor*** für ω genannt, wenn $m\omega$ eine exakte 1-Form ist.

Für die Lösung einer durch ω definierten symmetrischen DGL kann auch die 1-Form $m\omega$ genutzt werden, denn offenbar ist jede Kurve γ genau dann eine Lösung von $\omega(x,y) = 0$, wenn sie eine Lösung von $m(x,y)\omega(x,y) = 0$ ist. Aus Satz 2.13 folgt, dass eine Funktion $m : U \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ genau dann ein integrierender Faktor ist, wenn $\frac{\partial(mf)}{\partial y} = \frac{\partial(mg)}{\partial x}$ erfüllt ist. Auf Grund der Produktregel ist dies genau dann der Fall, wenn auf U die Gleichung

$$f(x,y)\frac{\partial m}{\partial y}(x,y) + m(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad g(x,y)\frac{\partial m}{\partial x}(x,y) + m(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

gilt. Die Lösung dieser partiellen Differenzialgleichung ist aber im Allgemeinen keine leichte Aufgabe. Man kann aber versuchen, einen integrierenden Faktor $m(x)$ zu finden, der nur von x (oder auch nur von y) abhängt. In diesem vereinfacht sich die zu lösende Gleichung zu

$$m(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad g(x,y)m'(x) + m(x)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

was umgestellt werden kann zu

$$\frac{1}{g(x,y)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) \quad = \quad \frac{m'(x)}{m(x)} \quad = \quad (\ln \circ m)'(x).$$

Als Beispiel betrachten wir die 1-Form

$$\omega \quad = \quad (2x^2 + 2xy^2 + 1)y\,dx + (3y^2 + x)\,dy.$$

Diese ist nicht exakt. Setzen wir aber $f(x,y) = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y$ und $g(x,y) = 3y^2 + x$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x,y)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) &= \frac{1}{3y^2+x}\left((4xy^2 + 2x^2 + 2xy^2 + 1) - 1\right) \\ &= \frac{1}{3y^2+x}\left(6xy^2 + 2x^2\right) = 2x. \end{aligned}$$

Ist $m(x)$ ein integrierender Faktor, dann gilt also $(\ln \circ m)'(x) = 2x$. Dies ist erfüllt, wenn $\ln(m(x)) = x^2$ und $m(x) = e^{x^2}$ gilt. Tatsächlich überprüft man leicht, dass $e^{x^2}\omega$ eine exakte 1-Form ist, mit $F(x,y) = (x + y^2)ye^{x^2}$ als Stammfunktion. Eine Kurve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ ist also genau dann eine Lösung von $\omega(x,y) = 0$, wenn die Funktion

$$t \quad \mapsto \quad (\gamma_1(t) + \gamma_2(t)^2)\gamma_2(t)e^{\gamma_1(t)^2} \qquad \text{konstant ist.}$$

§ 3. *Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf*

Zusammenfassung. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Begriff der Differenzialgleichung, in dem wir nun nicht mehr nur einzelne DGLs erster Ordnung, sondern Systeme von DGLs beliebiger Ordnung, mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, betrachten. Wir zeigen, dass die Lösung eines Systems k-ter Ordnung immer auf ein System erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Ebenso verallgemeinern wir den Begriff der Lipschitz-Bedingung und beweisen die Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen unter dieser Bedingung. Wichtiges Hilfsmittel dabei wird der Banachsche Fixpunktsatz sein. Systeme mit linear beschränkter rechter Seite haben den Vorteil, dass die Existenz von Lösungen auf Intervallen einer bestimmten Länge garantiert werden kann. Zum Schluss untersuchen wir noch das Verhalten von Lösungen an den Rändern des Definitionsbereichs.

Wichtige Grundbegriffe

- $\mathbb{K}$-wertiges System von DGLs k-ter Ordnung
- Anfangswertprobleme und ihre Lösungen, maximale Lösung
- globale und lokale Lipschitz-Bedingung, Lipschitz-Konstante
- Kontraktion auf einem metrischen Raum
- Picard-Iteration
- linear beschränkte rechte Seite einer DGL

Zentrale Sätze

- Umformung eines $\mathbb{K}$-wertigen Systems von DGLs k-ter Ordnung bestehend aus n Gleichungen in ein System erster Ordnung bestehend aus nk Gleichungen
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, lokale und globale Version
- Satz über das Randverhalten von Lösungen
- Existenz von Lösungen bei linear beschränkter rechter Seite

Im weiteren Verlauf der Vorlesung, besonders im Hinblick auf die linearen Systeme von DGLs, wird es sich als sinnvoll erweisen, auch DGLs zu betrachten, die durch $\mathbb{C}$-wertige Funktionen definiert sind und entsprechend auch $\mathbb{C}$-wertige Lösungen besitzen. Im gesamten weiteren Skript bezeichnet $\mathbb{K}$ stets einen der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 3.1 Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{nk}$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \to \mathbb{K}^n$ eine Funktion. Dann bezeichen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(k)} \quad = \quad f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$$

als (explizites) $\mathbb{K}$***-wertiges System von*** n ***Differenzialgleichungen*** der Ordnung k. Dabei wird U wie in § 1 der ***Definitionsbereich*** des Systems genannt.

In der gesamten Theorie geht es in erster Linie um die Existenz, die Eindeutigkeit, die rechnerische Bestimmung und die qualitative Untersuchung von Lösungen durch einen vorgegebenen Punkt des Definitionsbereichs.

Definition 3.2 Ein ***Anfangswertproblem*** besteht aus der Angabe eines $\mathbb{K}$-wertigen Systems von n Differenzialgleichung wie in Definition 3.1 und eines Punktes $(a,b) \in U$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{K}^{kn}$. Eine ***Lösung*** dieses Anfangswertproblems ist eine (mindestens) k-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$, definiert auf einem offenen Intervall I, mit $a \in I$, $(\varphi(a), \varphi'(a), ..., \varphi^{(k-1)}(a)) = b$ und der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t)) \in U \quad \text{und} \quad \varphi_j^{(k)}(t) = f_j(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$$

für $1 \leq j \leq n$ und alle $t \in I$ erfüllt ist. Eine solche Lösung wird als ***maximal*** bezeichnet, wenn keine Lösung $\psi : J \to \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.

Als Lösung eines $\mathbb{K}$-wertigen Systems $y^{(k)} = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ von n Differenzialgleichungen bezeichnen wir die Lösung eines Anfangswertproblems, dass durch das System und einen beliebig gewählen Punkt $(a,b) \in U$ im Definitionsbereich definiert ist. Wie bei den DGLs erster Ordung kann jeder Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine im Definitionsbereich D verlaufende ***Lösungskurve*** $\tilde{\varphi} : I \to D$, $t \mapsto (t, \varphi(t))$ zugeordnet werden.

Jedem System von n Differenzialgleichungen k-ter Ordnung wie oben kann auf folgende Weise ein System $y' = g(x,y)$ von kn Differenzialgleichungen zugeordnet werden: Aus Gründen der Übersichtlichkeit numerieren wir die Komponenten der Vektoren $v \in \mathbb{K}^{kn}$ nicht wie üblich mit $v_1, v_2, ..., v_{kn}$, sondern mit $v_{i,j}$ mit $0 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq n$. Man definiert nun eine Funktion $g : D \to \mathbb{K}^{kn}$ durch

$$\begin{aligned} g_{i,j}(x,y) &= y_{i+1,j} \quad \text{für } 0 \leq i \leq k-2,\ 1 \leq j \leq n \\ g_{k-1,j}(x,y) &= f_j(x,y) \quad \text{für } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Das System $y' = g(x,y)$ besteht dann in ausgeschriebener Form aus n Sätzen von Gleichungen, die für $1 \leq j \leq n$ gegeben sind durch

$$y'_{0,j} = y_{1,j},\ y'_{1,j} = y_{2,j},\ ...,\ y'_{k-2,j} = y_{k-1,j} \text{ und } y'_{k-1,j} = f_j(x, y_{0,j}, ..., y_{k-2,j}).$$

Es besteht nun eine natürliche bijektive Zuordnung zwischen den Lösungen dieser Systeme.

Satz 3.3 Sei $y^{(k)} = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ ein n-elementiges System von DGLs k-ter Ordnung der oben angegebenen Form und $y' = g(x,y)$ das zugeordnente kn-elementige System.

(i) Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des n-elementigen Systems, dann ist die Abbildung $\psi : I \to \mathbb{K}^{kn}$ gegeben durch $\psi(t) = (\varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$ für $t \in I$, in ausgeschriebener Form $\psi_{i,j}(t) = \varphi_j^{(i)}(t)$ $0 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq n$, eine Lösung des kn-elementigen Systems.

(ii) Ist umgekehrt $\psi : I \to \mathbb{K}^{kn}$ eine Lösung des nk-elementigen Systems, dann ist durch $\varphi_j(t) = \psi_{0,j}(t)$ für $1 \leq j \leq n$ eine Lösung des n-elementigen Systems gegeben.

Beweis: zu (i) Sei $t \in I$, und seien $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le i \le k-1$ und $1 \le j \le n$. Zu zeigen ist $\psi'_{i,j}(t) = g_{i,j}(t, \psi(t))$. Im Fall $i \le k-2$ ist $g_{i,j}(x,y) = y_{i+1,j}$, $\psi_{i,j}(t) = \varphi_j^{(i)}(t)$ und $\psi_{i+1,j}(t) = \varphi_j^{(i+1)}(t)$. Daraus folgt

$$\psi'_{i,j}(t) \quad = \quad (\varphi_j^{(i)})'(t) \quad = \quad \varphi_j^{(i+1)}(t) \quad = \quad \psi_{i+1,j}(t) \quad = \quad g_{i,j}(t, \psi(t)).$$

Im Fall $i = k-1$ dagegen ist $g_{k-1,j}(x,y) = f_j(x,y)$ und $\psi_{k-1,j}(t) = \varphi_j^{(k-1)}(t)$. Weil φ eine Lösung von $y^{(k)} = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ ist, erhalten wir

$$\psi'_{k-1,j}(t) \quad = \quad (\varphi_j^{(k-1)})'(t) \quad = \quad \varphi_j^{(k)}(t) \quad = \quad f_j(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t)) \quad = \quad g_{k-1,j}(t, \psi(t)).$$

zu (ii) Sei $t \in I$ und $j \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \le j \le n$. Zu zeigen ist $\varphi_j^{(k)}(t) = f_j(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$, was nach Definition von φ äquivalent ist zu $\psi_{0,j}^{(k)}(t) = f_j(t, \psi(t))$. Weil ψ eine Lösung von $y' = g(x,y)$ ist, und weil für $0 \le i \le k-2$ jeweils $y_{i+1,j} = g_{i,j}(x,y)$ gilt, erhalten wir für $0 \le i \le k-2$ jeweils $\psi'_{i,j}(t) = g_{i,j}(t, \psi(t)) = \psi_{i+1,j}(t)$, insgesamt also $\psi_{0,j}^{(k-1)}(t) = \psi_{k-1,j}(t)$. Wegen $g_{k-1,j}(x,y) = f_j(x,y)$ ist außerdem

$$\psi'_{k-1,j}(t) \quad = \quad g_{k-1,j}(t, \psi(t)) \quad = \quad f_j(t, \psi(t)).$$

Insgesamt erhalten wir also $\psi_{0,j}^{(k)}(t) = (\psi_{0,j}^{(k-1)})'(t) = \psi'_{k-1,j}(t) = f_j(t, \psi(t))$, wie gewünscht. □

Als konkretes Beispiel betrachten wir das System bestehend aus den Gleichungen $y_1'' = y_2$, $y_2'' = y_1$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$. In kompakter Form hat das System die Darstellung $y'' = f(x, y, y')$ mit der Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y_{0,1}, y_{0,2}, y_{1,1}, y_{1,2}) \mapsto (y_{0,2}, y_{0,1})$. Das zugeordnete System erster Ordnung hat die Form $y' = g(x,y)$ mit der Funktion

$$g(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} g_{0,1}(x,y) \\ g_{0,2}(x,y) \\ g_{1,1}(x,y) \\ g_{1,2}(x,y) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} \\ f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} \\ y_{0,2} \\ y_{0,1} \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi(t) = (\sin(t), -\sin(t))$ ist eine Lösung des Systems $y'' = f(x,y)$, denn es gilt

$$\varphi_1''(t) = \sin''(t) = -\sin(t) = \varphi_2(t) \quad \text{und} \quad \varphi_2''(t) = -\sin''(t) = \sin(t) = \varphi_1(t).$$

Definieren wir $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ durch $\psi_{0,1}(t) = \varphi_1(t) = \sin(t)$, $\psi_{1,1}(t) = \varphi_1'(t) = \cos(t)$, $\psi_{0,2}(t) = \varphi_2(t) = -\sin(t)$ und $\psi_{1,2} = \varphi_2'(t) = -\cos(t)$, dann ist dies eine Lösung des Systems $y = g(x,y)$, denn es gilt

$$\psi'(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \psi'_{0,1}(t) \\ \psi'_{0,2}(t) \\ \psi'_{1,1}(t) \\ \psi'_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin'(t) \\ -\sin'(t) \\ \cos'(t) \\ -\cos'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{1,1}(t) \\ \psi_{1,2}(t) \\ \psi_{0,2}(t) \\ \psi_{0,1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{0,1}(t, \psi(t)) \\ g_{0,2}(t, \psi(t)) \\ g_{1,1}(t, \psi(t)) \\ g_{1,2}(t, \psi(t)) \end{pmatrix} = g(t, \psi(t))$$

Auf Grund von Satz 3.3 werden wir uns im weiteren Verlauf dieses Kapitels auf die Untersuchung von Systemen erster Ordnung beschränken. Unser Hauptziel besteht darin, ein hinreichendes Kriterium für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen herzuleiten.

Dazu verallgemeinern wir als erstes die Definition der Lipschitz-Bedingung aus § 1. Vorweg erinnern wir an den Begriff des ***Banachraums*** aus der Analysis mehrerer Variablen. Dabei handelt es sich um einen normierten Vektorraum

$(V, \|\cdot\|)$, der bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist, d.h. jede Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|$ ist konvergent, besitzt also einen Grenzwert. In dieser Vorlesung wurde auch gezeigt, dass jeder endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer beliebig gewählten Norm auf V ein Banachraum ist. Beispielsweise ist $\mathbb{K}^n$ mit der durch $\|(x_1,...,x_n)\| = \max\{|x_1|,...,|x_n|\}$ ein Banachraum, wobei $|\cdot|$ den reellen oder komplexen Absolutbetrag bezeichnet, je nachdem, ob $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist (wobei wir $\mathbb{C}^n$ als $2n$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachten).

Definition 3.4 Seien V, W Banachräume, $m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m \times V$ und $f : D \to W$ eine Funktion. Wir sagen, die Funktion f genügt

(i) einer ***Lipschitz-Bedingung***, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|f(x,y) - f(x,y')\| \leq L\|y - y'\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ und $y, y' \in V$ mit $(x,y),(x,y') \in D$ erfüllt ist und

(ii) einer ***lokalen*** Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x,y) \in D$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^m \times V$ existiert, so dass $f|_{D\cap U}$ eine Lipschitz-Bedingung genügt.

Auch hier wird eine Zahl L mit der unter (i) beschriebenen Eigenschaft als ***Lipschitz-Konstante*** bezeichnet. Eine Funktion mit der Eigenschaft (i) wird auch eine bezüglich der y-Komponente ***Lipschitz-stetige***, eine Funktion mit der Eigenschaft (ii) eine bezüglich der y-Komponente lokal Lipschitz-stetige Funktion genannt.

Im Hinblick auf konkrete Beispiele ist es günstig, ein leicht zu überprüfendes, hinreichendes Kriterium für die Lipschitz-Stetigkeit zur Verfügung zu haben. Hierfür benötigen wir ein weiteres Hilfsmittel aus der Analysis mehrerer Variablen, den Mittelwertsatz für Richtungsableitungen. Wir erinnern kurz an dessen Formulierung: Sei U eine offene Teilmenge eines endlich-dimensionalen, normierten $\mathbb{R}$-Vektorraums V und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es seien $p, q \in U$ zwei Punkte mit der Eigenschaft, dass die Verbinungsstrecke $[p,q]$ zwischen p und q in U enthalten ist und dass für den Vektor $v = q - p \in V$ auf ganz U die Richtungsableitung $\partial_v f$ von f bezüglich v existiert. Dann existiert ein Punkt $r \in]p,q[$ mit $\partial_v f(r) = f(q) - f(p)$.

Proposition 3.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{K}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{K}^n$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ eine stetige Funktion mit stetiger (reeller) Ableitung bezüglich der y-Komponente. Dann genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

Beweis: Da wir bezüglich der y-Komponente nur reelle stetige Differenzierbarkeit (und nicht etwa komplexe Differenzierbarkeit, also Holomorphie) vorausgesetzt haben, dürfen wir gegebenenfalls $\mathbb{C}^n$ mit dem $\mathbb{R}^{2n}$ identifizieren und uns beim Beweis auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ definieren wir auf der offenen Teilmenge $D_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in D\}$ von $\mathbb{K}^n$ jeweils eine Funktion $f_x : D_x \to \mathbb{R}^n$ durch $f_x(y) = f(x,y)$. Aus den Voraussetzungen folgt, dass die partiellen Ableitungen $\partial_j (f_x)_i$ der Komponentenfunktionen $(f_x)_1, ..., (f_x)_n$ jeweils auf ganz D_x existieren, und dass die Funktionen $(x,y) \mapsto \partial_j (f_x)_i(y)$ auf ganz D stetig sind, für $1 \leq i, j \leq n$.

Sei nun $(a,b) \in D$ vorgegeben und $U \subseteq D$ eine kompakte, konvexe Umgebung von (a,b). Dann gibt es auf Grund der Stetigkeit und des Maximumsprinzips eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|\partial_j (f_x)_i(y)| \leq c$ für alle $(x,y) \in U$ und $1 \leq i, j \leq n$. Seien nun $(x,y),(x,y') \in U$ vorgegeben, mit $x \in \mathbb{R}^m$ und $y, y' \in \mathbb{R}^n$, und sei $v = y' - y$. Auf Grund des Mittelwertsatzes für Richtungsableitung existiert für $1 \leq i \leq n$ jeweils ein Punkt $p_i \in]y', y[$ mit $\partial_v (f_x)_i(p_i) = (f_x)_i(y') - (f_x)_i(y)$. Wie aus der Analysis mehrerer Variablen bekannt ist, hängt die Richtungsableitung $\partial_v (f_x)_i$ mit den

partiellen Ableitungen $\partial_j(f_x)_i$ durch die Gleichung $\partial_v(f_x)_i = \sum_{j=1}^n v_j \partial_j(f_x)_i$ zusammen. Für die Differenz $f(x,y) - f(x,y')$ unter der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem $\mathbb{R}^n$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\|f(x,y)-f(x,y')\|_\infty &= \max\{|(f_x)_i(y)-(f_x)_i(y')| \mid 1 \le i \le n\} = \max\{|\partial_v(f_x)_i(p_i)| \mid 1 \le i \le n\} \\ &\le \sum_{j=1}^n |v_j| \max\{|\partial_j(f_x)_i(p_i)| \mid 1 \le i \le n\} \le \sum_{j=1}^n |v_j| c = c\|v\|_\infty = c\|y-y'\|.\end{aligned}$$

Da auf dem $\mathbb{R}^n$ je zwei Normen äquivalent sind, folgt daraus die Existenz einer Konstanten $L \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass $\|f(x,y)-f(x,y')\| \le L\|y-y'\|$ für alle $(x,y),(x,y') \in U$ erfüllt ist, wobei $\|\cdot\|$ die vorgegebene Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. □

Um die weitere Darstellung zu vereinfachen, führen wir die folgende Notation ein: Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige, vektorwertige Funktion, dann setzen wir

$$\int_a^b g(x)\,dx = \left(\int_a^b g_1(x)\,dx, ..., \int_a^b g_n(x)\,dx\right),$$

wobei $g_1, .., g_n$ die Komponentenfunktionen von g bezeichnen.

Satz 3.6 *(Eindeutigkeitssatz)*
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $(a,b) \in D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Sind $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ beides Lösungen des durch $y' = f(x,y)$ und (a,b) definierten Anfangswertproblems auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, dann stimmen sie auf ganz I überein. Desweiteren besitzt das Anfangswertproblem höchstens eine maximale Lösung.

Beweis: Auch bei diesem Beweis können wir uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken, indem wir gegebenenfalls den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem $\mathbb{R}^{2n}$ identifizieren. Zunächst zeigen wir, dass zumindest ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varphi|_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[} = \psi|_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$ existiert. Nach Voraussetzung gilt $\varphi(a) = b = \psi(a)$. Durch komponentenweise Integration der Gleichungen $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ und $\psi'(t) = f(t,\psi(t))$ erhalten wir für alle $t \in I$ mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung die Gleichung

$$\varphi(t)-\psi(t) = \int_a^t (f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s)))\,ds.$$

Auf Grund der lokalen Lipschitz-Bedingung und der Stetigkeit der beiden Funktionen φ und ψ auf I gibt es $L, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))\|_\infty \le L\|\varphi(t)-\psi(t)\|_\infty$ für alle $t \in I$ mit $|t-a| \le \varepsilon_1$. Sei nun $\varepsilon \in]0,\varepsilon_1]$ und $t \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Dann gilt auf Grund der Vorbemerkung von oben

$$\begin{aligned}|\varphi_k(t)-\psi_k(t)| &\le \int_a^t |f_k(s,\varphi(s)-f_k(s,\psi(s))|\,ds \le \int_a^t \|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))\|_\infty\,ds \\ &\le L\int_a^t \|\varphi(s)-\psi(s)\|_\infty\,ds\end{aligned}$$

für $1 \le k \le n$, und somit $\|\varphi(t)-\psi(t)\|_\infty \le L\int_a^t \|\varphi(s)-\psi(s)\|_\infty\,ds$. Setzen wir $m(\varepsilon) = \sup\{\|\varphi(t)-\psi(t)\|_\infty \mid |t-a| \le \varepsilon\}$, dann erhalten wir für $|t-a| \le \varepsilon$ die Abschätzung $\|\varphi(t)-\psi(t)\|_\infty \le L|t-a|m(\varepsilon) \le L\varepsilon m(\varepsilon)$. Bilden wir

auf der linken Seite das Maximum über alle $t \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, dann folgt $m(\varepsilon) \leq L\varepsilon m(\varepsilon)$. Sei nun $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$ so klein gewählt, dass $L\varepsilon < 1$ ist. Dann muss $m(\varepsilon) = 0$ gelten. Wir erhalten $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle t mit $|t-a| \leq \varepsilon$.

Damit ist die lokale Eindeutigkeit bewiesen. Nun zeigen wir, dass sich die Eindeutigkeit der Lösung im Rahmen des Definitionsbereichs beliebig weit nach rechts fortsetzen lässt, dass also $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq a$ gilt. Dazu definieren wir

$$a_1 \quad = \quad \sup \{t \in I \mid \varphi|_{[a,t]} = \psi|_{[a,t]}\}.$$

Ist $a_1 = +\infty$ oder das rechte Intervallende von I, dann sind wir fertig. Ansonsten gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $[a_1, a_1+\delta] \subseteq I$, und es gilt $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle t mit $a \leq t < a_1$. Weil φ und ψ stetig sind, gilt auch $\varphi(a_1) = \psi(a_1)$. Wenden wir nun die im ersten Teil bewiesene Aussage auf den Anfangspunkt a_1 an, so erhalten wir ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $|t-a_1| < \varepsilon$, im Widerspruch zur Definition von a_1. Also muss $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq a$ gelten. Genauso beweist man, dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \leq a$ erfüllt ist.

Daraus ergibt sich nun auch direkt die Eindeutigkeit der maximalen Lösungen. Nehmen wir nämlich an, dass es sich bei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ um zwei maximale Lösungen handelt, wobei $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle bezeichnen, die a enthalten. Sei $c = \sup I$ und $d = \sup J$ (wobei auch $+\infty$ als Wert möglich ist). Nehmen wir nun an, es ist $c < d$. Auf Grund des bereits Gezeigten stimmen φ und ψ auf $[a, c[$ überein. Die Lösung φ kann also durch ψ auf $I \cup [c, d[$ fortgesetzt werden, im Widerspruch zur Maximalität. Genauso ist der Fall $c > d$ ausgeschlossen, und ebenso zeigt man, dass die linken Intervallgrenzen $\inf I$ und $\inf J$ übereinstimmen. □

Nach der Eindeutigkeit beschäftigen wir uns nun mit der *Existenz* von Lösungen einer DGL. Das wesentliche Hilfsmittel hierbei ist der (ebenfalls aus der Analysis mehrerer Variablen kannte) ***Banachsche Fixpunktsatz***: Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\phi : X \to X$ eine Kontraktion, dann besitzt ϕ in X einen eindeutig bestimmten Fixpunkt, also ein $a \in X$ mit $\phi(a) = a$. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung ϕ als ***Kontraktion*** bezeichnet wird, wenn es eine Konstante $\gamma \in [0, 1[$ gibt, so dass

$$d(\phi(x), \phi(y)) \quad \leq \quad \gamma d(x, y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X \quad \text{erfüllt ist.}$$

Die Konstante γ wird in diesem Zusammenhang auch als ***Kontraktionskonstante*** bezeichnet.

> **Lemma 3.7** Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall, und sei V ein Banachraum. Sei außerdem $\mathcal{C}(I, V)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $f : I \to V$. Dann ist $\mathcal{C}(I, V)$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in I\}$ ein Banachraum.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass durch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{C}(I, V)$ gegeben ist. Sei dazu $f \in \mathcal{C}(I, V)$ vorgegeben. Ist f die Nullfunktion, dann gilt $\|f(x)\| = 0_V$ für alle $x \in I$, und es folgt $\|f\|_\infty = 0$. Setzen wir umgekehrt $\|f\|_\infty = 0$ voraus, dann folgt $\|f(x)\| = 0$ und auf Grund der Normeigenschaft von $\|\cdot\|$ auch $f(x) = 0_V$ für alle $x \in I$. Also ist in diesem Fall f der Nullvektor in $\mathcal{C}(I, V)$.

Ist $f \in \mathcal{C}(I, V)$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in I$ die Abschätzung $\|\lambda f(x)\| = |\lambda| \|f(x)\| \leq |\lambda| \|f\|_\infty$ und somit auch $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$. Setzen wir $g = \lambda f$, dann erhalten wir ebenso

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \|\tfrac{1}{\lambda} g\|_\infty \quad \leq \quad |\tfrac{1}{\lambda}| \|g\|_\infty \quad = \quad \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty \quad ,$$

also $|\lambda| \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$ und insgesamt Gleichheit. Für $\lambda = 0$ ist die Gleichung $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ offenbar ebenfalls erfüllt. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $f, g \in \mathcal{C}(I, V)$ vorgegeben. Für alle $x \in I$ gilt die Abschätzung

$\|(f+g)(x)\| = \|f(x)+g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, also auch $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Damit sind die Normeigenschaften nachgewiesen.

Sei nun $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}(I,V)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $k,m \geq K$ erfüllt ist. Es folgt $\|f_k(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k,m \geq K$, d.h. die Folge $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ ist für jedes $x \in I$ eine Cauchyfolge in V. Da es sich bei V um einen Banachraum handelt, konvergiert die Folge $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ gegen einen Vektor $f(x) \in V$. Zu zeigen ist, dass die auf diese Weise definierte Funktion $f : I \to V$ stetig und ein Grenzwert der Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(I,V)$ ist.

Wir beweisen die Stetigkeit von f mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums. Seien $c \in I$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_m\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $k,m \geq K$. Auf Grund der Stetigkeit der Normfunktion auf V gilt

$$\|f_K(x) - f(x)\| \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \|f_K(x) - f_m(x)\| \quad \leq \quad \lim_{m\to\infty} \|f_K - f_m\|_\infty \quad \leq \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

für alle $x \in I$. Weil die Funktion f_K im Punkt c stetig ist, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f_K(x) - f_K(c)\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x-c| < \delta$. Es folgt

$$\|f(x) - f(c)\| \quad \leq \quad \|f(x) - f_K(x)\| + \|f_K(x) - f_K(c)\| + \|f_K(c) - f(c)\| \quad < \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon$$

für alle $x \in I$ mit $|x-c| < \delta$. Damit ist die Stetigkeit von f bewiesen. Wir wenden nun die Cauchyfolgen-Eigenschaft noch einmal an, um zu zeigen, dass f der Grenzwert der Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(I,V)$ ist. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_m\| < \varepsilon$ für alle $k,m \geq K$, also $\|f_k(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k,m \geq K$. Durch Grenzübergang $m \to \infty$ erhalten wir $\|f_k(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k \geq K$, also $\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für $k \geq K$. Also ist f tatsächlich der Grenzwert der Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}(I,V)$. □

Lemma 3.8 Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall, V ein Banachraum und $\bar{B} \subseteq V$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist die Menge der Funktionen $\mathcal{C}(I,\bar{B})$ abgeschlossen im Banachraum $\mathcal{C}(I,V)$. Also ist $\mathcal{C}(I,\bar{B})$ bezüglich der Metrik $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(I,\bar{B})$, die in $\mathcal{C}(I,V)$ einen Grenzwert f besitzt. Zu zeigen ist, dass $f \in \mathcal{C}(I,\bar{B})$ gilt. Ist $x \in I$ ein beliebiger Punkt, dann bilden die Vektoren $f_m(x)$ eine Folge in V, die wegen

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m(x) - f(x)\| \quad \leq \quad \lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_\infty \quad = \quad 0$$

gegen $f(x)$ konvergiert. Weil $\bar{B}$ in V abgeschlossen ist und alle Vektoren in $f_m(x)$ in $\bar{B}$ liegen, gilt dasselbe auch für den Grenzwert $f(x)$. Damit haben wir gezeigt, dass f eine Funktion $I \to \bar{B}$ ist. □

Satz 3.9 *(lokaler Existenzsatz)*

Sei $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$ offen, $(a,b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung $\varphi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{K}^n$ des durch $y' = f(x,y)$ und (a,b) definierten Anfangswertproblems.

Beweis: Auch hier können wir uns beim Beweis auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Unser Ziel besteht darin, den Banachschen Fixpunktsatz auf einen vollständigen metrischen Raum der Gestalt anzuwenden, wie er in Lemma 3.3 beschrieben wird. Die Rolle der Kontraktion fällt dabei dem Operator zu, der einer Funktion φ die vektorwertige Integralfunktion $t \mapsto b + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds$ zuordnet. Ein Fixpunkt φ der Kontraktion ist eine Lösung des Systems, denn auf Grund des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung ist die Gleichung $\varphi(t) = b + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds$ gleichbedeutend mit $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Der Hauptaufwand besteht darin, alles so einzurichten, dass der beschriebene Operator tatsächlich eine Kontraktion darstellt, so dass der Banachsche Fixpunktsatz angewendet werden kann.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein hinreichend kleines kompaktes Intervall mit a in seinem Inneren und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass die Menge $X = I \times \bar{B}_\varepsilon(b)$ in D enthalten ist und f auf X eine Lipschitz-Bedingung mit einer Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}^+$ genügt, wobei $\bar{B}_\varepsilon(b) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - b\|_\infty \leq \varepsilon\}$, die abgeschlossene Kugel um b vom Radius ε im $\mathbb{R}^n$, bezeichnet. Weil X kompakt und f stetig ist, gibt es ein $m \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f(t, y)\| \leq m$ für alle $(t, y) \in X$. Weiter wählen wir $\delta \in \mathbb{R}^+$ so klein, dass das Intervall $J = [a - \delta, a + \delta]$ in I enthalten ist und die Ungleichungen $L\delta < 1$ sowie $m\delta < \varepsilon$ gelten. Wir definieren nun auf dem in Lemma 3.7 beschriebenen Banachraum $V = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ die Abbildung $\Phi : V \to V$ gegeben durch

$$\Phi(\varphi)(t) \quad = \quad b + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds$$

sowie die Teilmenge $Y = \mathcal{C}(J, \bar{B}_\varepsilon(b))$ von V. Dann ist Y nach Lemma 3.8 mit der Abstandsfunktion $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|_\infty$ ein vollständiger metrischer Raum. Für alle $\varphi \in Y$ und $t \in J$ gilt

$$\|\Phi(\varphi)(t) - b\| \quad \leq \quad \left\| \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds \right\| \quad \leq \quad m\delta \quad < \quad \varepsilon \quad ,$$

also ist auch $\Phi(\varphi)$ in Y enthalten, und folglich ist Φ eine Abbildung $Y \to Y$.

Wir zeigen nun, dass es sich bei Φ darüber hinaus um eine Kontraktion auf Y handelt. Seien $\varphi, \psi \in Y$ vorgegeben. Für jedes $t \in J$ gilt nach Voraussetzung $\varphi(t), \psi(t) \in \bar{B}_\varepsilon(b)$, und auf Grund der Lipschitz-Bedingung gilt $\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\|$. Wir erhalten somit

$$\|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty \quad = \quad \sup_{t \in J} \left\| \int_a^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s)))\, ds \right\|$$

$$\leq \quad \sup_{t \in J} \int_a^t \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\|\, ds \quad \leq \quad \sup_{t \in J} |t - a| \cdot L \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \quad = \quad \delta L \|\varphi - \psi\|_\infty .$$

Wegen $\delta L < 1$ ist die Kontraktionseigenschaft damit nachgewiesen. Auf Grund des Banachschen Fixpunktsatzes existiert also ein Fixpunkt $\varphi \in Y$ von Φ. Aus $\Phi(\varphi) = \varphi$ folgt dann $\varphi(t) = b + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds$ für alle $t \in I$, und damit auch $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $t \in J$. □

Satz 3.10 *(Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)*

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Dann besitzt das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung.

Beweis: Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes, Satz 3.6, genügt es zu zeigen, dass eine maximale Lösung existiert. Auf Grund des lokalen Existenzsatzes gibt es zumindest ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass auf dem offenen Intervall $I_\delta =]a-\delta, a+\delta[$ eine Lösung φ des Anfangswertproblems existiert. Sei nun c das Infimum aller $a_1 \in R$ mit der Eigenschaft, dass das Anfangswertproblem auf $]a_1, a+\delta[$ eine Lösung besitzt, und es sei d das Supremum aller $a_2 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass eine Lösung des Anfangswertproblems auf $]a-\delta, a_2[$ existiert. Dann gilt $c \leq a-\delta < a+\delta \leq d$. Auf folgende Weise erhalten wir nun eine Lösung $\psi :]c,d[\to \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems, die auf Grund der Definition von c und d maximal ist: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $c < t < a$ existiert ein $a_t \in \mathbb{R}$ mit $a_t < t$ und eine Lösung $\varphi_t :]a_t, a+\delta[\to \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems, und wir definieren $\psi(t) = \varphi_t(t)$. Ebenso gehen wir vor, um $\psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $a \leq t < d$ zu definieren. Dann ist ψ tatsächlich eine Lösung auf dem gesamten Intervall $]c,d[$. Denn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $c+\varepsilon < a$ existiert nach Definition von c eine Lösung ψ_1 auf $]c+\varepsilon, a+\delta[$, und wegen Satz 3.6 gilt dann $\psi(t) = \psi_1(t)$ für alle $t \in]c+\varepsilon, a+\delta[$. Ebenso existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $d-\varepsilon > a$ eine Lösung ψ_2 auf $]a-\delta, d-\varepsilon[$, die mit $\psi|_{]a-\delta,d-\varepsilon[}$ übereinstimmt. □

Kommen wir nun zur Untersuchung des Randverhaltens von Lösungen. Wir erinnnern daran, dass eine Teilmenge $A \subseteq X$ ein einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ als ***relativ kompakt*** bezeichnet wird, wenn ihr topologischer Abschluss $\bar{A}$ kompakt ist. Ist D eine Teilmenge vom $\mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, aufgefasst als topologischer Raum mit der von $\mathbb{K}^n$ induzierten Topologie, so ist eine Teilmenge $A \subseteq D$ in diesem topologischen Raum genau dann relativ kompakt, wenn ihr topologischer Abschluss $\bar{A}$ in $\mathbb{K}^n$ (!) in D enthalten und beschränkt ist.

Um dies zu überprüfen, bemerken wir zunächst, dass eine Teilmenge $B \subseteq D$ genau dann kompakt in D ist, wenn sie kompakt in $\mathbb{K}^n$ ist, nach dem Satz von Heine-Borel also genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass ein System $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subseteq D$ genau dann eine offene Überdeckung von $\bar{A}$ in D ist, wenn für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge $V_i \subseteq \mathbb{K}^n$ existiert, so dass $U_i = V_i \cap D$ für alle $i \in I$ gilt und $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $\bar{A}$ in $\mathbb{K}^n$ ist. Diese Aussage wiederum ergibt sich direkt aus der Definition der auf D induzierten Topologie. Setzen wir also $\bar{A} \subseteq D$ und die Beschränktheit voraus, dann ist $\bar{A}$ in D kompakt, und A in D relativ kompakt.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass A in D relativ kompakt ist. Dann ist der topologische Abschluss $\bar{A}^{(D)}$ von A in D kompakt. Nehmen wir nun an, dass der Abschluss $\bar{A}$ von A in $\mathbb{K}^n$ nicht in D enthalten ist. Dann ist $\bar{A}^{(D)}$ eine echte Teilmenge von $\bar{A}$, die Menge $\bar{A}^{(D)}$ also nicht abgeschlossen, und damit erst recht in $\mathbb{K}^n$ nicht kompakt. Die Feststellung von oben, angewendet auf $B = \bar{A}^{(D)}$, zeigt dann, dass $\bar{A}^{(D)}$ in D nicht kompakt ist, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $\bar{A} = \bar{A}^{(D)} \subseteq D$, und als kompakte Teilmenge von D ist $\bar{A}$ auch kompakt im $\mathbb{K}^n$, insbesondere also beschränkt.

Definition 3.11 Sei $y' = f(x,y)$ ein System von n DGLs erster Ordnung mit einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, sei $(a,b) \in D$, und sei $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems. Wir sagen, die Lösung φ ***verlässt nach rechts jedes Kompaktum***, wenn der rechts von a liegende Graph

$$\Gamma_+(\varphi) \quad = \quad \{(t, \varphi(t)) \in D | t \geq a\}$$

in D nicht relativ kompakt ist. Entsprechend sagen wir, φ verlässt nach links jedes Kompaktum, wenn $\Gamma_-(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) \in D \mid t \leq a\}$ in D nicht relativ kompakt ist. Man sagt, jedes Kompaktum wird in beiden Richtungen verlassen, wenn die Mengen $\Gamma_\pm(\varphi)$ beide in D nicht relativ kompakt sind.

Unser Ziel besteht darin, diese Eigenschaft von φ konkreter und anschaulicher zu beschreiben. Ist $p \in \mathbb{K}^n$ und $A \subseteq \mathbb{K}^n$ eine beliebige Teilmenge, dann definieren wir den ***Abstand*** von p und A durch $d(p,A) = \inf\{\|p-a\|_\infty \mid a \in A\}$. Man kann leicht zeigen, dass die Abstandsfunktion in Abhängigkeit von p stetig ist. (Eventuell behandeln wir das in den Übungen.) Natürlich lässt sich dieses Abstandskonzept problemlos auf beliebige metrische Räume übertragen.

Proposition 3.12 Seien die Bezeichnungen wie in der vorherigen Definition gewählt, wobei wir aber voraussetzen, dass die Teilmenge D offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ist. Sei $I =]\alpha, \beta[$ das Definitionsintervall von φ, mit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $\alpha < \beta$. Genau dann verlässt φ nach rechts jedes Kompaktum, wenn mindestens eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist.

(i) $\beta = +\infty$

(ii) $\beta \in \mathbb{R}$ und $\limsup_{t\to\beta} \|\varphi(t)\|_\infty = +\infty$

(iii) $\beta \in \mathbb{R}$, $\partial D \neq \varnothing$ und $\lim_{t\to\beta} d((t,\varphi(t)), \partial D) = 0$

(Die erste Bedingung sagt, dass I unendlich nach rechts ausgedehnt ist, die zweite, dass $\varphi(t)$ für $t \to \beta$ unbeschränkt ist, und die dritte, dass φ nach rechts dem Rand des Definitionsbereichs beliebig nahe kommt.)

Beweis: „⇒“ Nehmen wir an, φ verlässt nach rechts jedes Kompaktum, es gilt $\beta \in \mathbb{R}$, und der Grenzwert unter (ii) ist endlich. Dann ist $\Gamma_+(\varphi)$ beschränkt, und auf Grund der Stetigkeit von φ gilt dasselbe für den Abschluss $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$. Als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge ist $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Weil aber $\Gamma_+(\varphi)$ laut Voraussetzung nicht relativ kompakt in D ist, muss $\overline{\Gamma_+(\varphi)} \not\subseteq D$ gelten. Die Punkte in $\overline{\Gamma_+(\varphi)} \setminus \Gamma_+(\varphi)$ sind dann zwangsläufig Randpunkte von D, insbesondere gilt also $\partial D \neq \varnothing$.

Zu zeigen ist nun, dass der Abstand $d((t,\varphi(t)), \partial D)$ für $t \to \beta$ gegen null konvergiert. Nehmen wir an, dies ist nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,\beta[$ mit $\lim_n t_n = \beta$ und $d((t_n,\varphi(t_n)), \partial D) \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Als Folge im Kompaktum $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ besitzt $(t_n,\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(t_{n_k},\varphi(t_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Definieren wir $y_\beta = \lim_k \varphi(t_{n_k})$, dann gilt offenbar $(\beta, y_\beta) \in \partial D$, und somit $d((\beta,y_\beta),\partial D) = 0$. Andererseits muss auf Grund der Stetigkeit der Abstandsfunktion aber

$$d((\beta,y_\beta),\partial D) \quad = \quad \lim_{k\to\infty} d((t_{n_k},\varphi(t_{n_k})),\partial D) \quad \geq \quad \varepsilon$$

gelten. Der Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch und die Aussage (iii) erfüllt ist.

„⇐“ Nun setzen wir voraus, dass $\Gamma_+(\varphi)$ relativ kompakt ist. Wie bereits oben festgestellt, ist $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ dann beschränkt und abgeschlossen. Dies zeigt, dass die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sein können. Nehmen wir nun an, es gilt $\partial D \neq \varnothing$ und $\lim_{t\to\beta} d((t,\varphi(t)),\partial D) = 0$. Dann gibt es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n d((t_n,\varphi(t_n)),\partial D) = 0$. Wie oben zeigt man, dass eine konvergente Teilfolge $(t_{n_k},\varphi(t_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, dessen Grenzwert (β,y_β) in $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ enthalten ist. Dieser Punkt hat dann von ∂D den Abstand 0 und muss deshalb (auf Grund der Abgeschlossenheit von ∂D) selbst in ∂D liegen. Aber wegen $\overline{\Gamma_+(\varphi)} \subseteq D$ und der Offenheit von D ist dies zugleich ein innerer Punkt von V, im Widerspruch zu $(\beta,y_\beta) \in \partial D$. Dies zeigt, dass auch Bedingung (iii) nicht erfüllt ist. □

Lemma 3.13 Sei $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a,b) \in D$. Sei $\varphi :]\alpha,\beta[\to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des durch $y' = f(x,y)$ und (a,b) definierten Anfangswertproblems. Ist $\Gamma_+(\varphi)$ in D relativ kompakt, dann ist φ nach rechts fortsetzbar, d.h. es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und eine Fortsetzung $\hat{\varphi} :]\alpha,\beta+\varepsilon[\to \mathbb{K}^n$ von φ.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung ist die rechte Intervallgrenze β endlich, und auf Grund des Maximumsprinzips ist die Funktion f auf $\overline{\Gamma_+(f)}$ beschränkt durch eine Konstante $K \in \mathbb{R}^+$. Es gilt dann

$$\sup_{t\in[a,\beta[} \|\varphi'(t)\|_\infty \quad = \quad \sup_{t\in[a,\beta[} \|f(t,\varphi(t)\|_\infty \quad \leq \quad \sup\{\,\|f(t,y)\|_\infty \mid (t,y) \in \overline{\Gamma_+(f)}\} \quad \leq \quad K.$$

Wie im Beweis von Proposition 3.5 kann daraus mit dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen gefolgert werden, dass $\|\varphi(s)-\varphi(t)\|_\infty \leq K|s-t|$ für alle $s,t \in [a,\beta[$ gilt.

Wir zeigen nun, dass der Grenzwert $\lim_{t\to\beta} \varphi(t)$ existiert. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,\beta[$ mit $\lim_n t_n = \beta$. Weil die Folge $(t_n,\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in der kompakten Menge $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ enthalten ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(t_{n_k},\varphi(t_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert wir mit (β, y_β) bezeichnen. Darüber hinaus ist $(t_n,\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert auf Grund der Konvergenz von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m,n \geq N$ jeweils $|t_m - t_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ erfüllt ist. Auf Grund unserer Beobachtung von oben folgt daraus $\|\varphi(t_m)-\varphi(t_n)\|_\infty < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$, und somit auch $\|(t_m,\varphi(t_n))-(t_n,\varphi(t_n))\|_\infty < \varepsilon$, für alle $m,n \geq N$. Aber dies wiederum bedeutet, dass $\lim_n (t_n,\varphi(t_n)) = (\beta, y_\beta)$ gilt, und damit ist insgesamt $\lim_{t\to\beta} \varphi(t) = (\beta, y_\beta)$ nachgewiesen.

Wir können φ also auf das Intervall $]\alpha,\beta]$ stetig fortsetzen, indem wir $\varphi(\beta) = y_\beta$ definieren. Die (vektorwertige) Integralgleichung $\varphi(t) = b + \int_a^t f(s,\varphi(s))\,ds$ ist dann auf Grund der Stetigkeit nicht nur auf $]\alpha,\beta[$, sondern auf dem gesamten Intervall $]\alpha,\beta]$ erfüllt. Dies wiederum bedeutet, dass die Funktion φ im Punkt β linksseitig differenzierbar ist, mit $f(\beta, y_\beta)$ als linksseitiger Ableitung. Andererseits hat das Anfangswertproblem gegeben durch $y' = f(x,y)$ und (β, y_β) nach Satz 3.9 auf einem hinreichend kleinen offenen Interval $]\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon[$ eine Lösung ψ. Nach eventueller Verkleinerung von ε können wir $\beta - \varepsilon \geq \alpha$ annehmen. Definieren wir nun eine weitere Funktion $\hat\varphi$ durch

$$\hat\varphi(t) \quad = \quad \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } \alpha < t < \beta \\ y_\beta & \text{für } t = \beta \\ \psi(t) & \text{für } \beta < t < \beta+\varepsilon \end{cases}$$

so ist dies ebenfalls eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = f(x,y)$ und den Punkt $(a,b) \in D$; im Punkt β ist $\hat\varphi$ differenzierbar mit $\hat\varphi'(\beta) = f(\beta, y_\beta)$, weil links- und rechtsseitige Ableitung im Punkt β existieren, mit $f(\beta, y_\beta)$ als jeweiligem Wert. Damit haben wir die Lösung φ auf das Intervall $]\alpha,\beta+\varepsilon[$ fortgesetzt. □

Eine entsprechende Aussage gilt natürlich auch für $\Gamma_-(\varphi)$ und die Fortsetzbarkeit nach links.

Satz 3.14 *(Randverhalten von Lösungen)*

Sei $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a,b) \in D$. Sei $\varphi :]\alpha,\beta[\to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des durch $y' = f(x,y)$ und (a,b) definierten Anfangswertproblems. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) Die Lösung φ ist maximal.

(ii) Die Lösung φ verlässt in beide Richtungen jedes Kompaktum.

Beweis: „(i) ⇒ (ii)“ Ist $\Gamma_+(\varphi)$ oder $\Gamma_-(\varphi)$ in D relativ kompakt, dann ist φ auf Grund des Lemmas nach links oder rechts fortsetzbar, die Lösung φ also nicht maximal.

„(ii) ⇒ (i)“ Setzen wir o.B.d.A. voraus, dass die Lösung φ nach rechts fortsetzbar ist. Bezeichnet $\tilde{\varphi} :]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[\to \mathbb{K}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems, dann gilt also $\tilde{\beta} > \beta$. Außerdem ist $\overline{\Gamma_+(\varphi)} = \{(t, \tilde{\varphi}(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$, und somit ist $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ in $[\alpha, \beta] \times \tilde{\varphi}([\alpha, \beta])$ enthalten. Dies zeigt, dass $\overline{\Gamma_+(\varphi)}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ kompakt ist. Anhand der Inklusion $\overline{\Gamma_+(\varphi)} \subseteq \Gamma(\tilde{\varphi}) \subseteq D$ ist zu erkennen, dass $\Gamma_+(\varphi)$ darüber hinaus in D relativ kompakt ist. □

Wir sehen uns das Randverhalten von Lösungen anhand einiger konkreter Beispiele an.

(i) Das Anfangswertproblem gegeben durch die DGL $y' = xy^2$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$ und den Punkt $(0, 2) \in D$ besitzt die Lösung $\varphi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{2}{1-t^2}$. Diese ist wegen $\lim_{t\to-1} |\varphi(t)| = +\infty$ und $\lim_{t\to1} |\varphi(t)| = +\infty$ maximal.

(ii) Die Funktion $\varphi_- :]-\infty, -1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{2}{1-t^2}$ ist eine maximale Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = xy^2$ auf $D = \mathbb{R}^2$ und den Punkt $(-2, -\frac{2}{3})$, weil die linke Intervallgrenze gleich $-\infty$ ist und $\lim_{t\to-1} |\varphi(t)| = +\infty$ gilt. Betrachten wir statt dessen den Punkt $(2, -\frac{2}{3})$, dann ist $\varphi_+ :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{2}{1-t^2}$ eine maximale Lösung.

(iii) Wir betrachten das Anfangswertproblem gegeben durch $y' = \frac{1}{\cos(x+y)} - 1$ auf $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2}\pi < x + y < \frac{1}{2}\pi\}$ und den Punkt $(0, 0) \in D$. Durch Trennung der Variablen findet man die Lösung $\varphi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \arcsin(t) - t$. Auch diese Lösung ist maximal. Denn der Rand von D ist gegeben durch

$$\partial D \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = -\tfrac{1}{2}\pi\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = \tfrac{1}{2}\pi\} \quad ,$$

und es gilt $\lim_{t\to-1} \varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}\pi$ und $\lim_{t\to1} \varphi(t) = \frac{1}{2}\pi - 1$. Die Lösung erfüllt also $\lim_{t\to-1}(t + \varphi(t)) = -\frac{1}{2}\pi$ und $\lim_{t\to1}(t + \varphi(t)) = \frac{1}{2}\pi$, was zeigt, dass sie sich dem Rand des Definitionsbereichs auf beiden Seiten annähert.

(iv) Aus demselben Grund erhält man für das Anfangswertproblem gegeben $y' = -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$ auf $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und den Punkt $(\frac{1}{\pi}, 0)$ durch $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(\frac{1}{t})$ eine maximale Lösung.

In vielen Anwendungen ist man daran interessiert, ein Intervall, auf dem eine Lösung eines Anfangswertproblems existiert, konkret anzugeben. Diesem Problem wenden wir uns nun als nächstes zu.

Satz 3.15 *(Gronwall-Lemma)*

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebige Konstanten und $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\varphi(t) \quad \leq \quad \alpha + \gamma \int_a^t \varphi(s)\, ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann gilt $\varphi(t) \leq \alpha \exp(\gamma|t - a|)$ für alle $t \in I$.

Beweis: Sei $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha_1 > \alpha$, und sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $\psi(t) = \alpha_1 \exp(\gamma(t - a))$. Dann ist ψ eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = \gamma y$ auf $D = \mathbb{R}^2$ und $(a, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$. Nehmen wir an, es existiert ein

$t_1 \in I$ mit $t_1 \geq a$ und $\varphi(t_1) \geq \psi(t_1)$. Wegen $\varphi(a) \leq \alpha < \alpha_1 = \psi(a)$ liegt die Zahl $t_2 = \min\{t \in [a, t_1] \mid \varphi(t) \geq \psi(t)\}$ im Intervall $]a, t_1]$. Andererseits gilt aber

$$\varphi(t_2) \quad \leq \quad \alpha + \gamma \int_a^{t_2} \varphi(s)\, ds \quad < \quad \alpha_1 + \gamma \int_a^{t_2} \psi(s)\, ds \quad = \quad \psi(t_2).$$

Der Widerspruch zeigt, dass $\varphi(t) < \psi(t) = \alpha_1 \exp(\gamma|t-a|)$ für alle $t \in I \cap [a, +\infty[$ erfüllt ist. Da $\alpha_1 > \alpha$ beliebig gewählt war, folgt $\varphi(t) \leq \alpha \exp(\gamma|t-a|)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq a$. Für die Punkte $t \in I$ mit $t \leq a$ verläuft die Argumentation vollkommen analog. □

Satz 3.16 *(Existenzintervall bei linear beschränkter rechter Seite)*

Es sei $I =]\alpha, \beta[$ ein (endliches oder unendliches) offenes Intervall, $D = I \times \mathbb{K}^n$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt und ***linear beschränkt*** ist, was bedeuten soll, dass stetige Funktionen $\rho, \sigma : I \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\|f(x,y)\|_\infty \quad \leq \quad \rho(x)\|y\|_\infty + \sigma(x)$$

für alle $(x, y) \in D$ existieren. Dann existiert für jeden Punkt (a, b) die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ auf dem gesamten Intervall I.

Beweis: Sei $J =]\alpha_1, \beta_1[\subseteq I$ und $\varphi : J \to \mathbb{K}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems. Nehmen wir an, dass J echt kleiner als I und o.B.d.A. $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta_1 < \beta$ ist. Für alle $t \in [a, \beta_1[$ gilt

$$\|\varphi(t)\|_\infty \quad = \quad \left\| \varphi(a) + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds \right\|_\infty \quad \leq \quad \|b\|_\infty + \int_a^t \|f(s, \varphi(s)\|_\infty\, ds$$

$$\leq \quad \|b\|_\infty + \int_a^t (\sigma(s) + \rho(s)\|\varphi(s)\|_\infty)\, ds \quad \leq \quad \left(\|b\|_\infty + \int_a^t \sigma(s)\, ds \right) + m \int_a^t \|\varphi(s)\|_\infty\, ds$$

mit $m = \max\{\rho(s) \mid s \in [a, \beta_1]\}$. Anwendung des Gronwall-Lemmas auf $\|\varphi\|_\infty$ ergibt dann die Abschätzung

$$\|\varphi(t)\|_\infty \quad \leq \quad \left(\|b\|_\infty + \int_a^{\beta_1} \sigma(s)\, ds \right) e^{m|t-a|}.$$

Insbesondere ist also der Grenzwert $\limsup_{t \to \beta_1} \|\varphi(t)\|_\infty$ nicht unendlich, und im Fall $\beta < +\infty$ ist offenbar für alle $t \in [a, \beta_1[$ der Abstand zwischen $\varphi(t)$ und $\partial D = \{\alpha\} \times \mathbb{K}^n \cup \{\beta\} \times \mathbb{K}^n$ wegen $\alpha < a \leq t < \beta_1 < \beta$ durch $\min\{a - \alpha, \beta - \beta_1\}$ nach unten beschränkt. Nach Proposition 3.12 ist $\Gamma_+(\varphi)$ also in D relativ kompakt, und nach Satz 3.14 steht das im Widerspruch zur Maximalität von φ. □

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Differenzialgleichung

$$y' \quad = \quad \frac{x^3 y^3}{1+y^2} \sin(xy^2) + e^x \cos(x^2 y).$$

auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$. Für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt das entsprechende Anfangswertproblem eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$, denn die Abschätzungen $|\frac{y^3}{1+y^2}| \leq |y|$ und $|\sin(xy^2)|, |\cos(x^2 y)| \leq 1$ zeigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der DGL linear beschränkt ist, durch die Funktionen $\rho(x) = |x|^3$ und $\sigma(x) = e^x$.

§ 4. *Der Existenzsatz von Peano*

Zusammenfassung. Der Existenzsatz von Peano stellt, ebenso wie der Satz von Picard-Lindelöf, die Lösbarkeit von Systemen von Differenzialgleichungen sicher, gilt aber unter deutlich schwächeren Voraussetzungen: Es wird lediglich die Stetigkeit der definierenden Funktionen benötigt, aber keine lokale Lipschitz-Bedingung. Dafür sind die Lösungen andererseits nicht mehr eindeutig, im Allgemeinen nicht einmal lokal. Außerdem werden für den Beweis des Existenzsatzes anspruchsvollere Hilfsmittel aus der Topologie und Analysis benötigt als im letzten Kapitel.

Wichtige Grundbegriffe	*Zentrale Sätze*
– Fixpunkteigenschaft eines topologischen Raums	– Stone-Weierstraß-Theorem
– gleichgradige Stetigkeit einer Menge von Abbildungen zwischen metrischen Räumen	– Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder
	– Existenzsatz von Peano
	– Satz von Arzela-Ascoli

Unser Ziel in diesem Kapitel ist der Beweis der folgenden Aussage.

Satz 4.1 *(Existenzsatz von Peano)*
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a,b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x,y)$ und (a,b) definierte Anfangswertproblem (mindestens) eine Lösung, die jedes Kompaktum in beide Richtungen verlässt.

Für den gesamten Rest dieses Kapitels bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ (auch 2-Norm genannt), außerdem $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel und $S^{n-1} = \partial \bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre. Mit $B^n = \bar{B}^n \setminus S^{n-1}$ bezeichnen wir die offene Einheitskugel.

Definition 4.2 Man sagt, ein topologischer Raum X besitzt die ***Fixpunkteigenschaft***, wenn jede stetige Abbildung $\phi : X \to X$ mindestens einen Fixpunkt hat, also $\phi(x) = x$ für mindestens ein $x \in X$ erfüllt ist.

Der folgende Satz stellt ein zentrales Resultat aus der Topologie dar. Er besitzt eine Vielzahl unterschiedlicher Beweise, basierend u.a. auf Resulaten der algebraischen Topolgie, auf dem Satz von Stokes oder der Kombinatorik von Triangulierungen. Wir folgen hier im Wesentlichen der Darstellung in [Rog80].

Satz 4.3 *(Brouwerscher Fixpunktsatz)*
Die Einheitskugel $\bar{B}^n$ besitzt die Fixpunkteigenschaft.

Nehmen wir an, es gibt eine stetige Abbildung $\phi : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ ohne Fixpunkt. Dann können wir eine Abbildung $\psi : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ definieren, indem wir für jedes $x \in \bar{B}^n$ die Punkte x und $\phi(x)$ durch die Gerade $\ell_x = x + \mathbb{R}v_x$ mit $v_x = \phi(x) - x$ verbinden und x den eindeutig bestimmten Schnittpunkt von ℓ_x mit S^{n-1} als Bildpunkt $\psi(x)$ zuordnen, der dem Punkt x der Geraden näher ist. Diese Abbildung ist stetig, weil der Ortsvektor x und der Richtungsvektor v_x stetig von x abhängen und die Koordinaten von $\psi(x)$ somit Lösungen einer quadratischen Gleichung sind, deren Koeffizienten von x stetig abhängig sind. Wir haben auf diese Weise eine stetige Abbildung $\psi : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ mit $\psi|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ konstruiert. Damit ist der Beweis der Brouwerschen Fixpunktsatzes reduziert auf die Aussage

Proposition 4.4 Es gibt keine stetige Abbildung $\psi : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ mit $\psi|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

Wir teilen den Beweis dieser Aussage in zwei Einzelschritte auf. Für den ersten Einzelschritt machen wir von einem bekannten Hilfsmittel aus der Analysis Gebrauch. Wir erinnern daran, dass es sich bei einer $\mathbb{R}$-Algebra um einen $\mathbb{R}$-Vektorraum A mit einer zusätzlichen $\mathbb{R}$-bilinearen Verknüpfung $\cdot : A \times A \to A$ handelt, die A zusammen mit der Vektoraddition zu einem Ring macht (im Allgemein nicht-kommutativ und ohne Einselement). Ein Untervektorraum von A, der zusätzlich abgeschlossen unter $\cdot$ ist, wird als *Unteralgebra* bezeichnet.

Satz 4.5 *(Stone-Weierstraß-Theorem)*

Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und A eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, der $\mathbb{R}$-Algebra der stetigen reellwertigen Funktionen auf X, die die konstanten Funktionen auf X als Untervektorraum enthält. Außerdem setzen wir voraus: Die $\mathbb{R}$-Algebra A ***trennt Punkte***, d.h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann ist A in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ eine ***dichte*** Teilmenge. Dies bedeutet: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ gibt es ein $f \in A$ mit der Eigenschaft, dass $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Den *Beweis* dieser Aussage verschieben wir in einen Anhang zu diesem Kapitel. Eine wichtiger Spezialfall ist der

Folgerung 4.6 *(Approximationssatz von Weierstraß)*

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches abgeschlossenes Intervall und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, so dass $|g(x) - p(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt ist.

Damit können wir nun die erste Beweisetappe in Angriff nehmen.

Lemma 4.7 Wenn eine stetige Abbildung $\psi : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ mit $\psi|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ existiert, dann gibt es auch eine stetig differenzierbare Abbildung mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Die Abbildung $x \mapsto \psi(x) - x$ ist auf $\bar{B}^n$ stetig, auf S^{n-1} gleich null, und es gilt $\|\psi(x) - x\| \leq 2$ für alle $x \in \bar{B}^n$. Nach dem Satz von Heine (bekannt aus der Analysis mehrerer Variablen) ist jede reellwertige stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum auch gleichmäßig stetig. Daraus folgt, dass ein $\theta \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[$ existiert, so dass $\|\psi(x) - x\| \leq \frac{1}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\theta \leq \|x\| \leq 1$ erfüllt ist. (Die gleichmäßige Stetigkeit, angewendet auf $\varepsilon = \frac{1}{4}$, liefert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, wobei wir $\delta < \frac{1}{4}$ annehmen dürfen. Anschließend setzt man θ auf einen Wert mit $1 - \delta < \theta < 1$. Zu beachten ist, dass unter der Bedingung $\|x\| \geq \theta$ jeweils ein Punkt $y \in S^{n-1}$ mit $\|y - x\| \leq 1 - \theta$ existiert.)

Seien $e_1, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$ die Einheitsvektoren. Es ist leicht zu sehen, dass die $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ der reellen multivariaten Polynome, aufgefasst als Algebra von stetigen Funktionen auf $\bar{B}^n$, die Voraussetzungen des Stone-Weierstrass-Theorems erfüllt. Daraus folgt, dass die reellwertigen Komponenten der Funktion $x \mapsto \psi(x) - x$ beliebig genau durch Polynomfunktionen approximiert werden können. Insbesondere gibt es Polynome $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ mit

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} p_i(x_1, ..., x_n) e_i - (\psi(x) - x) \right\| < \frac{1}{4} \qquad \text{für alle } x \in \bar{B}^n.$$

Durch Approximation einer stückweise linearen Funktion finden wir außerdem ein Polynom $q \in \mathbb{R}[x]$ mit $\frac{3}{4} < q(t) < 1$ für $0 \leq t \leq \theta^2$ und $|q(t)| \leq 1$ für $\theta^2 \leq t \leq 1$. Durch Multiplikation dieses Polynoms mit $1 - t^m$ für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ können wir außerdem erreichen, dass $q(1) = 0$ gilt, wobei die anderen beiden Abschätzungen erhalten bleiben. Für alle $r \in [0, \theta]$ gilt dann $\frac{3}{4} \leq q(r^2) \leq 1$, und $|q(r^2)| \leq 1$ für $r \in [\theta, 1]$.

Wir definieren nun $p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_1, ..., x_n) e_i$, $g(x) = x + q(\|x\|^2) p(x)$. Für alle $x \in \bar{B}^{n-1}$ mit $0 \leq \|x\| \leq \theta$ gilt

$$\begin{aligned}
\|g(x)\| &= \|x + q(\|x\|^2) p(x)\| = \\
&\left|\psi(x) + q(\|x\|^2) p(x) - q(\|x\|^2)\psi(x) + q(\|x\|^2) x + q(\|x\|^2)\psi(x) - \psi(x) - q(\|x\|^2) x + x\right| = \\
&\left|\psi(x) + q(\|x\|^2)\,(p(x) - \psi(x) + x) + (q(\|x\|^2) - 1)(\psi(x) - x)\right| \\
&\geq \|\psi(x)\| - |q(\|x\|^2)| \cdot \|p(x) - \psi(x) + x\| - |1 - q(\|x\|^2)| \|\psi(x) - x\| \\
&\geq 1 - 1 \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} \cdot 2 = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Für $\theta \leq \|x\| \leq 1$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\|g(x)\| = \|x + q(\|x\|^2) p(x)\| = \left\|x + q(\|x\|^2)\,(p(x) - \psi(x) + x) + q(\|x\|^2)\,(\psi(x) - x)\right\| \\
&\geq \|x\| - |q(\|x\|^2)|\,(\|p(x) - \psi(x) + x\| + \|\psi(x) - x\|) \geq \theta - 1 \cdot (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) \geq \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Es gilt also $\|g(x)\| \geq \frac{1}{4}$ für alle $x \in \bar{B}^n$ und $g(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$; insbesondere wird die Funktion nirgends auf $\bar{B}^n$ gleich null. Die Funktion $h(x) = \|g(x)\|^{-1} g(x)$ bildet die Einheitskugel $\bar{B}^n$ auf S^{n-1} ab und hat ebenfalls die Eigenschaft $h(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$. Außerdem erkennt man anhand der Definition unmittelbar, dass es sich bei h um eine stetig differenzierbare Abbildung handelt. □

Damit haben wir nun den Beweis von Proposition 4.4, und ebenso den Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, auf die folgende Aussage zurückgeführt.

Lemma 4.8 Es gibt keine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ mit $\psi|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

Beweis: Nehmen wir an, ψ ist eine Abbildung mit diesen Eigenschaften. Wir definieren $\phi(x) = \psi(x) - x$ und außerdem $\psi_t(x) = x + t\phi(x) = (1-t)x + t\psi(x)$ für $t \in [0,1]$; es ist dann $\psi_0 = \mathrm{id}_{\bar{B}^n}$ und $\psi_1 = \psi$. Darüber hinaus ist die Bedingung $\psi_t|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ für alle $t \in [0,1]$ erfüllt.

Mit ψ ist auch ϕ stetig differenzierbar. Insbesondere sind damit alle partiellen Ableitungen $\partial_j \phi_i$ der Komponentenfunktionen ϕ_i von ϕ stetig, auf Grund des Maximumsprinzips also auf $\bar{B}^n$ beschränkt. Ähnlich wie beim Beweis von Proposition 3.5 kann aus dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen gefolgert werden, dass eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(y) - \phi(x)\| \leq \gamma \|y - x\|$ für alle $x, y \in \bar{B}^n$ existiert. Für alle $t \in \left[0, \gamma^{-1}\right[$ folgt aus $\psi_t(x) = \psi_t(y)$ jeweils

$$\|y-x\| \quad = \quad \|y - x - \psi_t(y) + \psi_t(x)\| \quad = \quad \|t\phi(x) - t\phi(y)\| \quad = \quad t\|\phi(x) - \phi(x)\| \quad \leq \quad t\gamma\|y-x\| \quad ,$$

$t\gamma < 1$ also $\|y - x\| = 0$ und $x = y$. Für alle t in diesem Bereich ist die Abbildung ψ_t also injektiv. Wegen $\psi_t'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + t\phi'(x)$ können wir $t_0 \in \left]0, \gamma^{-1}\right[$ so wählen, dass die totale Ableitung $\psi_t'(x)$ für alle $t \in [0, t_0]$ und alle $x \in \bar{B}^n$ invertierbar ist.

Aus dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit aus der Analysis mehrerer Variablen folgt nun, dass ψ_t für alle $t \in [0, t_0]$ die offene Einheitskugel B^n bijektiv auf eine offene Teilmenge $G_t \subseteq B^n$ abbildet. Wir zeigen, dass G_t mit B^n übereinstimmt und ψ_t die abgeschlossene Einheitskugel somit bijektiv auf sich selbst abbildet. Nehmen wir an, dies ist nicht der Fall, und sei $q \in \bar{B}^n \setminus G_t$ beliebig gewählt. Sei $p \in G_t$ und p' ein beliebiger Punkt der Schnittmenge ∂G_t mit der Verbindungsstrecke $[p, q]$. Weil die Bildmenge $\psi_t(\bar{B}^n)$ kompakt und somit insbesondere abgeschlossen ist, sind alle Randpunkte von ∂G_t in $\psi_t(\bar{B}^n)$ enthalten. Inbesondere gibt es also ein $x \in \bar{B}^n$ mit $\psi_t(x) = p'$. Auf Grund der Offenheit von G_t gilt $p' \notin G_t$, wegen der Injektivität von ψ_t also $x \notin B^n$. Es folgt $x \in S^{n-1}$ und damit $p' = \psi_t(x) = \mathrm{id}_{S^{n-1}}(x) = x$, also $p' \in S^{n-1}$. Weil der Punkt p in $G_t \subseteq B^n$ liegt, ist $p' \in S^{n-1}$ auf Grund der Konvexität von B^n nur möglich, wenn auch q in S^{n-1} liegt. Aber wenn jeder Punkt q aus $\bar{B}^n \setminus G_t$ in S^{n-1} liegt, muss $G_t = B^n$ gelten. Also ist durch ψ_t tatsächlich eine Bijektion $\bar{B}^n \to \bar{B}^n$ gegeben, für jedes $t \in [0, t_0]$.

Wir betrachten nun für alle $t \in [0,1]$ jeweils das Integral

$$I(t) \quad = \quad \int_{\bar{B}^n} \det \psi_t'(x)\, dx.$$

Offenbar gibt es stetige, reellwertige Funktionen $a_0, \ldots, a_n$ auf $\bar{B}^n$, so dass

$$\det \psi_t'(x) \quad = \quad \det\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + t\phi'(x)\right) \quad = \quad a_n(x)t^n + \ldots + a_1(x)t + a_0(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Durch Integration erhalten wir $I(t) = A_n t^n + \ldots + A_1 t + A_0$ mit $A_k = \int_{\bar{B}^n} a_k(x)\, dx$ für $0 \leq k \leq n$. Die Funktion $t \mapsto I(t)$ ist also eine Polynomfunktion. Für alle $t \in [0, t_0]$ gilt auf Grund der Bijektivität von ψ_t und der Transformationsformel aus der mehrdimensionalen Integralrechnung und gilt für alle $t \in [0, t_0]$ jeweils

$$I(t) \quad = \quad \int_{\bar{B}^n} \det \psi_t'(x)\, dx \quad = \quad \int_{\psi_t(\bar{B}^n)} 1\, dx \quad = \quad \mathrm{vol}_n(f_t(\bar{B}^n)) \quad = \quad \mathrm{vol}_n(\bar{B}^n).$$

Die Funktion $t \mapsto I(t)$ ist auf dem Intervall $[0, t_0]$ also konstant, wobei der konstante Wert das Volumen $\mathrm{vol}_n(\bar{B}^n) = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ der n-dimensionalen Einheitskugel ist (mit der Gammafunktion im Nenner). Da es sich um eine Polynomfunktion handelt, muss die Funktion sogar auf dem gesamten Einheitsintervall $[0,1]$ konstant sein, wobei die Konstante ein positiver Wert ist.

Wir führen dies nun zu einem Widerspruch, indem wir zeigen, dass $I(1) = 0$ gelten muss. Weil $\psi = \psi_1$ auf die Einheitssphäre S^{n-1} abbildet, ist die Funktion $x \mapsto \langle \psi(x), \psi(x) \rangle$ auf $\bar{B}^n$ konstant gleich 1, woraus unmittelbar folgt, dass die Funktionen $x \mapsto \langle \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x), \psi(x) \rangle$ auf $\bar{B}^n$ für $1 \le j \le n$ konstant null sind. In jedem Punkt $x \in \bar{B}^n$ befinden sich die Vektoren $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)$ also im Orthogonalraum $\psi(x)^\perp$. Weil dieser Orthogonalraum nur $(n-1)$-dimensional ist, sind die Vektoren $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)$ stets linear abhängig, und weil diese gerade die Spaltenvektoren der totalen Ableitung $\psi'(x)$ sind, ist deren Determinante konstant null. Daraus folgt $I(1) = \int_{\bar{B}^n} \det \psi'(x)\, dx = 0$. □

Unser nächstes Ziel besteht darin, den Brouwerschen Fixpunktsatz auf kompakte konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu verallgemeinern.

Satz 4.9 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene konvexe Teilmenge. Dann wird für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das Minimum der Funktion $A \to \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \|x-a\|$, in einem eindeutig bestimmten Punkt von A angenommen. Bezeichnen wir diesen jeweils mit $\pi_A(x)$, dann ist $\pi_A : \mathbb{R}^n \to A$ eine stetige Funktion.

Beweis: Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\gamma_x = \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\}$. Eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in A mit $\lim_m \|x-a_m\| = \gamma_x$ bezeichnen wir als *Minimalfolge* für x. Einen Punkt $a \in A$, in dem die Funktion $A \to \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \|x-a\|$ ihr Minimum annimmt (sofern dieser existiert), nennen wir eine *Bestapproximation*.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben und $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für x. Als erstes zeigen wird, dass $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Bekanntlich erfüllt $\|\cdot\|$ als euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ die sog. *Parallelogrammgleichung*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \quad = \quad 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad ,$$

die sich unmittelbar aus der Tatsache ergibt, dass die euklidische Norm $\|\cdot\|$ über die Gleichung $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zusammenhängt. Seien nun $m, k \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben, und setzen wir $u = x - a_m$, $v = x - a_k$. Dann gilt $u+v = 2(x - \frac{1}{2}(a_m + a_k))$ und $u - v = a_k - a_m$, und die Parallelogrammgleichung liefert

$$\|a_k - a_m\|^2 \quad = \quad 2\|x-a_m\|^2 + 2\|x-a_k\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(a_m+a_k)\|^2.$$

Weil A konvex ist, liegt der Punkt $\frac{1}{2}(a_m + a_k)$ jeweils in A, und nach Definition von γ_x folgt $\|a_k - a_m\|^2 \le 2\|x - a_m\|^2 + 2\|x-a_k\|^2 - 4\gamma_x^2$. Wegen $\lim_m \|x-a_m\|^2 = \gamma_x^2$ existiert für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x-a_m\|^2 - \gamma_x^2 < \frac{1}{4}\varepsilon$ für alle $m \ge N$. Für $m, k \ge N$ ist dann $\|a_m - a_k\|^2 \le 2\|x-a_m\|^2 + 2\|x-a_k\|^2 - 4\gamma_x^2 < 2(\gamma_x^2 + \frac{1}{4}\varepsilon) + 2(\gamma_x^2 + \frac{1}{4}\varepsilon) - 4\gamma_x^2 = \varepsilon$. Dies zeigt, dass durch $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Cauchyfolge gegeben ist.

Auf Grund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$ konvergiert die Folge gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, und weil A abgeschlossen ist, ist dieser in A enthalten. Wegen $\gamma_x = \lim_m \|x-a_m\| = \|x-a\|$ nimmt die Funktion $A \to \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \|x-a\|$ also in der Tat ihr Minimum in einem $a \in A$ an, d.h. für unseren Punkt x existiert eine Bestapproximation. Aus dem Bisherigen ergibt sich unmittelbar die Eindeutigkeit der Bestapproximation. Ist nämlich $a' \in A$ ein weiterer Punkt

mit $\|x-a'\| = \gamma_x$, dann ist die Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_m = a$ für m ungerade und $a_m = a'$ für n gerade auf Grund der Ausführungen von oben eine Cauchyfolge; dies ist aber nur für $a = a'$ möglich.

Wir bezeichnen nun für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\pi_A(x)$ die eindeutig bestimmte Bestapproximation und zeigen, dass die so definierte Abbildung $\pi_A : \mathbb{R}^n \to A$ stetig ist. Für einen beliebig vorgebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_m x_m = x$; zu zeigen ist dann $\lim_m \pi_A(x_m) = \pi_A(x)$. Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_m\| < \varepsilon$ für alle $m \geq N$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei jeweils $\gamma_m = \gamma_{x_m}$. Dann gilt für alle $m \geq N$ einerseits

$$\gamma_m \quad = \quad \inf\{\|x_m - a\| \mid a \in A\} \quad \leq \quad \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\} + \|x - x_m\| \quad = \quad \gamma_x + \|x - x_m\| \quad < \quad \gamma_x + \varepsilon \quad ,$$

und andererseits auch $\gamma_x \leq \|x - \pi_A(x_m)\| \leq \|x - x_m\| + \|x_m - \pi_A(x_m)\| < \varepsilon + \gamma_m$, insgesamt also $\gamma_x \leq \|x - \pi_A(x_m)\| < \gamma_x + 2\varepsilon$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben war, ist damit $\lim_m \|x - \pi_A(x_m)\| = \gamma_x$ nachgewiesen. Dies bedeutet, dass $(\pi_A(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für x ist. Wie oben gezeigt, existiert somit ein $a' \in A$ mit $\lim_m \pi_A(x_m) = a'$, und dieser Punkt ist eine Bestapproximation von x. Auf Grund der Eindeutigkeit der Bestapproximation erhalten wir schließlich $\lim_m \pi_A(x_m) = a' = \pi_A(x)$. □

Lemma 4.10 Seien X und Y homöomorphe topologische Räume. Besitzt X die Fixpunkteigenschaft, dann gilt dasselbe für Y.

Beweis: Sei $\phi : Y \to Y$ eine stetige Abbildung und $\alpha : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist $\alpha^{-1} \circ \phi \circ \alpha$ eine stetige Abbildung $X \to X$, und weil X die Fixpunkteigenschaft besitzt, existiert ein $x \in X$ mit $(\alpha^{-1} \circ \phi \circ \alpha)(x) = x$. Setzen wir $y = \alpha(x)$, dann gilt $y \in Y$ und $(\alpha^{-1} \circ \phi)(y) = x$, also $\phi(y) = y$. □

Folgerung 4.11 Jede nichtleere kompakte konvexe Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt die Fixpunkteigenschaft.

Beweis: Sei $\bar{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Kugel mit $\bar{B} \supseteq A$. Da $\bar{B}$ zur Einheitskugel $\bar{B}^n$ homöomorph ist, besitzt $\bar{B}$ nach Lemma 4.10 die Fixpunkteigenschaft. Sei nun $\phi : A \to A$ eine stetige Abbildung, und sei $\pi_A : \mathbb{R}^n \to A$ die Abbildung aus Satz 4.9. Dann ist $\phi \circ \pi_A|_{\bar{B}}$ eine stetige Abbildung $\bar{B} \to \bar{B}$, es gibt also ein $b \in \bar{B}$ mit $(\phi \circ \pi_A)(b) = b$. Aber weil ϕ nach A abbildet, ist b in A enthalten. Nach Definition der Abbildung π_A gilt $\pi_A(a) = a$ für alle $a \in A$, denn offenbar nimmt die Funktion $A \to \mathbb{R}_+$, $a' \mapsto \|a - a'\|$ in $a' = a$ jeweils ihr Minimum 0 an. Insbesondere gilt also $\pi_A(b) = b$, und wir erhalten insgesamt $\phi(b) = b$. □

Wir werden nun den Fixpunktsatz für konvexe kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ verwenden, um einen weiteren Fixpunktsatz über Funktionen herzuleiten. Um die Verbindung herzustellen, benötigen wir den folgenden Begriff: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist $F = \{p_1, ..., p_n\} \subseteq V$ eine beliebige endliche Teilmenge, dann bezeichnet man

$$\mathrm{conv}(F) \quad = \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i p_i \;\middle|\; t_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n \,,\; \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

als ***konvexe Hülle*** der Menge F.

Proposition 4.12 Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $K \subseteq V$ eine nichtleere, kompakte Teilmenge. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$ und eine stetige Abbildung $\pi : K \to \mathrm{conv}(F)$ mit $\|\pi(x) - x\| < \varepsilon$ für alle $x \in K$.

Beweis: Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $F = \{p_1, ..., p_n\}$ von K mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(p_i)$, wobei jeweils $B_\varepsilon(p_i) = \{x \in V \| x - p_i\| < \varepsilon\}$ ist, die offene Kugel vom Radius ε um den Punkt p_i. Für $1 \leq i \leq n$ definieren wir jeweils eine Abbildung $\phi_i : K \to [0, \varepsilon]$ durch

$$\phi_i(x) \quad = \quad \begin{cases} \varepsilon - \|x - p_i\| & \text{falls } x \in B_\varepsilon(p_i) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$ offenbar stetig, und weil K von den offenen Kugel $B_\varepsilon(p_i)$ überdeckt wird, gilt $\phi(x) > 0$ für alle $x \in K$. Wir erhalten dann durch

$$\pi(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} p_i$$

eine stetige Abbildung $\pi : K \to F$, und für alle $x \in K$ gilt außerdem

$$\|\pi(x) - x\| \quad = \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} (p_i - x) \right\| \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \|p_i - x\| \quad < \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \varepsilon \quad = \quad \frac{\varepsilon}{\phi(x)} \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) \quad = \quad \varepsilon.$$

Dabei wurde im dritten Schritt verwendet, dass $\phi_i(x)$ nur dann ungleich 0 ist, wenn $\|p_i - x\| < \varepsilon$ erfüllt ist, für alle $x \in K$ und $1 \leq i \leq n$. □

Die Abbildung $\pi : K \to \text{conv}(F)$ aus Proposition 4.12 wird als ***Schauder-Projektion*** bezeichnet.

Lemma 4.13 Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge. Sei $\phi : A \to A$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\phi(A)$ relativ kompakt ist. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiere ein $a \in A$ mit $\|\phi(a) - a\| < \varepsilon$. Dann besitzt ϕ einen Fixpunkt.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung existiert in A eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_n \|\phi(a_n) - a_n\| = 0$. Weil $\overline{\phi(A)}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $(\phi(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert $a \in \overline{\phi(A)}$ besitzt. Wegen $\lim_k \|\phi(a_{n_k}) - a_{n_k}\| = 0$ gilt auch

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} \quad = \quad \lim_{k \to \infty} a_{n_k} + 0 \quad = \quad \lim_{k \to \infty} a_{n_k} + \lim_{k \to \infty} \left(\phi(a_{n_k}) - a_{n_k} \right) \quad = \quad \lim_{k \to \infty} \phi(a_{n_k}) \quad = \quad a \quad ,$$

und auf Grund der Stetigkeit von ϕ erhalten wir $\phi(a) = \lim_k \phi(a_{n_k}) = a$. □

Satz 4.14 *(Fixpunktsatz von Schauder)*

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge. Sei $\phi : A \to A$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\phi(A)$ relativ kompakt ist. Dann besitzt ϕ einen Fixpunkt.

Beweis: Sei $K = \overline{\phi(A)}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Sei $\pi : K \to \text{conv}(F)$ eine nach Proposition 4.12 zu ε passende Schauder-Projektion, mit $F \subseteq K \subseteq A$. Weil A konvex ist, gilt $\text{conv}(F) \subseteq \text{conv}(A) = A$. Durch $\psi = \pi \circ \phi|_{\text{conv}(F)}$ erhalten wir somit eine stetige Abbildung $\text{conv}(F) \to \text{conv}(F)$. Weil die Menge F endlich ist, erzeugt sie in V einen endlich-dimensionalen Untervektorraum $U = \langle F \rangle_{\mathbb{R}}$. Da je zwei Normen auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum äquivalent sind, existiert ein linearer Homöomorphismus $\alpha : U \to \mathbb{R}^n$.

Auf Grund der Linearität ist nun $C = \alpha(\mathrm{conv}(F))$ eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und wegen der Homömorphismus-Eigenschaft ist mit $\mathrm{conv}(F)$ auch C beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Nach Folgerung 4.11 besitzt die stetige Abbildung $\alpha \circ \psi \circ \alpha^{-1} : C \to C$ einen Fixpunkt; also existiert auch ein Fixpunkt $x \in \mathrm{conv}(F)$ von ψ. Nach Definition der Schauder-Projektion gilt $\|x - \phi(x)\| = \|\psi(x) - \phi(x)\| = \|\pi(\phi(x)) - \phi(x)\| < \varepsilon$. Somit kann Lemma 4.13 angewendet werden, und auf Grund des Lemmas besitzt auch ϕ einen Fixpunkt. □

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, dann bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(X,Y)$ die Menge der stetigen und mit $\mathcal{C}_b(X,Y)$ die Menge der *beschränkten* stetigen Abbildungen $X \to Y$. Ist X kompakt, dann stimmen diese beiden Mengen überein.

Proposition 4.15 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann ist auf der Menge $\mathcal{C}_b(X,Y)$ durch $d_\infty(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ eine Metrik definiert. Sie wird als ***Supremumsmetrik*** bezeichnet.

Beweis: Die drei Eigenschaften einer Metrik lassen sich unmittelbar überprüfen. Seien $f, g \in \mathcal{C}_b(X,Y)$ vorgegeben. Aus $f = g$ folgt offenbar $d_\infty(f,g) = 0$. Setzen wir dies umgekehrt voraus, dann ist 0 eine obere Schranke der Menge $\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$. Es gilt also $d_Y(f(x), g(x)) = 0$ und somit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$, woraus $f = g$ folgt. Die Gleichung $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$ ist offensichtlich erfüllt. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $f, g, h \in \mathcal{C}_b(X,Y)$. Für alle $x \in X$ gilt dann

$$d_Y(f(x), h(x)) \quad \leq \quad d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), h(x)) \quad \leq \quad d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h).$$

Dies zeigt, dass $d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$ eine obere Schranke der Menge $\{d_Y(f(x), h(x)) \mid x \in X\}$ ist, und nach Definition des Supremums folgt daraus $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$. □

Definition 4.16 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $M \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$. Man bezeichnet M als ***gleichgradig stetig***, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $x, x' \in X$ und alle $f \in M$ aus $d_X(x,x') < \delta$ jeweils $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ folgt.

Das folgende Lemma zeigt, dass der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit mit der Topologie des metrischen Raums $\mathcal{C}(X,Y)$ in enger Verbindung steht.

Lemma 4.17 Sei (X, d_X) ein kompakter und (Y, d_Y) ein beliebiger metrischer Raum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich d_∞ konvergente Folge in $\mathcal{C}(X,Y)$. Dann ist die Menge $M = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, und sei $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ der Grenzwert der Folge. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_\infty(f, f_n) < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Weil X kompakt ist, sind alle Folgenglieder gleichmäßig stetig. Für $1 \leq n < N$ existiert deshalb jeweils ein $\delta_n \in \mathbb{R}^+$, so dass die Implikation $d_X(x,x') < \delta_n \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon$ für alle $x, x' \in X$ erfüllt ist. Ebenso finden wir ein $\delta' \in \mathbb{R}^+$, so dass $d_X(x,x') < \delta' \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon$ für $x, x' \in X$ gilt. Sei nun

$$\delta \quad = \quad \min\{\delta', \delta_1, \delta_2, ..., \delta_{N-1}\}.$$

Wir zeigen, dass für alle $g \in M$ die Implikation $d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(g(x),g(x')) < \varepsilon$ erfüllt ist, woraus sich die gleichgradige Stetigkeit der Menge M ergibt. Sei $g \in M$, also $g = f_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Im Fall $n < N$ ist die Implikation offenbar erfüllt, denn sind $x, x' \in X$ mit $d_X(x,x') < \delta$ vorgegeben, dann gilt erst recht $d_X(x,x') < \delta_n$ und somit $\delta_Y(f(x),f(x')) < \varepsilon$.

Setzen wir nun $n \geq N$ voraus, und seien erneut $x, x' \in X$ mit $d_X(x,x') < \delta$ vorgegeben. Wegen $d_X(x,x') < \delta'$ gilt dann $d_Y(f(x),f(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Wegen $d_\infty(f,f_n) < \frac{1}{3}\varepsilon$ gilt außerdem $d_Y(f(x),f_n(x)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $d_Y(f(x'),f_n(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Insgesamt erhalten wir damit auch hier

$$d_Y(f_n(x),f_n(x')) \quad = \quad d_Y(f_n(x),f(x)) + d_Y(f(x),f(x')) + d_Y(f(x'),f_n(x')) \quad < \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon. \quad \square$$

Für den nachfolgenden Satz benötigen wir noch eine Aussage, die als Verallgemeinerung des Satzes von Heine-Borel auf metrische Räume angesehen werden kann. Sie basiert auf dem folgenden Begriff.

Definition 4.18 Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X,d) bezeichnet man als ***total beschränkt***, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, \ldots, x_n \in A$ existieren, so dass A von den endlich vielen offenen Bällen $B_\varepsilon(x_j) = \{x \in X \mid d(x_j,x) < \varepsilon\}$ überdeckt wird, also $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$ gilt.

Jede Teilmenge $B \subseteq A$ einer total beschränkten Menge ist wiederum total beschränkt. Sei nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, und seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit $\bigcup_{j=1}^n B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_j) \supseteq A$. Dann ist diese Vereinigung auch eine Obermenge von B. Wir finden somit auch ein $m \in \mathbb{N}$ und $y_1, \ldots, y_m \in A$ mit $\bigcup_{k=1}^m B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y_k) \supseteq B$ und $B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y_k) \cap B \neq \emptyset$. Wählen wir nun für jedes k einen Punkt $z_k \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y_k) \cap B$, dann gilt auch $\bigcup_{k=1}^m B_\varepsilon(z_k) \supseteq B$, was zeigt, dass B total beschränkt ist. Ist nämlich $y \in B$ beliebig vorgegeben, dann gilt $y \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y_k)$ für ein $k \in \{1, \ldots, m\}$. Es folgt dann $d(z_k,y) \leq d(z_k,y_k) + d(y_k,y) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ und somit $y \in B_\varepsilon(z_k)$.

Das Analogon des Satzes von Heine-Borel lautet nun

Satz 4.19 Ein metrischer Raum (X,d) ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.

Beweis: „⇐“ Nehmen wir an, dass X vollständig und total beschränkt, aber nicht kompakt ist. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X ohne endliche Teilüberdeckung. Wir zeigen, dass eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X existiert mit der Eigenschaft, dass die abgeschlossene Kugel $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ vom Radius 2^{-n} jeweils nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden kann.

Auf Grund der totalen Beschränktheit existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit $X = \bigcup_{k=1}^m B_{2^{-1}}(x_k) = \bigcup_{k=1}^m \bar{B}_{2^{-1}}(x_k)$. Würde für jede der abgeschlossenen Kugeln $\bar{B}_{2^{-1}}(x_k)$ eine endliche Teilmenge $J_k \subseteq I$ mit $\bigcup_{i \in J_k} U_i \supseteq \bar{B}_{2^{-1}}(x_k)$ existieren, dann wäre $(U_i)_{i \in J}$ mit $J = J_1 \cup \ldots \cup J_k$ eine endliche Teilüberdeckung der gesamten Menge X, im Widerspruch zur Voraussetzung. So aber existiert ein k mit der Eigenschaft, dass $\bar{B}_{2^{-1}}(x_k)$ nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden kann, und wir können $y_1 = x_k$ setzen.

Nehmen wir nun an, dass $y_1, ..., y_n$ bereits konstruiert sind. Mit X ist auch der Teilraum $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ total beschränkt. Wir finden somit ein (neues) $m \in \mathbb{N}$ und (neue) $x_1, ..., x_m \in \bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$, so dass

$$\bigcup_{k=1}^{m} \bar{B}_{2^{-(n+1)}}(x_k) \quad \supseteq \quad \bigcup_{k=1}^{m} B_{2^{-(n+1)}}(x_k) \quad \supseteq \quad \bar{B}_{2^{-n}}(y_n).$$

Würde für $1 \leq k \leq m$ jeweils eine endliche Teilmenge $J_k \subseteq I$ mit $\bigcup_{i \in J_k} U_i \supseteq \bar{B}_{2^{-(n+1)}}(x_k)$ existieren, dann wäre $(U_i)_{i \in J}$ mit $J = J_1 \cup ... \cup J_k$ insgesamt eine endliche Überdeckung von $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$, was der Definition von y_n widerspricht. Besitzt $\bar{B}_{2^{-(n+1)}}(x_k)$ nun keine Überdeckung durch endlich viele U_i, dann können wir wiederum $y_{n+1} = x_k$ definieren.

Die Konstruktion der Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist damit abgeschlossen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition jeweils $y_{n+1} \in \bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ und somit $d(y_n, y_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt somit

$$d(y_n, y_{n+k}) \quad \leq \quad \sum_{j=0}^{k-1} d(y_{n+j}, y_{n+j+1}) \quad \leq \quad \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-(n+j)} \quad = \quad 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} \quad < \quad 2^{1-n}.$$

Dies zeigt, dass es sich bei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um eine Cauchyfolge in X handelt, und auf Grund der Vollständigkeit existiert ein Grenzwert $y = \lim_n y_n \in X$. Auf Grund der Überdeckungseigenschaft gilt $y \in U_{i_0}$ für ein $i \in I_0$. Weil U_{i_0} offen ist, gilt $B_\delta(y) \subseteq U_{i_0}$ für ein $\delta \in \mathbb{R}^+$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $2^{-n} < \frac{1}{2}\delta$ und $d(y, y_n) < \frac{1}{2}\delta$ erfüllt sind. Dann gilt $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n) \subseteq U_{i_0}$, denn für jedes $z \in \bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ ist $d(y_n, z) \leq 2^{-n} < \frac{1}{2}\delta$, damit $d(y, z) \leq d(y, y_n) + d(y_n, z) < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$ und damit $z \in B_\delta(y) \subseteq U_{i_0}$. Aber die Inklusion $U_{i_0} \supseteq \bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ steht im Widerspruch zur Aussage, dass die abgeschlossene Kugel $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann.

„⇒“ Setzen wir voraus, dass X kompakt ist, und beweisen wir zunächst die totale Beschränktheit. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann handelt es sich bei $(B_\varepsilon(x))_{x \in X}$ um eine offene Überdeckung von X, und auf Grund der Kompaktheit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j)$.

Zum Beweis der Vollständigkeit sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Auf Grund der Kompaktheit existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{n_k}$. Der Grenzwert $x = \lim_k x_{n_k}$ ist zugleich Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existieren ein $K \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $k \geq K$ und auf Grund der Cauchyfolgen-Eigenschaft ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $m, n \geq N_1$. Sei nun $k \geq K$ so gewählt, dass $n_k \geq N_1$ erfüllt ist, und sei $n \geq N_1$. Dann gilt einerseits $n, n_k \geq N_1$ und somit $d(x_{n_k}, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und andererseits $k \geq K$ und somit $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon$, insgesamt also $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Dies zeigt, dass tatsächlich $\lim_n x_n = x$ gilt. □

Satz 4.20 *(Satz von Arzela-Ascoli)*

Es sei (X, d_X) ein kompakter und (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ ist genau dann kompakt bezüglich der Supremumsmetrik d_∞, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für alle $x \in X$ ist $M(x) = \{f(x) \mid f \in M\} \subseteq Y$ relativ kompakt.

(ii) Die Menge M ist gleichgradig stetig.

(iii) Die Menge M ist abgeschlossen.

Beweis: „⇐“ Sei $M \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ eine abgeschlossene, gleichgradig stetige Teilmenge mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Menge $M(x)$ für alle $x \in X$ relativ kompakt ist. Nach Satz 4.19 genügt es zu zeigen, dass M vollständig und

total beschränkt ist. Für die Vollständigkeit genügt es zu zeigen, dass der metrische Raum $\mathcal{C}(X,Y)$ vollständig ist, denn auf Grund der Abgeschlossenheit von M folgt daraus auch die Vollständigkeit von M.

Der Nachweis der Vollständigkeit von $\mathcal{C}(X,Y)$ läuft vollkommen analog zum Beweis von Lemma 3.7. Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}(X,Y)$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ ein $N\in\mathbb{N}$, so dass $d_\infty(f_m,f_n)<\varepsilon$ für alle $m,n\geq N$ erfüllt ist. Es folgt $d_Y(f_m(x),f_n(x))<\varepsilon$ für alle $x\in X$ und alle $m,n\geq N$, d.h. die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für jedes $x\in I$ eine Cauchyfolge in Y. Da der metrische Raum Y nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $f(x)\in Y$. Zu zeigen ist, dass die auf diese Weise definierte Funktion $f:X\to Y$ stetig und ein Grenzwert der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(X,Y)$ ist.

Wir beweisen die Stetigkeit von f mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums. Seien $x_0\in X$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $N\in\mathbb{N}$ mit $d_\infty(f_m,f_n)<\frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $m,n\geq N$. Auf Grund der Stetigkeit von d_Y gilt für alle $x\in X$ jeweils

$$d_Y(f_N(x),f(x)) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} d_Y(f_N(x),f_n(x)) \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} d_\infty(f_N,f_n) \quad \leq \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Weil die Funktion f_N im Punkt x_0 stetig ist, existiert ein $\delta\in\mathbb{R}^+$, so dass $d_Y(f_N(x_0),f_N(x))<\frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $x\in X$ mit $d_X(x_0,x)<\delta$ erfüllt ist. Für alle $x\in X$ mit dieser Eigenschaft erhalten wir dann

$$d_Y(f(x_0),f(x)) \quad \leq \quad d_Y(f(x_0),f_N(x_0))+d_Y(f_N(x_0),f_N(x))+d_Y(f_N(x),f(x)) \quad < \quad \tfrac{1}{3}\varepsilon+\tfrac{1}{3}\varepsilon+\tfrac{1}{3}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon \quad ,$$

wodurch die Stetigkeit von f nachgewiesen ist. Wir wenden nun die Cauchyfolgen-Eigenschaft noch einmal an, um zu zeigen, dass f der Grenzwert der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(X,Y)$ ist. Für jedes $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit $d_\infty(f_m,f_n)<\varepsilon$ für alle $m,n\geq N$. Für alle $x\in X$ und alle $m,n\geq N$ gilt also $d_Y(f_m(x),f_n(x))<\varepsilon$. Durch Grenzüberang $n\to\infty$ erhalten wir jeweils $d_Y(f_m(x),f(x))\leq\varepsilon$ für alle $x\in X$. Es gilt also $d_\infty(f,f_m)\leq\varepsilon$ für alle $m\geq N$. Somit ist f tatsächlich der Grenzwert der Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(X,Y)$. Der Nachweis der Vollständigkeit des metrischen Raums $\mathcal{C}(X,Y)$ ist damit abgeschlossen.

Nun zeigen wir, dass M eine total beschränkte Teilmenge von $\mathcal{C}(X,Y)$ ist. Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der gleichgradigen Stetigkeit gibt es für jedes $x\in X$ ein $\delta_x\in\mathbb{R}^+$, so dass für alle $f\in M$ und für alle $x'\in X$ jeweils die Implikation $d_X(x,x')<\delta_x\Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\frac{1}{8}\varepsilon$ erfüllt ist. Da es sich bei $(B_{\delta_x}(x))_{x\in X}$ um eine offene Überdeckung von X handelt, existieren auf Grund der Kompaktheit ein $r\in\mathbb{N}$ und Punkte $x_1,\ldots,x_r\in X$ mit $X=\bigcup_{j=1}^r B_{\delta_{x_j}}(x_j)$.

Nach Voraussetzung ist $M(x_j)\subseteq Y$ relativ kompakt, für $1\leq j\leq r$. Damit ist $K_M=\bigcup_{j=1}^r\overline{M(x_j)}$ eine kompakte Teilmenge von Y. Wir können aus der offenen Überdeckung $(B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y))_{y\in K_M}$ eine endliche Teilüberdeckung wählen und erhalten somit ein $s\in\mathbb{N}$ und Punkte $y_1,\ldots,y_s\in K_M$ mit $\bigcup_{k=1}^s B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_k)\supseteq K_M$. Für jede Abbildung $\varphi:\{1,\ldots,r\}\to\{1,\ldots s\}$ betrachten wir nun die Teilmenge $M_\varphi\subseteq M$ gegeben durch

$$M_\varphi \quad = \quad \{f\in M\mid f(x_j)\in B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_{\varphi(j)}) \text{ für } 1\leq j\leq r\}.$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige $f,g\in M_\varphi$ jeweils $d_\infty(f,g)<\frac{1}{2}\varepsilon$ gilt. Sei dazu $x\in X$ vorgegeben und $j\in\{1,\ldots,r\}$ mit $x\in B_{\delta_{x_j}}(x_j)$. Aus $d_X(x_j,x)<\delta_{x_j}$ folgen $d_Y(f(x_j),f(x))<\frac{1}{8}\varepsilon$ und $d_Y(g(x_j),g(x))<\frac{1}{8}\varepsilon$. Wegen $f,g\in M_\varphi$ sind $f(x_j)$ und $g(x_j)$ beide in $B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_{\varphi(j)})$ enthalten. Daraus folgt $d_Y(f(x_j),g(x_j))\leq d_Y(y_{\varphi(j)},f(x_j))+d_Y(y_{\varphi(j)},g(x_j))<\frac{1}{8}\varepsilon+\frac{1}{8}\varepsilon=\frac{1}{4}\varepsilon$. Insgesamt erhalten wir

$$d_Y(f(x),g(x)) \quad \leq \quad d_Y(f(x),f(x_j))+d_Y(f(x_j),g(x_j))+d_Y(g(x_j),g(x)) \quad < \quad \tfrac{1}{8}\varepsilon+\tfrac{1}{4}\varepsilon+\tfrac{1}{8}\varepsilon \quad = \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Weil $x\in X$ beliebig vorgegeben war, gilt nach Definition der Supremumsmetrik also $d_\infty(f,g)\leq\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$. Wählen wir nun ein beliebiges $f_\varphi\in M_\varphi$, dann gilt also $M_\varphi\subseteq B_\varepsilon(f_\varphi)$. Außerdem gilt $M=\bigcup_\varphi M_\varphi$. Ist nämlich $f\in M$

beliebig vorgegeben, dann liegt $f(x_j)$ für $1 \leq j \leq r$ jeweils in $M(x_j) \subseteq K_M$, es gibt also jeweils ein $k_j \in \{1,...,s\}$ mit $f(x_j) \in B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_{k_j})$. Definieren wir die Funktion φ durch $\varphi(j) = k_j$ für $1 \leq j \leq r$, dann ist f also in M_φ enthalten. Damit ist gezeigt, dass M durch die Menge $\bigcup_\varphi B_\varepsilon(f_\varphi)$ vollständig überdeckt wird. Weil nur endliche viele Abbildungen φ existieren, ist damit die totale Beschränktheit von M nachgewiesen.

„⇒“ Als metrischer Raum ist $\mathcal{C}(X,Y)$ insbesondere hausdorffsch. Aus der Kompaktheit von M folgt somit die Abgeschlossenheit; die Bedingung (iii) ist also erfüllt. Die Bedingung (ii) zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis. Nehmen wir an, dass M nicht gleichgradig stetig ist. Dann existieren ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sowie Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, so dass $d_X(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f_n(x_n),f_n(y_n)) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathcal{C}(X,Y)$ konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen Lemma 4.17 ist die Menge $\{f_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ dann gleichgradig stetig; es gibt also ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x,y \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Implikation $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f_{n_k}(x),f_{n_k}(y)) < \varepsilon$ erfüllt ist. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $\frac{1}{n_k} < \delta$ ist. Dann gilt einerseits $d_X(x_{n_k},y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \delta$, andererseits aber $d_Y(f_{n_k}(x_{n_k}),f_{n_k}(y_{n_k})) \geq \varepsilon$. Die Implikation ist für das Paar (x_{n_k},y_{n_k}) also *nicht* erfüllt. Der Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war und (ii) somit erfüllt ist.

Kommen wir nun zum Nachweis der Bedingung (i). Sei dazu $x \in X$ vorgegeben. Wegen Satz 4.19 genügt es zu zeigen, dass $\overline{M(x)}$ total beschränkt ist, denn als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raums Y ist $\overline{M(x)}$ auf jeden Fall vollständig. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der totalen Beschränktheit von M gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ und Funktionen $f_1,...,f_r \in \mathcal{C}(X,Y)$ mit $\bigcup_{j=1}^r B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(f_j) \supseteq M$, wobei $B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(f_j)$ jeweils den offenen Ball um f_j bezüglich d_∞ vom Radius $\frac{1}{2}\varepsilon$ bezeichnet. Wie man leicht überprüft, gilt dann $M(x) \subseteq \bigcup_{j=1}^r B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(f_j(x))$, wobei $B_\varepsilon(f_j(x))$ diesmal für den offenen Ball bezüglich d_Y steht. Ist nämlich $y \in M(x)$ vorgegeben, dann existiert ein $f \in M$ mit $f(x) = y$. Desweiteren gibt es ein $j \in \{1,...,r\}$ mit $f \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(f_j)$. Es gilt dann $d_Y(f_j(x),y) = d_Y(f_j(x),f(x)) = d_\infty(f_j,f) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und somit $y \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(f_j(x))$. Aus der soeben bewiesenen Inklusion folgt, dass $\overline{M(x)}$ in der Vereinigung $\bigcup_{j=1}^r \bar{B}_{\frac{1}{2}\varepsilon}(f_j(x))$ der abgeschlossenen Bälle vom Radius $\frac{1}{2}\varepsilon$ liegt, und erst recht $\overline{M(x)} \subseteq \bigcup_{j=1}^r B_\varepsilon(f_j(x))$. Damit ist die totale Beschränktheit von $\overline{M(x)}$ nachgewiesen. □

Satz 4.21 *(Existenzsatz von Peano, lokale Version)*

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a,b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x,y)$ und (a,b) definierte Anfangswertproblem ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung $\varphi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{K}^n$.

Beweis: Wie zuvor beschränken wir uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Auf Grund der Offenheit von D gibt es $\rho,\sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $[a-\rho, a+\rho] \times \bar{B}_\sigma(b) \subseteq D$, wobei $\bar{B}_\sigma(b) \subseteq \mathbb{K}^n$ die abgeschlossene Kugel vom Radius σ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bezeichnet. Ist die Einschränkung von f auf $[a-\rho, a+\rho] \times \bar{B}_\sigma(b)$ gleich null, dann ist die konstante Funktion $\varphi :]a-\rho, a+\rho[\to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\varphi(a) = b$ eine Lösung. Ansonsten ist $\kappa = \sup\{\|f(x,y)\|_\infty \mid (x,y) \in [a-\rho, a+\rho] \times \bar{B}_\sigma(b)\}$ eine positive reelle Konstante. Sei $\delta = \min\{\rho, \frac{\sigma}{\kappa}\}$, $\bar{I} = [a-\delta, a+\delta]$ und

$$A \quad = \quad \{\varphi \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi - b\|_\infty \leq \sigma\} \quad ,$$

wobei wir b mit der konstanten Funktion $\bar{I} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto b$ identifizieren. Es handelt sich im normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ um die abgeschlossene Kugel um den Punkt b vom Radius σ, und als solche ist sie nichtleer, abgeschlossen und konvex. Wir betrachten nun die Funktion $G : A \to \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$G(\varphi)(t) \quad = \quad b + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Dass die Funktion $G(\varphi)$ jeweils wieder stetig ist, sogar stetig differenzierbar, folgt aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Darüber hinaus liegt $G(\varphi)$ für alle $\varphi \in A$ wiederum in A, denn es gilt jeweils

$$\|G(\varphi)-b\|_\infty \quad \leq \quad \sup\left\{\int_a^t \|f(s,\varphi(s))\|_\infty\, ds\right\} \quad \leq \quad \sup\left\{\int_a^t \kappa\, ds\right\} \quad \leq \quad \kappa\delta \quad \leq \quad \sigma.$$

Als Abbildung ist $G : A \to A$ stetig. Ist nämlich $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen ein Element $\varphi \in A$ konvergiert, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \bar{I}$ die Abschätzung

$$\|G(\varphi_n)(t)-G(\varphi)(t)\|_\infty \quad \leq \quad \int_a^t \|f(s,\varphi_n(s))-f(s,\varphi(s))\|_\infty\, ds \quad \leq \quad \int_a^t 2\kappa\, ds \quad \leq \quad 2\sigma.$$

Wegen $\lim_n \|\varphi_n-\varphi\|_\infty = 0$ gilt $\lim_n \varphi_n(t) = \varphi(t)$ und auf Grund der Stetigkeit von f auch $\lim_n \|f(t,\varphi_n(t))-f(t,\varphi(t))\|_\infty = 0$ für alle $t \in \bar{I}$. Nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^t \|f(s,\varphi_n(s))-f(s,\varphi(s))\|_\infty\, ds \quad = \quad 0 \quad ,$$

und damit auch $\|G(\varphi_n)(t)-G(\varphi)(t)\|_\infty = 0$, also $\lim_n G(\varphi_n) = G(\varphi)$ in A.

Wir überprüfen nun die Voraussetzungen des Satzes 4.20 von Arzela-Ascoli für die Teilmenge $M = \overline{G(A)}$ von $\mathcal{C}(\bar{I},\mathbb{R}^n)$. Offenbar ist $\bar{I}$ kompakt und $\mathbb{R}^n$ vollständig. Die Teilmenge M ist abgeschlossen in $\mathcal{C}(\bar{I},\mathbb{R}^n)$, Bedingung (iii) also erfüllt. Mit A ist auch $G(A)$ in der abgeschlossenen Kugel vom Radius σ um b erhalten. Also gilt dasselbe für $\overline{G(A)}$. Für alle $\varphi \in \overline{G(A)}$ gilt somit $\|\varphi-b\|_\infty \leq \sigma$. Es folgt $M(t) = \overline{G(A)}(t) \in B_\sigma(b)$ für alle $t \in \bar{I}$. Dies zeigt, dass $M(t)$ für alle $t \in \bar{I}$ relativ kompakt, Bedingung (i) also ebenfalls erfüllt ist.

Kommen wir nun zur Überprüfung von Bedingung (ii), der gleichgradigen Stetigkeit. Seien $t, t' \in \bar{I}$ mit $t < t'$ vorgegeben. Für alle $\varphi \in A$ gilt dann

$$\|G(\varphi)(t)-G(\varphi)(t')\|_\infty \quad = \quad \left\|\int_t^{t'} f(s,\varphi(s))\, ds\right\| \quad \leq \quad \int_t^{t'} \kappa\, ds \quad \leq \quad \kappa(t'-t).$$

Setzen wir für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2\kappa}$, dann ist $\|G(\varphi)(t)-G(\varphi)(t')\|_\infty \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ für alle $t, t' \in \bar{I}$ mit $|t-t'| < \delta_1$ erfüllt. (Man kann also sogar von gleichgradiger Lipschitz-Stetigkeit sprechen.)

Insgesamt sind also die Voraussetzungen des Satzes 4.20 erfüllt, und die Teilmenge $G(A) \subseteq \mathcal{C}(\bar{I},\mathbb{R}^n)$ ist relativ kompakt. Der Schaudersche Fixpunktsatz, Satz 4.14, liefert nun ein Element $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{I},\mathbb{R}^n)$ mit $G(\varphi) = \varphi$. Für alle $t \in \bar{I}$ gilt $\varphi(t) = b + \int_a^t f(s,\varphi(s))\, ds$. Es gilt also $\varphi(a) = b$, und durch Differentiation erhält man $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ für alle $t \in I$. Aus $\|\varphi-b\|_\infty \leq \sigma$ folgt außerdem $(t,\varphi(t)) \in \bar{I} \times \bar{B}_\sigma(b)$ und somit $(t,\varphi(t)) \in D$ für alle $t \in I$. Damit ist die Existenz einer Lösung des AWP in D nachgewiesen. □

Um aus der lokalen Version des Existenzsatzes von Peano die globale Version zu erhalten, benötigen wir ein Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Ist $(X,\preceq)$ eine Halbordnung, so bezeichnen wir eine Teilmenge $T \subseteq X$ als ***totalgeordnet***, wenn je zwei Elemente $x, y \in T$ miteinander vergleichbar sind, also jeweils $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt.

Satz 4.22 *(Zornsches Lemma)*

Sei $(X,\preceq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede totalgeordnete Teilmenge von X eine obere Schranke in X besitzt. Dann existiert in X ein maximales Element.

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas zeigen wir nun

Satz 4.23 *(Existenzsatz von Peano, globale Version)*

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a,b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x,y)$ und (a,b) definierte Anfangswertproblem eine maximale Lösung.

Beweis: Sei $\mathcal{L}$ die Menge *aller* Lösungen des AWP, also die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$, mit $\varphi(a) = b$ und $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $a \in I$. Auf Grund des lokalen Existenzsatzes ist die Menge $\mathcal{L}$ nichtleer. Wir definieren auf $\mathcal{L}$ eine Relation $\preceq$, indem wir festlegen, dass für zwei Elemente $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ und $\psi : J \to \mathbb{K}^n$ aus $\mathcal{L}$ genau dann $\varphi \preceq \psi$ gelten soll, wenn die Bedingungen $I \subseteq J$ und $\psi|_I = \varphi$ erfüllt sind. Um zu zeigen, dass $\preceq$ eine Halbordnung ist, seien φ und ψ wie angegeben und $\xi : K \to \mathbb{K}^n$ ein weiteres Element aus $\mathcal{L}$. Wegen $I \subseteq I$ und $\varphi|_I = \varphi$ gilt $\varphi \preceq \varphi$. Setzen wir $\varphi \preceq \psi$ und $\psi \preceq \varphi$ voraus, dann gilt $I \subseteq J$ und $J \subseteq I$, also $I = J$, und außerdem $\psi = \psi|_J = \psi|_I = \varphi$. Gilt $\varphi \preceq \psi$ und $\psi \preceq \xi$, dann gilt $K \supseteq J \supseteq I$, und aus $\psi|_I = \varphi$ und $\xi|_J = \psi$ folgt $\xi|_I = (\xi|_J)|_I = \psi|_I = \varphi$, insgesamt also $\varphi \preceq \xi$.

Sei nun $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$ eine totalgeordnete Teilmenge, deren Elemente wir durch eine Indexmenge Z kennzeichnen. Es sei also $\mathcal{T} = \{\varphi_z : I_z \to \mathbb{K}^n \mid z \in Z\}$. Wir setzen $I = \bigcup_{z \in Z} I_z$ und definieren eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$, indem wir für jedes $t \in I$ ein beliebiges $z \in Z$ mit $t \in I_z$ wählen und $\varphi(t) = \varphi_z(t)$ setzen. Diese Definition ist von der Wahl des Elements z unabhängig. Sei nämlich $z' \in Z$ ein weiteres Element mit $t \in I_{z'}$. Weil $\mathcal{T}$ totalgeordnet ist, gilt $\varphi_z \preceq \varphi_{z'}$ oder $\varphi_{z'} \preceq \varphi_z$. Im ersten Fall ist $\varphi_{z'}|_{I_z} = \varphi_z$, im zweiten $\varphi_z|_{I_{z'}} = \varphi_{z'}$; wegen $t \in I_z \cap I_{z'}$ erhalten wir in beiden Fällen die Gleichung $\varphi_z(t) = \varphi_{z'}(t)$.

Die Funktion φ ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig differenzierbar und stellt dort eine Lösung des Anfangswertproblems dar. Ist nämlich $t \in I$ beliebig vorgegeben, dann existiert ein $z \in Z$ mit $t \in I_z$, und nach Konstruktion stimmen φ und φ_z auf I_z überein. Die Funkton $\varphi_z = \varphi|_{I_z}$ ist auf ganz I_z differenzierbar, also insbesondere im Punkt t, und sie erfüllt dort die Gleichung $\varphi'(t) = \varphi_z'(t) = f(t, \varphi_z(t)) = f(t, \varphi(t))$. Das Intervall I_z enthält den Punkt a, und es gilt $\varphi(a) = \varphi_z(a) = b$. Dies zeigt, dass φ in $\mathcal{L}$ enthalten ist, und wegen $\varphi_z = \varphi|_{I_z}$ gilt $\varphi \succeq \varphi_z$, für jedes $z \in Z$. Das Element φ ist also eine obere Schranke der Menge $\mathcal{T}$ in $\mathcal{L}$. Insgesamt sind damit alle Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt. Es existiert also eine maximales Elemment in $\mathcal{L}$, dies ist eine maximale Lösung. □

Die Aussage von Satz 3.14 bleibt auch ohne die Annahme einer lokalen Lipschitz-Bedingung gültig, denn beim Beweis des zu Grunde liegenden Lemmas 3.13 wurde lediglich der lokale Existenzsatz, Satz 3.9, verwendet, der nun durch Satz 4.21 ersetzt werden kann. Auf diese Weise erhalten wir den Existenzsatz von Peano in der Formulierung von Satz 4.1.

Das maximale Element, von dem im Zornschen Lemma die Rede ist, ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Es kann mehrere maximale Elemente geben, die dann natürlich nicht miteinander vergleichbar sind. Dementsprechend ist auch die maximale Lösung im Existenzsatz von Peano nicht eindeutig. Bereits in § 1 hatten wir die Differenzialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$ betrachtet und dort festgestellt, dass für ein beliebig gewähltes $a \in \mathbb{R}$ jeweils unendlich viele Lösungen φ_{bc} durch den Punkt $(a,0)$ gibt, die alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Bezüglich der Halbordnung $\preceq$, die im Beweis von Satz 4.23 verwendet wurde, sind diese Lösungen alle maximal, aber je zwei verschiedene solche Lösungen sind nicht miteiander vergleichbar.

Anhang: Beweis des Satzes von Stone-Weierstrass

Lemma 4.24 Es existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Polynomfunktionen, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ konvergiert.

Beweis: Wir definieren die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $p_0(t) = 0$ und $p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2) + p_n(t)$. Wir zeigen nun durch vollständige Induktion, dass $0 \le p_n(t) \le \sqrt{t}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [0,1]$ erfüllt ist. Für $n = 0$ ist die Aussage offenbar erfüllt, und setzen wir sie für n voraus, dann folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - p_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - \tfrac{1}{2}(t - p_n(t)^2) + p_n(t) = (\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\ &\ge (\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \tfrac{1}{2}\cdot 2 \cdot \sqrt{t}) \ge 0 \quad ,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwenden wurde. Es folgt $p_{n+1}(t) \le \sqrt{t}$ für alle $t \in [0,1]$, und offenbar ist auch $p_{n+1}(t) \ge 0$ für alle $t \in [0,1]$ erfüllt. Darüber hinaus gilt für alle $t \in [0,1]$ auch $p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2) \ge p_n(t)$. Die Folge $(p_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für alle $t \in [0,1]$ also monoton wachsend, andererseits aber durch $\sqrt{t}$ nach oben beschränkt. Die Folge ist also jeweils konvergent. Bezeichnen wir den punktweisen Limes der Folge $(p_n|_{[0,1]})_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit p, dann gilt für alle $t \in [0,1]$ jeweils

$$p(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}(t - p_n(t)^2) + p_n(t)\right) = \tfrac{1}{2}(t - p(t)^2) + p(t) \quad ,$$

was zu $\frac{1}{2}(t - p(t)^2) = 0$ und $p(t)^2 = t$, also $p(t) = \sqrt{t}$, umgeformt werden kann. Nach dem Satz von Dini impliziert die punktweise Konvergenz einer monotonen Folge stetiger Funktionen auf der kompakten Teilmenge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ gegen eine stetige Grenzfunktion auch die gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$. □

Lemma 4.25 Sei $\bar{A}$ der topologische Abschluss von A in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Für beliebige Elemente $f, g \in A$ sind die Funktionen $|f|$, $\min(f,g)$ und $\max(f,g)$ in $\bar{A}$ enthalten.

Beweis: Sei $f \in A$ vorgegeben. Nach dem Maximumsprinzip ist f auf der kompakten Menge X durch eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ beschränkt, und es gilt $0 \le \gamma^{-2} f(x)^2 \le 1$ für alle $x \in X$. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge von Polynomfunktionen aus Lemma 4.24. Dann bilden die Elemente $f_n(x) = p_n(\gamma^{-2} f(x)^2)$ eine Folge in A, die auf X gleichmäßig gegen $\gamma^{-1}|f|$ konvergiert. Die Folge $(\gamma f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert damit gleichmäßig gegen $|f|$. Damit ist $|f| \in \bar{A}$ nachgewiesen. Es ist leicht zu sehen, dass mit A auch die Elemente von $\bar{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ bilden. Mit $|f|$ sind auch $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ und $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ in $\bar{A}$ enthalten. □

Wir können nun den Beweis des Approximationssatzes abschließen. Zunächst bemerken wir, dass aus der Punktetrennungs-Eigenschaft folgt, dass beliebige $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \ne x_2$ und für beliebige Werte $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jeweils ein $g \in A$ mit $g(x_1) = c_1$ und $g(x_2) = c_2$ existiert. Denn auf Grund der Eigenschaft gibt es zumindest ein $h \in A$ mit $h(x_1) \ne h(x_2)$. Die Funktion $h_0 = (h(x_2) - h(x_1))^{-1} \cdot h \in A$ erfüllt dann $h_0(x_1) = 0$ und $h_0(x_2) = 1$. Das Element $g = c_1 + (c_2 - c_1)h_0$ hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Seien nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $f \in A$ vorgegeben. Unser Ziel ist der Nachweis, dass ein $g \in A$ mit $d_\infty(f,g) < 2\varepsilon$ existiert. Zunächst aber zeigen wir, dass zu jedem Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung $U_p \subseteq X$ und ein $f_p \in \bar{A}$ mit

$$f_p(x) < f(x) + \varepsilon \text{ für alle } x \in X \qquad \text{und} \qquad f_p(x) > f(x) - \varepsilon \text{ für alle } x \in U_p$$

existieren. Sei dazu $p \in X$ vorgegeben. Wie soeben gezeigt, existiert für jedes $q \in X$ ein $f_{p,q} \in A$ mit $f_{p,q}(p) = f(p)$ und $f_{p,q}(q) = f(q)$. Wir definieren nun

$$U_{p,q} = \{x \in X \mid f_{p,q}(x) < f(x) + \varepsilon\} \qquad \text{und} \qquad V_{p,q} = \{x \in X \mid f_{p,q}(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

Auf Grund der Stetigkeit von $f_{p,q}$ und f sind dies offene Teilmengen von X. Der Durchschnitt $U_{p,q} \cap V_{p,q}$ ist nicht leer, weil er jeweils die Punkte p und q enthält. Weil X kompakt ist und die Mengen $\{U_{p,q}\}_{q \in X}$ eine offene Überdeckung von X bilden, existieren ein $r \in \mathbb{N}$ und $q_1, ..., q_r \in X$ mit $X = \bigcup_{j=1}^{r} U_{p,q_j}$. Definieren wir $f_p = \min\{f_{p,q_j} \mid 1 \leq j \leq r\}$, dann gilt $f_p(x) \leq f_{p,q_j}(x) < f(x) + \varepsilon$ für jedes $x \in U_{p,q_j}$, und somit $f_p(x) < f(x) + \varepsilon$ für alle $x \in X$. Setzen wir $U_p = \bigcap_{j=1}^{r} V_{p,q_j}$, dann gilt ebenso $f_p(x) > f_{p,q_j}(x) > f(x) - \varepsilon$ für alle $x \in V_{p,q_j}$ und $1 \leq j \leq r$, insbesondere also $f_p(x) > f(x) - \varepsilon$ für alle $x \in U_p$.

Im nächsten Schritt zeigen wir nun, dass ein $h \in \bar{A}$ mit $d_\infty(f,h) < \varepsilon$ existiert. Die Mengen $(U_p)_{p \in X}$ bilden eine offene Überdeckung von X. Es gibt also ein $s \in \mathbb{N}$ und Punkte $p_1, ..., p_s \in X$ mit $\bigcup_{j=1}^{s} U_{p_j} = X$. Nach Lemma 4.25 ist $h = \max\{f_{p_j} \mid 1 \leq j \leq s\}$ in $\bar{A}$ enthalten, und es gilt $h(x) < f(x) + \varepsilon$ für alle $x \in X$. Für $1 \leq j \leq s$ und $x \in U_{p_j}$ gilt andererseits $h(x) \geq f_{p_j}(x) > f(x) - \varepsilon$, insgesamt also $h(x) > f(x) - \varepsilon$ für alle $x \in X$. Weil nun h im Abschluss $\bar{A}$ von A liegt, existiert des Weiteren ein $g \in A$ mit $d_\infty(h,g) < \varepsilon$, und die Dreiecksungleichung liefert $d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

§ 5. *Lineare Systeme von Differenzialgleichungen*

Zusammenfassung. Ein System linearer DGLS ist ein System, dass sich in der Form $y' = A(x)y + b(x)$ schreiben lässt, wobei A eine matrix- und b eine vektorwertige Funktion auf einem offenen Intervall bezeichnet. Auch die Lösungen sind dann auf diesem Intervall definiert. Im Fall eines homogenen Systems ($b = 0$) bilden sie einen Untervektorraum, sonst einen affinen Unterraum im $\mathbb{K}$-Vektorraum aller vektorwertigen Funktionen auf I. Wir zeigen, dass der Lösungsraum im homogenen Fall endlich-dimensional ist und beweisen ein allgemeines Kriterium, mit dem sich eine Basis des Lösungsraums als solche erkennen lässt. Wenn die matrixwertige Funktion A auf dem Intervall I konstant ist, lassen sich die Lösungen direkt in geschlossener Form angeben. Um die Lösungsformeln herzuleiten, müssen wir auf die Ergebnisse der Linearen Algebra zurückgreifen, insbesondere auf die Eigenwerttheorie und die Jordansche Normalform.

Wichtige Grundbegriffe	*Zentrale Ergenisse*
– lineares System von Differenzialgleichungen (1. Ordung, homogen, inhomogen)	– lineare Struktur der Lösungsmengen homogener Systeme
– lineare Systeme von DGLs höherer Ordnung	– affine Struktur der Lösungsmenge inhomogener Systeme
– Fundamentalsystem von Lösungen	– Kriterien für Fundamentalsysteme von Lösungen
– Wronski-Determinante	– Variation der Konstanten im Mehrdimensionalen
	– Berechnung der Lösungsräume von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten (diagonalisierbarer und nicht-diagonalisierbarer Fall)

Definition 5.1 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung von I in den Raum der $\mathbb{K}$-wertigen $n \times n$-Matrizen. Sei $b : I \to \mathbb{K}^n$ eine weitere stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' \quad = \quad A(x)y + b(x)$$

ein ***lineares System*** von Differenzialgleichungen erster Ordnung. Ist die Funktion b konstant Null, dann spricht man von einem ***homogenen***, sonst von einem ***inhomogenen*** System.

Für lineare Systeme von Differenzialgleichungen nimmt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz die folgende Form an.

Satz 5.2 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ des Systems $y' = A(x)y + b(x)$ mit $\varphi(a) = c$.

Beweis: Wir legen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$ eine beliebige Norm zu Grunde. Sei die Funktion $f : I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $f(x,y) = A(x)y + b(x)$ auf $I \times \mathbb{K}^n$. Ist $K \subseteq I$ ein kompaktes Teilintervall, dann ist $L = \sup\{\|A(x)\| \mid x \in K\}$ endlich, wobei $\|A(x)\|$ die unserer gewählten Norm zugeordnete Operatornorm von $A(x)$ bezeichnet. Für alle $x \in K$ und $y, z \in \mathbb{K}^n$ gilt dann

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \quad = \quad \|A(x)(y-z)\| \quad \leq \quad L\|y-z\|.$$

Also genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung, und somit gibt es nach Satz 3.10 eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi : J \to \mathbb{K}^n$ des durch $y' = f(x,y)$ und (a,c) gegebenen Anfangswertproblems, definiert auf einem offenen Teilintervall $J \subseteq I$. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ gilt jeweils $\|f(x,y)\| \leq \|A(x)\|\|y\|$, und die Funktion $I \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|A(x)\|$ ist auf Grund der Stetigkeit von A ebenfalls stetig. Die Funktion $f(x,y) = A(x)y + b(x)$ ist also linear beschränkt. Aus Satz 3.16 folgt somit, dass die maximale Lösung auf ganz I definiert ist, also $J = I$ gilt. □

Satz 5.3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall, $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{L}^{\text{hom}}$ die Menge aller Lösungen von $y' = A(x)y$ auf dem Intervall I. Dann ist $\mathcal{L}^{\text{hom}}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist $m \in \mathbb{N}$, dann sind für ein m-Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ von Lösungen die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ sind linear unabhängig.

(ii) Es gibt ein $a \in I$, so dass $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.

(iii) Für alle $a \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass es sich bei $\mathcal{L}^{\text{hom}}$ tatsächlich um einen $\mathbb{K}$-Vektorraum handelt. Die Nullfunktion $0 : I \to \mathbb{K}^n$ erfüllt offensichtlich die Gleichung $0' = A(x)0$, also ist 0 in $\mathcal{L}^{\text{hom}}$ enthalten. Seien nun $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^{\text{hom}}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Dann liegen auch $\varphi + \psi$ und $\lambda\varphi$ in $\mathcal{L}^{\text{hom}}$, denn für alle $x \in I$ gilt

$$(\varphi+\psi)'(x) \quad = \quad \varphi'(x) + \psi'(x) \quad = \quad A(x)\varphi(x) + A(x)\psi(x) \quad = \quad A(x)(\varphi+\psi)(x)$$

und $(\lambda\varphi)'(x) = \lambda\varphi'(x) = \lambda A(x)\varphi(x) = A(x)(\lambda\varphi)(x)$.

Nun beweisen wir die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iii). Die Implikation "(iii) ⇒ (ii)" ist offensichtlich. Zum Beweis von "(ii) ⇒ (i)" seien $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k = 0$ vorgegeben. Dann gilt insbesondere

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(a) \quad = \quad 0 \quad ,$$

und auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ folgt $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ bewiesen. Nun zeigen wir noch "(i) ⇒ (iii)". Angenommen, es gibt ein $a \in I$, so dass die Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ linear abhängig sind. Dann gibt es Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich Null, mit

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(a) \quad = \quad 0.$$

Sei nun $\varphi = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k \in \mathcal{L}^{\text{hom}}$. Dann gilt $\varphi(a) = 0$. Nach Satz 5.2 besitzt das System $y' = A(x)y$ nur eine Lösung ψ mit $\psi(a) = 0$, und das ist die Nullfunktion. Also folgt $\varphi = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ linear unabhängig sind.

Es bleibt zu zeigen, dass $\dim \mathcal{L}^{\text{hom}} = n$ gilt. Seien dazu $e_1, ..., e_n$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{K}^n$, und sei $a \in I$ beliebig gewählt. Für $1 \leq k \leq n$ sei $\varphi_k \in \mathcal{L}^{\text{hom}}$ das eindeutig bestimmte Element des Lösungsraums mit $\varphi_k(a) = e_k$. Weil die Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_n(a)$ linear unabhängig sind, gilt auf Grund der Implikation "(ii) $\Rightarrow$ (i)" dasselbe auch für die Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Daraus folgt zunächst $\dim \mathcal{L}^{\text{hom}} \geq n$. Nehmen wir nun an, dass $\dim \mathcal{L}^{\text{hom}} > n$ gilt. Dann gibt es $n+1$ linear unabhängige Funktionen $\psi_1, ..., \psi_{n+1}$ in $\mathcal{L}^{\text{hom}}$. Wegen "(i) $\Rightarrow$ (iii)" wären dann auch die Vektoren $\psi_1(a), ..., \psi_{n+1}(a) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig. Aber dies ist wegen $\dim \mathbb{K}^n = n$ unmöglich. □

Aus Satz 5.3 folgt, dass für jedes n-dimensionale lineare System $y' = A(x)y$ ein linear unabhängiges Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ von Lösungen existiert. Ein solches Tupel wird ***Fundamentalsystem*** genannt.

Trägt man die Elemente eines Tupels von Lösungen als Spalten in eine Matrix ein, so erhält man eine Funktion $\Phi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$. Durch Vergleich der einzelnen Spalten sieht man, dass

$$\Phi'(t) \quad = \quad A(t)\Phi(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in I$$

gilt, wobei die Matrix $\Phi'(t)$ durch Differentiation der einzelnen Einträge von $\Phi(t)$ zu Stande kommt. Sind die Spalten von $\Phi(t)$ für ein (und somit für alle) $t \in I$ linear unabhängig, so ist auch für die Funktion Φ die Bezeichung „Fundamentalsystem" üblich.

Definition 5.4 Sei $y' = A(x)y$ ein n-dimensionales lineares System von Differenzialgleichungen, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, und $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ein Tupel von Lösungen. Sei $\Phi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ die zugehörige matrixwertige Funktion. Dann wird $w : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \det \Phi(t)$ die ***Wronski-Determinante*** des Tupels genannt.

Aus Satz 5.3 ergibt sich unmittelbar

Folgerung 5.5 Sei $y' = A(x)y$ ein n-dimensionales lineares System von Differenzialgleichungen, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ein Tupel von Lösungen und w die zugehörige Wronski-Determinante. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Tupel ist ein Fundamentalsystem von Lösungen.

(ii) Es gilt $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(iii) Es gibt ein $a \in I$ mit $w(a) \neq 0$.

Als Beispiel betrachten wir für eine beliebige Konstante $\omega \in \mathbb{R}^+$ das lineare System von DGL gegeben durch die Gleichungen $y_1' = -\omega y_2$ und $y_2' = \omega y_1$. In Matrixschreibweise ist dies $y' = A(x)y$ mit der konstanten Funktion

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}} \quad , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch $\varphi_1(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ und $\varphi_2(t) = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ sind zwei spezielle Lösungen des Systems gegeben. Denn einerseits gilt $\varphi_1'(t) = (-\omega\sin(\omega t), \omega\cos(\omega t))$ und $\varphi_2'(t) = (-\omega\cos(\omega t), -\omega\sin(\omega t))$, andererseits aber auch

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\cos(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$\Phi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen, denn $\Phi(0)$ ist die Einheitsmatrix mit $\det\Phi(0) = 1 \neq 0$.

Gelegentlich ist es hilfreich, auch die Wronski-Determinante durch eine Differenzialgleichung zu beschreiben.

Proposition 5.6 Sei $y' = A(x)y$ ein n-dimensionales lineares System von Differenzialgleichungen, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, Φ ein Fundamentalsystem von Lösungen und w die zugehörige Wronski-Determinante. Für jedes $a \in I$ ist w die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = \mathrm{Tr}(A(x))y$ und $(a, w(a))$, und somit

$$w(t) \quad = \quad w(a)\exp\left(\int_a^t \mathrm{Tr}(A(s))\,ds\right) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Die Wronski-Determinante lässt sich also ohne Kenntnis von Φ allein aus dem Anfangswert $w(a)$ berechnen.

Beweis: Bezeichnen wir die Zeilen von $\Phi(t)$ mit $v_1(t), ..., v_n(t)$, dann liefert $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ zeilenweise betrachtet die Gleichungen

$$v_i'(t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)v_j(t) \quad , \quad \text{für } 1 \leq i \leq n. \tag{5.1}$$

Durch Ableiten von $\det\Phi(t)$ und Anwendung der Produktregel der Differenziation erhalten

$$\frac{d}{dt}(\det\Phi(t)) \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} v_{k,\sigma(k)}(t)\right) \quad = \quad \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{k=1}^{n} v_{k,\sigma(k)}'(t)\prod_{j\neq k} v_{j,\sigma(j)}(t)$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)v_{k,\sigma(k)}'(t)\prod_{j\neq k} v_{j,\sigma(j)}(t) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2(t) \\ \cdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2'(t) \\ \cdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} + ... + \det\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \cdots \\ v_n'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)\det\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \cdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \quad = \quad \mathrm{Tr}(A(t))w(t).$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt die Gleichung 5.1 verwendet sowie die Tatsache, dass die Determinante in jeder Zeile linear und alternierend ist. Dass die angegebene Funktion diese Differenzialgleichung löst, überprüft man unmittelbar durch Differentiation. □

Anhand eines Beispiels soll gezeigt werden, inwiefern diese Aussage zur Lösung eines Systems genutzt werden kann. Wir betrachen das dazu Gleichungssystem

$$y' \quad = \quad A(x)y \quad = \quad \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \\ -x^2 & x^2 \end{pmatrix} y.$$

Auf Grund der wechselnden Vorzeichen sieht man schnell, dass die konstante Funktion

$$\varphi_1(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine erste Lösung ist. Wir setzen nun ein Fundamentalsystem von Lösungen in der Form

$$\Phi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{12}(t) \\ 1 & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$$

an. Auf Grund der Proposition und wegen $\mathrm{Tr}A(t) = 2t^2$ erfüllt die Wronski-Determinante die Gleichung $w'(t) = 2t^2 w(t)$, ist also gegeben durch $w(t) = w(0)\exp(\int_0^t 2s^2\,ds) = w(0)\exp(\frac{2}{3}t^3)$. Durch Vergleich erhalten wir

$$\varphi_{22}(t) - \varphi_{12}(t) \quad = \quad (\varphi_{22}(0) - \varphi_{12}(0))\exp(\tfrac{2}{3}t^3) \quad = \quad \varphi_{22}(0)\exp(\tfrac{2}{3}t^3) - \varphi_{12}(0)\exp(\tfrac{2}{3}t^3) \quad ,$$

wodurch als zweite Lösung

$$\varphi_2(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{22}(t) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -\exp(\frac{2}{3}t^3) \\ \exp(\frac{2}{3}t^3) \end{pmatrix}$$

nahegelegt wird. Man überprüft unmittelbar, dass dies tatsächlich eine weitere Lösung ist, und dass so definierte System die Wronski-Determinante $w(t) = \det\Phi(t) = 2e^{\frac{2}{3}t^3}$ besitzt, die für kein $t \in \mathbb{R}$ den Wert 0 annimmt. Es handelt sich also bei Φ tatsächlich um ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Nun wenden wir uns den Lösungsmengen der ***inhomogenen*** linearen Systeme zu.

Satz 5.7 Sei $y' = A(x)y + b(x)$ eine inhomogene lineare DGL, $\mathcal{L}$ die Menge ihrer Lösungen und $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Lösungen von $y' = A(x)y$. Ist $\psi_0 : I \to \mathbb{K}^n$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, dann gilt $\mathcal{L} = \psi_0 + \mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$.

Beweis: "$\subseteq$" Sei $\psi \in \mathcal{L}$ und $\varphi = \psi - \psi_0$. Dann gilt für alle $t \in I$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \quad &= \quad \psi'(t) - \psi_0'(t) \quad = \quad (A(t)\psi(t) + b(t)) - (A(t)\psi_0(t) + b(t)) \\ &= \quad A(t)(\psi - \psi_0)(t) \quad = \quad A(t)\varphi(t). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ enthalten ist, und folglich gilt $\psi = \psi_0 + \varphi \in \psi_0 + \mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$.

"$\supseteq$" Sei $\psi \in \psi_0 + \mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$, also $\psi = \psi_0 + \varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi'(t) \quad &= \quad (\psi_0 + \varphi)'(t) \quad = \quad \psi_0'(t) + \varphi'(t) \quad = \quad A(t)\psi_0(t) + b(t) + A(t)\varphi(t) \\ &= \quad A(t)(\psi_0 + \varphi)(t) + b(t) \quad = \quad A(t)\psi(t) + b(t) \end{aligned}$$

und folglich $\psi \in \mathcal{L}$. □

Die Methode der Variation der Konstanten lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern.

Satz 5.8 Sei $y' = A(x)y + b(x)$ ein inhomogenes lineares System von Differenzialgleichungen und Φ ein Fundamentalsystem von Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Dann erhält man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$\psi(t) \quad = \quad \Phi(t)u(t) \quad \text{mit} \quad u(t) = \int_a^t \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds.$$

Beweis: Aus $\psi(t) = \Phi(t)u(t)$ und $u'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$ für alle $t \in I$ folgt

$$\psi'(t) \quad = \quad \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) \quad = \quad \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}b(t) \quad =$$

$$\Phi'(t)u(t) + b(t) \quad = \quad A(t)\Phi(t)u(t) + b(t) \quad = \quad A(t)\psi(t) + b(t). \qquad \square$$

Als Beispiel betrachten wir das System linearer Differenzialgleichungen gegeben durch $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1 + x$. In Matrixschreibweise entspricht dies der Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$ mit

$$A(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Wie wir im vorherigen Beispiel gesehen haben, ist

$$\Phi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen DGL $y' = A(x)y$. Es gilt

$$\Phi(t)^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t). \end{pmatrix}$$

Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu erhalten, berechnen wir zunächst

$$u(t) \quad = \quad \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds \quad = \quad \int_0^t \begin{pmatrix} s\sin(s) \\ s\cos(s) \end{pmatrix} ds.$$

Wir bestimmen die beiden Komponenten von $u(t)$ durch partielle Integration. Es gilt

$$\int_0^t s\sin(s)\, ds \quad = \quad -s\cos(s)\Big|_0^t + \int_0^t \cos(s)\, ds \quad = \quad -s\cos(s) + \sin(s)\Big|_0^t \quad = \quad \sin(t) - t\cos(t)$$

und

$$\int_0^t s\cos(s)\, ds \quad = \quad s\sin(s)\Big|_0^t - \int_0^t \sin(s)\, ds \quad = \quad s\sin(s) + \cos(s)\Big|_0^t \quad = \quad t\sin(t) + \cos(t) - 1.$$

Wir erhalten somit

$$u(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \sin(t) - t\cos(t) \\ \cos(t) + t\sin(t) - 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\psi(t) \quad = \quad \Phi(t)u(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) - t\cos(t) \\ \cos(t) + t\sin(t) - 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(t)(\sin(t) - t\cos(t)) - \sin(t)(\cos(t) + t\sin(t) - 1) \\ \sin(t)(\sin(t) - t\cos(t)) + \cos(t)(\cos(t) + t\sin(t) - 1) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -t + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

Wir formulieren die bisher erzielten Ergebnisse noch einmal für Differenzialgleichungen höherer Ordnung.

Definition 5.9 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $a_k : I \to \mathbb{K}$ für $0 \leq k < n$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y \quad = \quad b(x) \tag{5.2}$$

eine ***lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung***. Diese wird als ***homogen*** bezeichnet, wenn $b = 0$ ist, ansonsten als ***inhomogen***.

Satz 5.10 Gegeben sei eine lineare DGL n-ter Ordnung der Form (5.2). Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der homogenen linearen DGL ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein System $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ von Lösungen der homogenen DGL ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle) $t \in I$ die Wronski-Determinante

$$w(t) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{ungleich Null ist.}$$

Man nennt $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ in diesem Fall ein ***Fundamentalsystem*** von Lösungen der homogenen linearen DGL.

Beweis: Seien $\hat{\mathcal{L}}$ die Lösungen des homogenen Systems linearer Differenzialgleichungen gegeben durch

$$y_0' = y_1 \quad , \quad y_1' = y_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad y_{n-2}' = y_{n-1} \quad , \quad y_{n-1}' = -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1 - \ldots - a_{n-1}(x)y_{n-1}.$$

Nach Satz 3.3 ist durch $\varphi \mapsto (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Bijektion $\mathcal{L} \to \hat{\mathcal{L}}$ gegeben, und diese ist verträglich mit punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation von Funktionen. Die Wronski-Determinante $W(x)$ verschwindet genau dann in einem Punkt $x \in I$, wenn die Bilder von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ unter dem Vektorraum-Isomorphismus $\mathcal{L} \to \hat{\mathcal{L}}$ linear unabhängig sind. Damit ergeben sich alle Aussagen unmittelbar aus Satz 5.3. □

Als wichtigen Spezialfall der Theorie betrachten wir von nun lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Zur Vorbereitung wiederholen wir einige Grundlagen aus der Linearen Algebra. Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$. Wir bezeichnen $v \in \mathbb{K}^n$ als ***Eigenvektor*** der Matrix A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ und $Av = \lambda v$ gilt. Die Eigenvektoren bilden zusammen mit dem Nullvektor den ***Eigenraum*** zum Eigenwert λ, der durch $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda E)$ gegeben ist, wobei $E \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Das ***charakteristische Polynom*** der Matrix A ist definiert durch $\chi_A = \det(xE - A) \in \mathbb{K}[x]$. Es wurde gezeigt, dass die Eigenwerte von A mit den Nullstellen des Polynoms χ_A in $\mathbb{K}$ übereinstimmen.

Die Matrix A wird als ***diagonalisierbar*** bezeichnet, wenn eine Diagonalmatrix $D \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $D = TAT^{-1}$ existieren. Eine äquivalente Bedingung lautet, dass eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A existiert. Außerdem haben wir in der Linearen Algebra das folgende ***Diagonalisierbarkeitskriterium*** kennengelernt: Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Polynom χ_A in $\mathbb{K}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt. Dabei war die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in \mathbb{K}$ definiert als die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_A, und die geometrische Vielfachheit war die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

Satz 5.11 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, eine $\mathbb{C}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto e^{\lambda t} v$ ist genau dann eine Lösung des Systems $y' = Ay$ ungleich null, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(ii) Ist $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ ein Tupel komplexer Zahlen und $(v_1, ..., v_r)$ ein Tupel von Vektoren, wobei v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j bezeichnet, so ist das Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ von Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ genau dann linear unabhängig, wenn das Tupel $(v_1, ..., v_r)$ linear unabhängig ist.

(iii) Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die komplexen Zahlen λ_j alle verschieden sind.

Beweis: zu (i) Dass φ eine Lösung von $y' = Ay$ ist, ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Gleichung $\varphi'(t) = A\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen $\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$ ist dies gleichbedeutend mit $\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Weil die Funktion $t \mapsto e^{\lambda t}$ nirgends null wird, ist diese Gleichung wiederum äquivalent zu $\lambda v = Av$ und somit zu der Aussage, dass $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

zu (ii) Es gilt $\varphi_j(0) = v_j$ für $1 \leq v_j \leq n$. Damit ergibt sich die Aussage unmittelbar aus Satz 5.3.

zu (iii) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass ein System von Eigenvektoren zu lauter verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig ist. □

Proposition 5.12 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B = TAT^{-1}$. Genau dann ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$, wenn $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ gegeben durch $\psi(t) = T\varphi(t)$ eine Lösung von $z' = Bz$ ist.

Beweis: Ist φ eine Lösung von $y' = Ay$, dann gilt $\varphi'(t) = A\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt dann $\psi'(t) = T\varphi'(t) = TA\varphi(t) = TAT^{-1}(T\varphi(t)) = B\psi(t)$. Somit ist ψ eine Lösung von $z' = Bz$. Der Beweis der Umkehrung läuft vollkommen analog. □

Auf der Grundlage von Satz 5.11 lässt sich für eine DGL $y' = Ay$ mit $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen direkt angeben, falls es sich bei A um eine *diagonalisierbare* Matrix handelt. In diesem Fall existiert eine Basis $(v_1, ..., v_n)$ des $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren der Matrix A. Bezeichnet $\lambda_j \in \mathbb{C}$ jeweils den Eigenwert zum Eigenvektor v_j, so ist $\Phi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ bestehend aus den Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Wir betrachten als Beispiel das linearen System von DGLs gegeben durch

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & y_1 & - & 2y_2 & & \\ y_2' & = & 2y_1 & & & - & y_3 \\ y_3' & = & 4y_1 & - & 2y_2 & - & y_3 \end{array}$$

In Kurzform handelt es sich um das System $y' = Ay$ mit der Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist gegeben durch $\chi_A = x^3 + x - 2$. Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstelle 1, und Polynomdivision liefert die Zerlegung $\chi_A = (x-1)(x^2 + x + 2)$. Mit der p-q-Formel, angewendet auf den Fraktor vom Grad 2, erhält man die beiden weiteren Nullstellen $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1^2 - 4 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{7}$. Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmt man die zugehörigen Eigenvektoren.

$$\mathrm{Eig}(A, 1) = \ker(A - E) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}) = \ker(A - (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{7})E) = \ker \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -1 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{8} - \frac{1}{8} i\sqrt{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}) = \ker(A - (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{7})E) = \ker \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} & -1 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} i\sqrt{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 - i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Das Tupel $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ gegeben durch

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_2(t) = e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_3(t) = e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 3 - i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

bildet also ein Fundamentalsystem von $\mathbb{C}$-wertigen Lösungen. Da das vorgegebene System von Differenzialgleichungen aber reell ist, interessiert man sich (zum Beispiel im Rahmen physikalischer Anwendungen) in erster Linie für

reellwertige Lösungen. Die folgende Proposition zeigt, wie $\mathbb{C}$-wertige Lösungen in $\mathbb{R}$-wertige umgerechet werden können.

Proposition 5.13 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, eine $\mathbb{R}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, $\lambda = \nu + i\omega$ mit $\nu, \omega \in \mathbb{R}$, und ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, $v = u + iw$ mit $u, w \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $\bar{\lambda} = \nu - i\omega$ ein Eigenwert von A, und $\bar{v} = u - iw$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) In diesem Fall sind $\psi, \xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(t) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w) \quad \text{und} \quad \xi(t) = e^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$$

zwei linear unabhängige Lösungen der DGL.

Beweis: zu (i) Dass mit λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert ist, folgt aus der bekannten Tatsache, dass die nicht-reellen Nullstellen eines reellen Polynoms stets in konjugiert-komplexen Paaren auftreten, angewendet auf $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$. Weil die komplexe Konjugation mit der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen verträglich ist, ist sie auch verträglich mit der Matrix-Vektor-Multiplikation und der Multiplikation von Matrizen. Dass $\bar{v}$ ein zu $\bar{\lambda}$ gehörender Eigenvektor ist, ergibt sich durch komponentenweise Anwendung der komplexen Konjugation auf die Gleichung $Av = \lambda v$. Man erhält auf diese Weise

$$A(u - iw) \quad = \quad A\bar{v} \quad = \quad \bar{A}\bar{v} \quad = \quad \overline{Av} \quad = \quad \overline{\lambda v} \quad = \quad \bar{\lambda} \cdot \bar{v} \quad = \quad \bar{\lambda} \cdot (u - iw).$$

zu (ii) Nach Satz 5.11 sind durch $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ und $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{v}$ zwei linear unabhängige, $\mathbb{C}$-wertige Lösungen des Systems gegeben. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\varphi(t) \quad = \quad e^{(\nu + i\omega)t}(u + iw) \quad = \quad e^{\nu t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))(u + iw) \quad = \\ e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w) + ie^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$$

und entsprechend

$$\bar{\varphi}(t) \quad = \quad e^{(\nu - i\omega)t}(u - iw) \quad = \quad e^{\nu t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))(u - iw) \quad = \\ e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w) - ie^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w).$$

Durch Bildung von Linearkombinationen erhält man die beiden Lösungen $\psi(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w)$ und $\xi(t) = \frac{1}{2i}(\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)) = e^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$. Weil die Matrix des Basiswechsels von $(\varphi, \bar{\varphi})$ zu (ψ, ξ) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

eine Determinante ungleich null hat, ist auch das Paar (ψ, ξ) linear unabhängig. □

Folgerung 5.14 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_p$ und Paaren $(\lambda_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+1}), ..., (\lambda_{p+q}, \bar{\lambda}_{p+q})$ nicht-reeller, komplex- konjugierter Eigenwerte, mit $n = p + 2q$, $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$, $\nu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq q$. Es sei $(v_1, ..., v_{p+q})$ ein System von Vektoren derart, dass

$$(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, \bar{v}_{p+1}, ..., v_{p+q}, \bar{v}_{p+q})$$

eine Basis des $\mathbb{C}^n$ und v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j ist, für $1 \leq j \leq p+q$. Weiter sei $v_j = u_j + iw_j$ für $p+1 \leq j \leq p+q$ jeweils die Zerlegung von v_j in Real- und Imaginärteil. Dann ist durch $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq p$ sowie

$$\psi_j(t) = e^{\nu_{p+j} t}(\cos(\omega_{p+j} t)u_{p+j} - \sin(\omega_{p+j} t)w_{p+j})$$
$$\xi_j(t) = e^{\nu_{p+j} t}(\sin(\omega_{p+j} t)u_{p+j} + \cos(\omega_{p+j} t)w_{p+j})$$

für $1 \leq j \leq q$ ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

Beweis: Aus Satz 5.11 folgt, dass die Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq p$ und $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$, $\bar{\varphi}_j(t) = e^{\bar{\lambda}_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq q$ zusammen ein n-elementiges linear unabhängiges System von Lösungen bilden. Da unser LGS $y' = Ay$ von Dimension n ist, handelt es sich somit um ein Fundamentalsystem von Lösungen. Wie wir im Beweis von Teil (ii) von Proposition 5.13 festgestellt haben, spannt das Paar $(\varphi_{p+j}, \bar{\varphi}_{p+j})$ jeweils denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum auf wie (ψ_j, ξ_j), für $1 \leq j \leq q$. Daraus folgt, dass die Funktionen φ_j für $1 \leq j \leq p$ und ψ_j, ξ_j für $1 \leq j \leq q$ ein Fundamentalsystem von Lösungen im Komplexen bilden und insbesondere $\mathbb{C}$-linear unabhängig ist. Damit sind sie erst recht $\mathbb{R}$-linear unabhängig, d.h. auch im Reellen bilden die Lösungen ein Fundamentalsystem. □

Das System aus dem Beispiel von oben hat also ein reellwertiges Fundamentalsystem bestehend aus den Funktionen

$$\varphi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 3\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) - \sqrt{7}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 4\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 8\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \end{pmatrix} \quad , \quad \xi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 3\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) + \sqrt{7}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 4\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \\ 8\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t) \end{pmatrix}.$$

Natürlich lassen sich die Lösungen durch die übliche Proberechnung bestätigen. Die Ableitungen der Komponenten der drei Lösungen sind gegeben durch

$$\varphi_1'(t) = e^t, \quad \varphi_2'(t) = 0, \quad \varphi_3'(t) = 2e^t$$

$$\psi_1'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + (-1)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)), \quad \psi_2'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + (-2)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)),$$
$$\psi_3'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + (-4)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))$$

$$\xi_1'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + \sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)), \quad \xi_2'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + 2\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)),$$
$$\xi_3'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) + 4\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))$$

Dass die erste Lösung φ das System erfüllt, zeigt sich durch die Rechnung

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - 2\varphi_2(t) &= e^t - 2 \cdot 0 = e^t = \varphi_1'(t) \quad , \\ 2\varphi_1(t) - \varphi_3(t) &= 2e^t - 2 \cdot e^t = 0 = \varphi_2'(t) \quad , \\ 4\varphi_1(t) - 2\varphi_2(t) - \varphi_3(t) &= 4 \cdot e^t - 2 \cdot 0 - 2e^t = 2e^t = \varphi_3'(t). \end{aligned}$$

Die Lösung ψ wird bestätigt durch

$$\begin{aligned}\psi_1(t)-2\psi_2(t) &= e^{-\frac{1}{2}t}(3\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) = \\ e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+(-1)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) &= \psi_1'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\psi_1(t)-\psi_3(t) &= 2e^{-\frac{1}{2}t}(3\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-e^{-\frac{1}{2}t}8\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) = \\ e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+(-2)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) &= \psi_2'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\psi_1(t)-2\psi_2(t)-\psi_3(t) &= 4e^{-\frac{1}{2}t}(3\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-e^{-\frac{1}{2}t}8\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) = \\ e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+(-4)\sqrt{7}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) &= \psi_3'(t)\end{aligned}$$

und die dritte Lösung ξ durch

$$\begin{aligned}\xi_1(t)-2\xi_2(t) &= e^{-\frac{1}{2}t}(3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) = \\ e^{-\frac{1}{2}t}((-5)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) &= \xi_1'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\xi_1(t)-\xi_3(t) &= 2e^{-\frac{1}{2}t}(3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-e^{-\frac{1}{2}t}8\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) = \\ e^{-\frac{1}{2}t}((-2)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+2\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) &= \xi_2'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\xi_1(t)-2\xi_2(t)-\xi_3(t) &= 4e^{-\frac{1}{2}t}(3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t))-2e^{-\frac{1}{2}t}4\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)-e^{-\frac{1}{2}t}8\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t) = \\ e^{-\frac{1}{2}t}((-4)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)+4\sqrt{7}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}t)) &= \xi_3'(t).\end{aligned}$$

Um auch den Fall einer nicht-diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix behandeln zu können, benötigen wir einige Grundlagen aus der Linearen Algebra zur Jordanschen Normalform.

(1) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ heißt ***Jordanmatrix*** zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn sie die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{besitzt.}$$

(2) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ befindet sich in ***Jordanscher Normalform***, wenn sie als Blockmatrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix} \quad \text{mit Jordanmatrizen} \quad J_1, \ldots, J_r \quad \text{schreiben lässt.}$$

Man bezeichnet die $J_1, \ldots, J_r$ dann als ***Jordanblöcke*** der Matrix A.

(3) Allgemein ist eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ genau dann ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ in Jordanscher Normalform, wenn das charakteristische Polynom χ_A in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

(4) Zwei Matrizen $J, J' \in \mathcal{M}_{n,K}$ in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke enthalten. (Treten einzelne Jordanblöcke mehrfach auf, dann müssen auch die Vielfachheiten des Vorkommens übereinstimmen.)

Im Folgenden sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ und $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine zu A ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert der Matrix A.

(5) Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(A,\lambda)$ ist gleich der Summe der Größen sämtlicher Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ.

(6) Die geometrische Vielfachheit $\mu_g(A,\lambda)$ ist gleich der Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ in J.

(7) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des Minimalpolynoms $\mu_A \in K[x]$ ist gleich der Größe des größten Jordanblocks in J zum Eigenwert λ.

Zur Erinnerung: Das Minimalpolynom μ_A ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom minimalen Grades in $K[x]$ mit $\mu_A(A) = 0$. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton aus der Linearen Algebra folgt, dass μ_A stets ein Teiler von χ_A ist. Wie bei χ_A sind auch bei μ_A die Nullstellen in K genau die Eigenwerte von A. Die Polynome μ_A und χ_A unterscheiden sich also nur in den Vielfachheiten der Nullstellen.

Häufig reichen diese Informationen bereits aus, um mit den geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ sowie mit dem Minimalpolynom μ_A die Gestalt einer zu A ähnlichen Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ vollständig zu bestimmen. Aber bereits in Dimension $n = 7$ gibt es Fälle, in denen das nicht mehr möglich ist. Wir betrachten dazu die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mu_a(A,2) = \mu_a(B,2) = 7$, $\mu_g(A,2) = \mu_g(B,2) = 3$ und $\mu_A = \mu_B = (x-2)^3$, aber die Matrizen A und B sind nicht ähnlich zueinander. In solchen Fällen benötigt man genauere Informationen. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$V_k = \ker((A-\lambda E)^k) \quad \text{und} \quad d_k = \dim V_k.$$

Nach Definition ist $d_0 = 0$ und $d_1 = \mu_g(A,\lambda)$, und offenbar gilt $d_k \leq d_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Desweiteren wird in der Linearen Algebra gezeigt, dass das kleinste $p \in \mathbb{N}$ mit $d_p = d_{p+1}$ auch die Bedingung $d_p = d_k$ für alle $k \geq p$ erfüllt. Die Anzahl a_k der Jordankästchen der Größe k zum Eigenwert λ in einer zu A ähnlichen Matrix J in Jordanscher Normalform ist nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Formel

$$a_k \quad = \quad 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1}.$$

Bei der Matrix A aus dem obigen Beispiel kann man nachrechnen, dass $d_0 = 0$, $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = d_4 = 7$ gilt. Daraus folgt $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$. Bei der Matrix B dagegen ist $d_0 = 0$, $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = d_4 = 7$. Hier kommt man auf die Werte $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$.

Für einige Anwendungen ist es erforderlich, zu einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ mit zerfallendem charakteristischen Polynom χ_A eine Transformationsmatrix T zu bestimmen, so dass $J = T^{-1}AT$ in Jordanscher Normalform vorliegt. Hierzu geht man folgendermaßen vor. Es sei $\phi : K^n \to K^n$ der Endomorphismus $v \mapsto (A - \lambda E)v$ gegeben durch Matrix-Vektor-Multiplikation.

(1) Zunächst bestimmt man Basen für die Untervektorräume $V_k = \ker(\phi^k)$ für $1 \leq k \leq p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ minimal mit $V_p = V_{p+1}$ ist.

(2) Dann bestimmt man eine Basis $\mathcal{B}_p$ eines Vektorraums $W_p = U_p$ mit $V_{p-1} \oplus U_p = V_p$, indem man eine Basis von V_{p-1} zu einer Basis von V_p ergänzt.

(3) Anschließend bestimmt man nacheinander für $k = p-1, p-2, ..., 2, 1$ jeweils eine Basis $\mathcal{B}_k$ eines Vektorraums W_k mit $V_{k-1} \oplus \phi(U_{k+1}) \oplus W_k = V_k$, indem man eine Basis von V_{k-1} und die Bilder einer Basis von U_{k+1} unter ϕ zu einer Basis von V_k ergänzt, und definiert anschließend $U_k = \phi(U_{k+1}) \oplus W_k$. Nach Konstruktion gilt dann stets $V_{k-1} \oplus U_k = V_k$.

(4) Für $1 \leq k \leq p$ und jeden Vektor $v \in \mathcal{B}_k$ trägt man jeweils nacheinander $\phi^{k-1}(v), \phi^{k-2}(v), ..., \phi(v), v$ als Spaltenvektoren in eine Matrix T ein. Diese Matrix ist dann invertierbar, und $J = T^{-1}AT$ ist eine Matrix in Jordanscher Normalform.

Wir demonstrieren die Vorgehensweise an einem (klein gewählten) Beispiel und betrachten dazu die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung des charakteristischen Polynoms ergibt $\chi_A = (x-3)^3$. Desweiteren bestimmen wir

$$V_1 = \ker(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad V_2 = \ker(\phi^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad V_3 = \ker(\phi^3) = \mathbb{R}^3.$$

Es ist also $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ und $d_k = 3$ für alle $k \geq 3$. Bereits dem Wert $d_1 = 1$ können wir entnehmen, dass die Jordansche Normalform von A aus einem einzigen Jordanblock der Größe 3 besteht. Offenbar wird die angegebene Basis von V_2 durch $e_3 = (0,0,1)$ zu einer Basis von V_3 ergänzt. In der Notation des Algorithmus ist also $\mathcal{B}_3 = \{e_3\}$. Wir berechnen $\phi(e_3) = (-3,-6,0)$ und $\phi^2(e_3) = (9,9,3)$. Definieren wir nun

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wie im diagonalisierbaren Fall ist man bei einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ häufig an einer reellen Normalform interessiert. Eine Matrix in Jordanscher Normalform existiert jedoch nur, wenn χ_A bereits in $\mathbb{R}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Ansonsten besitzt χ_A nicht-reelle Nullstellen in $\mathbb{C}$, die in komplex-konjugierten Paaren auftreten. Die Tatsache, dass in einer komplexen Jordanschen Normalform von A auch die Jordanblöcke in konjugiert-komplexen Paaren vorkommen, kann man sich folgermaßen zunutze machen.

Proposition 5.15 Sei $C \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $C = A+iB$ mit $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, und sei $\bar{C}$ die Matrix, die dadurch zu Stande kommt, dass man sämtliche Einträge komplex konjugiert. Dann ist die $2n \times 2n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} \qquad \text{ähnlich zu} \qquad \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Sind speziell $J(\lambda), J(\bar{\lambda}) \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ zueinander Jordanmatrizen mit komplex-konjugierten Eigenwerten $\lambda = a + ib$ und $\bar{\lambda} = a - ib$, dann ist die $2n \times 2n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} J(\lambda) & 0 \\ 0 & J(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \qquad \text{ähnlich zu} \qquad \begin{pmatrix} J(a) & -bE \\ bE & J(a) \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $E \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Beweis: Defineren wir die Transformationsmatrix

$$T \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix} \quad , \quad \text{dann gilt} \quad T^{-1} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}$$

und weiter

$$T \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} T^{-1} \;=\; \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix} \;=$$

$$\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ A-iB & -B-iA \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2A & -2B \\ 2B & 2A \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Ist nun speziell $C \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Jordanmatrix $J(\lambda)$, $\lambda = a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist der Realteil dieser Matrix gegeben durch $A = J(a)$, und der Imaginärteil ist $B = bE$. Damit erhalten wir die zweite Aussage. □

Kommen wir nun zurück zu den Anwendungen auf lineare Differenztialgleichungen. Hierfür benötigen noch ein paar weitere technische Vorbereitungen. Bereits in der Analysis einer Variablen haben wir auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ der reellen $n \times n$-Matrizen die sog. ***Zeilensummennorm*** betrachtet. Diese lässt sich in der Form

$$\|A\| \;=\; \max \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \;\middle|\; 1 \le i \le n \right\}$$

auf $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ übertragen; beim Nachweis der Normeigenschaften ergeben sich keinerlei Änderungen. Wie die Zeilensummennorm im Reellen handelt es sich auch bei dieser Norm um eine *Operatornorm*, wenn man jedes $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ jeweils mit der linearen Abbildung $\phi_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v \mapsto Av$ identifiziert und man auf $\mathbb{C}^n$ die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gegeben durch $\|v\|_\infty = \max\{|v_k| \mid 1 \le k \le n\}$ zu Grunde legt. Für alle $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ gilt also

$$\|A\| \;=\; \sup\{ \|\phi_A(v)\|_\infty \,\big|\, v \in \mathbb{C}^n \,,\; \|v\|_\infty = 1 \}.$$

Für uns ist dies vor allem deshalb relevant, weil daraus die Ungleichung $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ folgt. Tatsächlich gilt für jeden Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ mit $\|v\|_\infty = 1$ die Abschätzung $\|ABv\|_\infty \leq \|A\|\|Bv\|_\infty \leq \|A\|\|B\|$, so dass man die behauptete Ungleichung unmittelbar durch Übergang zum Supremum über alle Vektoren mit Länge 1 erhält.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass sich Matrizen problemlos in Polynome einsetzen lassen. Ist $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, dann definiert man $f(A) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_n A^n$. Mit Hilfe der Zeilensummennorm können wir nun auch Einsetzen von Matrizen in Potenzreihen sinnvoll definieren.

Proposition 5.16 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine komplexe Potenzreihe vom Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\|A\| < r$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bezüglich der Zeilensummennorm. (Wie schon bei den reellen und komplexen Zahlen bedeutet Konvergenz, dass die Folge der Partialsummen der Reihe konvergiert.)

Beweis: In der Analysis mehrerer Variablen wurde gezeigt, dass jeder endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorraum vollständig ist. Dasselbe gilt auch für jeden endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{C}$-Vektorraum; der Beweis fürs Reelle kann unverändert übernommen werden. Es genügt deshalb zu zeigen, dass die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ der Reihe eine Cauchyfolge in $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bilden. Mit Hilfe der oben erwähnten Ungleichung $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ für alle $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ zeigt man leicht durch vollständige Induktion, dass $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Nach Definition des Konvergenzradius ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\|A\|^n$ konvergent. Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\|A\|^k < \varepsilon$ für $n \geq m \geq N$ erfüllt ist. Damit erhalten wir

$$\|s_n - s_m\| \quad = \quad \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k A^k \right\| \quad \leq \quad \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\,\|A^k\| \quad \leq \quad \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\,\|A\|^k \quad < \quad \varepsilon \quad ,$$

wodurch die Cauchyfolgen-Eigenschaft nachgewiesen ist. □

Da die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ bekanntlich einen unendlichen Konvergenzradius besitzt, ist die ***Exponentialmatrix***

$$e^A \quad = \quad \exp(A) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

für alle $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ wohldefiniert. Unser nächstes Ziel besteht darin, die Exponentialmatrix e^{tJ} für $t \in \mathbb{R}$ und Jordanmatrizen J explizit auszurechnen. Die Jordanmatrizen hatten wir am Ende der Linearen Algebra-Vorlesung definiert. Es handelt sich dabei um Matrizen der Form

$$J \quad = \quad \lambda E_n + F_n \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, wobei $E_n \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ die Einheitsmatrix und $F_n = (f_{ij})$ die Matrix in $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit den Einträgen $f_{i,i+1} = 1$ für $1 \leq i < n$ und $f_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq i+1$ bezeichnet. Wenn die Größe n der Matrizen keine wichtige Rolle spielt, lassen wir den Index n auch weg und schreibe E, F statt E_n, F_n.

Lemma 5.17 Sei $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J = \lambda E + F$. Dann gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Zu zeigen ist, dass die Matrix e^{tJ} auf der k-ten Nebendiagonale durchgehend den Eintrag $\frac{1}{k!}t^k e^{\lambda t}$ aufweist, für $0 \le k \le n-1$, wobei wir die Hauptdiagonale als 0-te Nebendiagonale ansehen. Wie man leicht überprüft, hat die Matrix F^m für $0 \le m \le n-1$ auf der m-ten Nebendiagonalen durchgehend Einsen, während alle übrigen Einträge gleich null sind. Für $m \ge n$ ist F^m die Nullmatrix. Nun bestimmen wir J^m für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Eine einfache Rechnung analog zum Beweis des Binomischen Lehrsatzes ergibt

$$J^m = (\lambda E + F)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \lambda^{m-k} F^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \lambda^{m-k} F^k$$

Der Eintrag von J^m auf der k-ten Nebendiagonale ist also gleich $\binom{m}{k}\lambda^{m-k}$, falls $m \ge k$ ist, und ansonsten gleich null, jeweils für $0 \le k \le n-1$. Der Eintrag von $\frac{1}{m!}(tJ)^m$ auf der k-ten Nebendiagonale ergibt sich damit im Fall $m \ge k$ zu $\frac{1}{(m-k)!k!}(\lambda t)^{m-k}t^k$, und für e^{tJ} erhalten wir auf der k-ten Nebendiagonalen wie angegeben

$$\sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!k!}(\lambda t)^{m-k}t^k = \frac{t^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{(m-k)!}(\lambda t)^{m-k} = \frac{t^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\lambda t)^m = \frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}. \qquad \square$$

Folgerung 5.18 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Dann ist $\Phi(t) = e^{tA}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für das System $y' = Ay$.

Beweis: Sind $A, B : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ matrixwertige Funktionen auf einem offenen Intervall, dann bleiben, wie man leicht überprüft, Summen- und Produktregel aus der Analysis einer Variablen für die Addition und die Multiplikation von Matrizen unverändert gültig. Es gilt also $(A+B)'(t) = A(t) + B(t)$ und $(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$ für alle $t \in I$, wobei die $A'(t)$ und $B'(t)$ jeweils die Matrizen mit den Einträgen $a'_{ij}(t)$, $b'_{ij}(t)$ für $1 \le i, j \le n$ bezeichnen.

Bezeichnet nun $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ ein beliebiges Polynom, dann ist die Ableitung von $\mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $t \mapsto f(tA)$ gegeben durch $t \mapsto Af'(tA)$, wobei $f' = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$ für die formale Ableitung des Polynoms f steht. Denn vollständige Induktion in Verbindung mit der Produktregel liefert für die Ableitung von $t \mapsto (tA)^m$ und alle $m \in \mathbb{N}$ den Ausdruck $mt^{m-1}A^{m-1}$. Damit wiederum erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(f(tA)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d}{dt}\left((tA)^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}A^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}t^kA^{k+1}$$
$$= A\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(tA)^k = Af'(tA).$$

Ist nun f eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, dann erhalten wir für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $t\|A\| < r$ entsprechend

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(tA)) &= \frac{d}{dt}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} a_k (tA)^k\right) = \lim_{m\to\infty}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k (tA)^k\right) = \lim_{m\to\infty} A\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)a_{k+1}(tA)^k \\ &= A\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}(tA)^m = Af'(tA)\end{aligned}$$

wobei $f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_m z^m$ die formale Ableitung von f bezeichnet. Dass im zweiten Schritt der Rechnung die Ableitung nach t mit dem Grenzübergang vertauscht werden darf, erfordert eine Begründung. Aus der Analysis einer Variablen ist über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzübergängen folgendes bekannt: Ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass die Folge $(f_m')_{m\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen auf I gleichmäßig und $(f_m(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ für ein $x_0 \in I$ konvergiert, dann konvergiert $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $U \subseteq I$ von x_0 in I gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Darüber hinaus ist diese Funktion differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \lim_m f_m'(x)$ für alle $x \in U$. Ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sogar auf ganz I punktweise konvergent, und bezeichet $f : I \to \mathbb{R}$ die Grenzfunktion, dann gilt folglich $f'(x) = \lim_m f_m'(x)$ für alle $x \in I$. Diese Aussage gilt entsprechend auch für vektor- oder matrixwertige Funktionenfolgen auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, weil punktweise oder gleichmäßige Konvergenz bzw. Differenzierbarkeit der Funktionen genau dann vorliegt, wenn sie für die einzelnen reellwertigen Komponenten besteht.

Es sei daran erinnert, dass der Konvergenzradius r von f mit dem Konvergenzradius der formalen Ableitung f' übereinstimmt. Wählen wir insbesondere ein $s \in \mathbb{R}^+$ mit $s\|A\| < r$, dann ist sowohl die Funktionenfolge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k (tA)^k$ als auch die Folge $(s_m')_{m\in\mathbb{N}}$ ihrer Ableitungen auf $]-s,s[$ gleichmäßig konvergent. Der Satz zeigt also, dass die Funktion $f(tA) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (tA)^m$ auf $]-s,s[$ differenzierbar ist, und dass die Ableitung in der Form $t \mapsto Af'(tA)$ durch die formale Ableitung f' der Potenzreihe gegeben ist. Weil $s \in \mathbb{R}^+$ mit $s\|A\| < r$ beliebig vorgegeben war, ist dieser Ausdruck für die Ableitung für alle $t \in \mathbb{R}^+$ mit $t\|A\| < r$ gültig. Da die Exponentialreihe mit ihrer eigenen formalen Ableitung übereinstimmt, erhalten wir insbesondere

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A\exp'(tA) = Ae^{tA} = A\Phi(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dies zeigt, dass die Spalten von Φ aus Lösungen des Systems $y' = Ay$ bestehen. Es bleibt zu zeigen, dass es sich bei Φ um ein Fundamentalsystem handelt. Wie weiter oben wiederholt wurde, ist A nach den Sätzen der Linearen Algebra ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. Es gibt also ein Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und Jordanmatrizen $J_1, ..., J_r$, so dass $T^{-1}AT$ mit der Blockmatrix

$$J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_r) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

übereinstimmt. Wie man unmittelbar überprüft, gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils $e^{tJ} = \mathrm{diag}(e^{tJ_1}, ..., e^{tJ_r})$. Wie soeben gezeigt wurde, bilden die Spalten von $t \mapsto e^{tJ}$ jeweils Lösungen von $y' = Jy$. Es handelt sich dabei um ein Fundamentalsystem, denn die Matrix e^{tJ} ist eine obere Dreiecksmatrix, nach Lemma 5.17 mit Diagonaleinträgen der Form $e^{\lambda}t \neq 0$ (mit $\lambda \in \mathbb{C}$), und damit invertierbar. Nach Proposition 5.12 ist $t \mapsto T^{-1}e^{tJ}$ nun ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$, und damit auch $t \mapsto Te^{tJ}T^{-1}$, weil die $\mathbb{C}^n$-wertigen Funktionen, gegeben durch die Spalten von $t \mapsto Te^{tJ}T^{-1}$, jeweils Linearkombinationen der Spalten von $t \mapsto Te^{tJ}$ sind.

Weil die Multiplikation mit T von links und mit T^{-1} von rechts eine stetige Abbildung auf $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ ist, gilt außerdem

$$\begin{aligned} Te^{tJ}T^{-1} &= T\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(tJ)^k\right)T^{-1} = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}T(tJ)^kT^{-1} = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}t^kTJ^kT^{-1} \\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}t^k(TJT^{-1})^k = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}t^kA^k = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(tA)^k = e^{tA}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass durch $t \mapsto e^{tA}$ tatsächlich ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ gegeben ist. □

Die Gültigkeit der Gleichung $(e^{tJ})' = Je^{tJ}$ lässt sich für den Fall, dass $J \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Jordanmatrix ist, mit Hilfe von Lemma 5.17 auch durch eine direkte Rechnung überprüfen.

Als erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir das System bestehend aus den Gleichungen $y_1' = 3y_1 + y_2$, $y_2' = 3y_2 + y_3$, $y_3' = 3y_3$. Es handelt sich um das System $y' = Jy$ mit der Jordanmatrix

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nach Folgerung 5.18 erhalten wir ein Fundamentalsystem von Lösungen durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir das System

$$y_1' = 2y_1 + y_2 - y_3, \quad y_2' = 2y_2 - y_4, \quad y_3' = y_1 + 2y_3 + y_4, \quad y_4' = y_2 + 2y_4,$$

also $y' = Ay$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Proposition 5.15 existiert eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit $TJT^{-1} = A$, wobei

$$J = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Nach Folgerung 5.18 erhalten wir für $y' = Jy$ ein Fundamentalsystem von Lösungen durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{(2+i)t} & te^{(2+i)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2+i)t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(2-i)t} & te^{(2-i)t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{(2-i)t} \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Eulerschen Formel $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ gelten die Gleichungen

$$e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos(t) + i\sin(t)), \quad e^{(2-i)t} = e^{2t}(\cos(t) - i\sin(t)),$$

$$te^{(2+i)t} = te^{2t}(\cos(t) + i\sin(t)) \quad \text{und} \quad te^{(2-i)t} = te^{2t}(\cos(t) - i\sin(t)).$$

Nach Proposition 5.15 ist somit $\Psi(t) = T\Phi(t)T^{-1}$ gegeben durch

$$\Psi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{2t}\cos(t) & te^{2t}\cos(t) & -e^{2t}\sin(t) & -te^{2t}\sin(t) \\ 0 & e^{2t}\cos(t) & 0 & -e^{2t}\sin(t) \\ e^{2t}\sin(t) & te^{2t}\sin(t) & e^{2t}\cos(t) & te^{2t}\cos(t) \\ 0 & e^{2t}\sin(t) & 0 & e^{2t}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Nach Proposition 5.12, angewendet auf die Spalten von Φ und Ψ, ist dies ein reelles Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

Betrachten nun ein Beispiel, in dem die Koeffizientenmatrix A in einer unregelmäßigen Form vorliegt, nämlich $y' = Ay$ mit

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben oben nachgerechnet, dass $J = T^{-1}AT$ mit den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

Dies ist äquivalent zu $A = TJT^{-1}$. Bezeichnen wir das Fundamentalsystem von $y' = Jy$, das wir oben berechnet haben, mit Φ, dann erhalten wir auf Grund von Proposition 5.12 nun ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = Ay$ durch

$$\Psi(t) \quad = \quad T\Phi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \quad = \quad e^{3t} \begin{pmatrix} 9 & 9t-3 & \frac{9}{2}t^2 - 3t \\ 9 & 9t-6 & \frac{9}{2}t^2 - 6t \\ 3 & 3t & \frac{3}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz gibt die allgemeine Form von Lösungen linearer Systeme von Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten an.

Satz 5.19 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Matrix, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $r \in \mathbb{N}$ dessen algebraische Vielfachheit. Dann gibt es für das System $y' = Ay$ ein linear unabhängiges Tupel

$$(\varphi_0, \ldots, \varphi_{r-1})$$

von Lösungen der Form $\varphi_k(t) = e^{\lambda t}p_k(t)$, wobei die Funktion $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ in jeder Komponente ein Polynom vom Grad kleiner als k ist.

Beweis: Für den Fall, dass es sich bei A um eine Jordanmatrix handelt, ist die Aussage offenbar erfüllt, denn die Einträge der n Spalten der Matrix in Lemma 5.17 bestehen aus Polynomen vom Grad 0, 1, ..., $n-1$, multipliziert mit $e^{\lambda t}$. Ebenso gilt die Aussage, falls A eine Matrix in Jordanscher Normalform ist; in diesem Fall liefern die Spalten der Jordanblöcke zum Eigenwert λ ein entsprechendes System von Lösungen. Im allgemeinen Fall ergibt sich die Aussage nun unmittelbar aus Proposition 5.12, denn ist $(\varphi_0, ..., \varphi_{r-1})$ ein System von Funktionen der angegebenen Form, und ist $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, dann haben auch die Einträge des Tupels $(T\varphi_0, ..., T\varphi_{r-1})$ die angegebene Gestalt. □

Man beachte, dass die Jordansche Normalform nicht bei der Formulierung, sondern lediglich beim Beweis von Satz 5.19 eine Rolle spielt. Tatsächlich kann ein Fundamentalsystem von Lösungen eines Systems $y' = Ay$ bestimmt werden, ohne die Jordansche Normalform J von A oder gar die Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $J = TAT^{-1}$ zu berechnen. Wir wollen dies an dem Beispiel von oben demonstrieren, betrachten also noch einmal das System $y' = Ay$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen die erste Komponente des Lösungstupel $(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ an in der Form $\tilde{\psi}_0(t) = e^{3t} \cdot {}^{\mathrm{t}}(a\ b\ c)$, mit noch zu bestimmenden Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Genau dann ist $\tilde{\psi}_0$ eine Lösung von $y' = Ay$, wenn

$$\tilde{\psi}_0'(t) = A\tilde{\psi}_0(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 3e^{3t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{3t}A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

gilt. Es ist $\tilde{\psi}_0$ also genau dann eine Lösung, wenn (a, b, c) ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 3 ist. Mit der aus der Linearen Algebra bekannten Methode rechnet man nach, dass

$$\mathrm{Eig}(A, 3) \quad = \quad \ker(A - 3E) \quad = \quad \mathrm{lin}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

Dies zeigt, dass durch

$$\tilde{\psi}_0(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine erste Lösung des Systems gegeben ist. Gemäß Satz 5.19 hat nun die Lösung $\tilde{\psi}_1$ die Form

$$\tilde{\psi}_1(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} a + dt \\ b + et \\ c + ft \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt jeweils die Äquivalenz

$$\tilde{\psi}_1'(t) = A\tilde{\psi}_1(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{3t}\begin{pmatrix} d + 3(a + dt) \\ e + 3(b + et) \\ f + 3(c + ft) \end{pmatrix} = e^{3t}A\begin{pmatrix} a + dt \\ b + et \\ c + ft \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d + 3a + 3dt \\ e + 3b + 3et \\ f + 3c + 3ft \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a + dt \\ b + et \\ c + ft \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich der Polynomkoeffizienten auf beiden Seiten erhalten wir das Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+3a \\ e+3b \\ f+3c \end{pmatrix} \quad , \quad A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Durch die zweite Gleichung wird wiederum nur ausgedrückt, dass ${}^{\mathrm{t}}(d\ e\ f)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist. Wir können also $d=3$, $e=3$, $f=1$ setzen, damit ist diese Gleichung erfüllt. Setzen wir nun diese Werte in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3a \\ 3+3b \\ 1+3c \end{pmatrix}$$

was umgeformt werden kann zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5a & - & 4b & - & 3c & = & 3 \\ 7a & - & 5b & - & 6c & = & 3 \\ a & - & b & & & = & 1. \end{array}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus erhalten wir die Lösung $(a,b,d) = (0,-1,\frac{1}{3})$. Die gesuchte Lösung von $y' = Ay$ ist somit gegeben durch

$$\tilde{\psi}_1(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 3t \\ -1+3t \\ \frac{1}{3}+t \end{pmatrix}.$$

Die Komponente $\tilde{\psi}_2$ hat nun nach Satz 5.19 die Form

$$\tilde{\psi}_2(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} a+dt+gt^2 \\ b+et+ht^2 \\ c+ft+jt^2 \end{pmatrix}$$

mit $a,b,c,...,g,h,j \in \mathbb{C}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$\tilde{\psi}_2'(t) = A\tilde{\psi}_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{3t}\begin{pmatrix} d+3a+(2g+3d)t+3gt^2 \\ e+3b+(2h+3e)t+3ht^2 \\ f+3c+(2j+3f)t+3jt^2 \end{pmatrix} = e^{3t}A\begin{pmatrix} a+dt+gt^2 \\ b+et+ht^2 \\ c+ft+jt^2 \end{pmatrix}.$$

Diesmal erhalten wir durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+3a \\ e+3b \\ f+3c \end{pmatrix} \quad , \quad A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g+3d \\ 2h+3e \\ 2j+3f \end{pmatrix} \quad , \quad A\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix}.$$

Für (g,h,j) setzen wir wieder den Eigenvektor $(3,3,1)$ ein. Damit reduziert sich die zweite Gleichung auf

$$A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3d \\ 6+3e \\ 2+3f \end{pmatrix} \quad ,$$

was äquivalent ist zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5d & - & 4e & - & 3f & = & 6 \\ 7d & - & 5e & - & 6f & = & 6 \\ d & - & e & & & = & 2 \end{array}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert die Lösung $(d,e,f) = (0,-2,\frac{2}{3})$. Setzen wir dies wiederum in die erste Gleichung ein so erhalten wir

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ -2+3b \\ \frac{2}{3}+3c \end{pmatrix}$$

was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5a & - & 4b & - & 3c & = & 0 \\ 7a & - & 5b & - & 6c & = & -2 \\ a & - & b & & & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

umgeformt werden kann. Mit den Gauß-Algorithmus erhalten wir $(a,b,c) = (0,-\frac{2}{3},\frac{8}{9})$. Insgesamt ist damit die letzte Komponente unseres Lösungstupels gegeben durch

$$\tilde{\psi}_2(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 3t^2 \\ -\frac{2}{3}-2t+3t^2 \\ \frac{8}{9}+\frac{2}{3}t+t^2 \end{pmatrix}.$$

Ingesamt haben wir damit damit das Fundamentalsystem

$$\tilde{\Psi}(t) \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 3 & 3t & 3t^2 \\ 3 & 3t-1 & 3t^2-2t-\frac{2}{3} \\ 1 & t+\frac{1}{3} & t^2+\frac{2}{3}t+\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

bestimmt. Dieses Fundamentalsystem erzeugt denselben Lösungsraum wie das Fundamentalsystem $\Psi(t)$, das wir oben berechnet haben, denn die beiden Systeme hängen miteinander zusammen durch

$$e^{3t}\begin{pmatrix} 9 & 9t-3 & \frac{9}{2}t^2-3t \\ 9 & 9t-6 & \frac{9}{2}t^2-6t \\ 3 & 3t & \frac{3}{2}t^2+1 \end{pmatrix} \quad = \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 3 & 3t & 3t^2 \\ 3 & 3t-1 & 3t^2-2t-\frac{2}{3} \\ 1 & t+\frac{1}{3} & t^2+\frac{2}{3}t+\frac{8}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad ,$$

und die konstante Matrix auf der rechten Seite ist invertierbar.

Definition 5.20 Seien $n,k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{K}^{nk}$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \to \mathbb{K}^n$ eine Funktion. Dann bezeichen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(k)} \quad = \quad f(y,y',...,y^{(k-1)})$$

als ***autonomes*** $\mathbb{K}$-wertiges System von n Differenzialgleichungen der Ordnung k. Als ***Lösung*** eines solchen Systems bezeichnen wir eine mindestens k-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\varphi(t),\varphi'(t),...,\varphi^{(k-1)}(t)) \in U \quad \text{und} \quad \varphi_j^{(k)}(t) = f_j(\varphi(t),\varphi'(t),...,\varphi^{(k-1)}(t))$$

für $1 \leq j \leq n$ und alle $t \in I$ erfüllt ist.

Der einzige Unterschied zu den Definitionen aus § 3 besteht also darin, dass die Funktion f auf der rechten Seiten des Systems nicht explizit vom x-Wert abhängt. Eine Folge davon ist, dass die Menge der Lösungen unter beliebigen Verschiebungen des Funktionsparameters erhalten bleibt: Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung und $t_0 \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Funktion $\varphi_{t_0} : I_{t_0} \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\varphi_{t_0}(t) = \varphi(t - t_0)$ auf $I_{t_0} = \{t_0 + t \mid t \in I\}$ eine Lösung. Wir werden uns zunächst auf autonome Systeme 1. Ordnung konzentrieren.

Definition 5.21 Seien $y' = f(y)$ und $y' = g(y)$ zwei autonome Systeme erster Ordnung, gegeben durch stetige Funktionen $f : U \to \mathbb{K}^n$, $g : V \to \mathbb{K}^n$, definiert auf offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{K}^n$. Wir bezeichnen diese Systeme als ***linear äquivalent***, wenn eine bijektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $\phi(U) = V$ und $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ existiert.

Offenbar hängen die Lösungen von zwei linear äquivalenten autonomen Systemen eng miteinander zusammen: Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $y' = f(y)$ und definieren wir $\psi(t) = (\phi \circ \varphi)(t)$, dann gilt auf Grund der Kettenregel

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= (\phi \circ \varphi)'(t) = \phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = \phi(\varphi'(t)) = (\phi \circ f \circ \varphi)(t) = \\ (\phi \circ (\phi^{-1} \circ g \circ \phi) \circ \varphi)(t) &= ((g \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi))(t) = (g \circ \psi)(t) = g(\psi(t)).\end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt verwendet, dass eine lineare Abbildung in jedem Punkt ihres Definitionsbereich total differenzierabar ist und mit ihrer totalen Ableitung in jedem Punkt übereinstimmt. Die Rechnung zeigt, dass ψ eine Lösung von $y' = g(y)$ ist. Die Lösungen der beiden Systeme werden also durch eine lineare Transformation ineinander überführt. Dies zeigt, dass die Lösungen beider Systeme dieselben qualitativen Eigenschaften (zum Beispiel Beschränktheit der Lösungskurven, asymptotisches Verhalten für $t \mapsto \pm\infty$ usw.) aufweisen.

Wir setzen uns nun das Ziel, auf Basis der bisherigen Ergebnisse die Lösungen der autonomen Systeme $y' = Ay$ mit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ bis auf lineare Äquivalenz zu klassifizieren. Auf Grund der oben zusammengefassten Aussagen aus der Linearen Algebra ist A ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}$ in Jordanscher Normalform. In dem Fall, dass das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$ bereits über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, also entweder eine doppelte reelle Nullstelle oder zwei verschiedene reelle Nullstellen besitzt, ist A ähnlich zu genau einer Matrix der Form

$$\text{(1)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \text{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}^\times,\ a \leq b.$$

Ansonsten besitzt χ_A ein konjugiert-komplexes Paar nicht-reeller Nullstellen, und nach Proposition 5.15 ist A damit ähnlich zu einer Matrix der Form

$$\text{(3)} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Wir beschränken uns nun auf den Fall, dass ein System $y' = Ay$ mit einer Matrix in dieser Form gegeben ist und untersuchen die Lösungen in jedem der drei Fälle.

(1) Hier haben die Lösungen die Form $\varphi_{c,d}(t) = (x(t), y(t)) = (ce^{at}, de^{bt})$ mit $c, d \in \mathbb{R}$. Im Fall $c = d = 0$ ist die Lösung stationär, genau konstant gleich $(0,0)$. Man bezeichnet auf Grund der Existenz einer solchen Lösung den Koordinatenursprung auch als ***Ruhelage*** des Systems. Anhand des Vorzeichens von c entscheidet sich, ob die Lösung in der linken oder rechten Halbebene verläuft. Entsprechend kann man am Vorzeichen von d ablesen, ob die Lösung in der oberen oder unteren Halbebene verläuft. Im Fall $c = 0$ verläuft die Lösung auf der y-Achse, im Fall $d = 0$ auf der x-Achse.

Das Vorzeichen von ab ist entscheidend für die Form der ***Trajektorie***, also der Form der Bildmenge der Lösung $\varphi_{c,d}$. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall $c, d > 0$. Die Umformung $x = x(t) = e^{at} \iff \ln(\frac{x}{c}) = at \iff t = a^{-1}\ln(\frac{x}{c})$ und Einsetzen in $y(t) = de^{bt}$ zeigt, dass die Trajektorien innerhalb von Kurven der Form $y = e^{(b/a)\ln(x/c)} = d(\frac{x}{c})^{b/a}$ verlaufen. Es handelt sich um Kurven der Form $y = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}^\times$, die um den Faktor c in x-Richtung und um den Faktor d in y-Richtung gestreckt wurden.

Ist nun $r > 0$, so haben die Trajektorien die Form von Graphen von Potenzfunktionen. Im Fall $a, b < 0$ laufen alle Lösungen auf den Nullpunkt zu. Man bezeichnet diesen dann als ***stabilen Knoten*** oder ***asymptotisch stabile Ruhelage***. Im Fall $a, b > 0$ laufen die Lösungen (mit exponentieller Geschwindigkeit) vom Nullpunkt weg. In diesem Fall spricht man bei $(0,0)$ von eine ***instabilen Knoten*** oder einer ***instabilen Ruhelage***. (Die genaue Bedeutung dieser Eigenschaften einer Ruhelage behandeln wir später.)

Betrachten wir nun den Fall $r < 0$. In dieser Situation haben die Trajektorien die qualitative Gestalt von Hyperbelkurven. Abgesehen von den Lösungen mit $c = 0$ oder $d = 0$ gibt es keine, die kontinuierlich auf den Nullpunkt zu- oder von diesem weglaufen. In diesem Fall wird $(0,0)$ als ***Sattelpunkt*** bezeichnet; auch hier handelt es sich um eine instabile Ruhelage.

(2) In diesem Fall haben die Lösungen die Form $\varphi_{c,d}(t) = (x(t), y(t)) = (ce^{at} + dte^{at}, de^{at})$ mit $c, d \in \mathbb{R}$. Im Fall $a < 0$ laufen die Lösungen auf den Nullpunkt zu, so dass auch hier ein stabiler Knoten bzw. eine asymptotisch stabile Ruhelage vorliegt. Im Fall $a > 0$ entfernen sich alle Lösungen vom Nullpunkt, also haben wir es hier wieder mit einem instabilen Knoten bzw. einer instabilen Ruhelage zu tun.

Die Trajektoren weisen allerdings eine Form auf, die sich von den Kurven im Fall (1) qualitativ unterscheidet. Hierzu beschränken wir uns auf den Fall $a > 0$. Die Ableitung $x'(t) = (d + ac + adt)e^{at}$ der x-Koordinate hat bei $t_0 = -\frac{1}{a} - \frac{c}{d}$ eine Nullstelle, und die zweite Ableitung $x''(t) = a(2d + ac + adt)e^a t$ hat dort den Wert ade^{at_0}. Die Ableitung der y-Koordinate ist gegeben durch $y'(t) = ade^{at}$. Für $d = 0$ verläuft die Lösung vollständig auf der x-Achse. Für $d > 0$ liegt die Lösung in der oberen Halbebene, die y-Koordinate ist wegen $y'(t) > 0$ streng monoton wachsend, aber wegen $x'(t_0) = 0$, $x''(t_0) > 0$ wendet sich die Lösungskurve bei t_0 von links nach rechts. Für $d < 0$ befindet sich die Lösung in der unteren Halbebene, und die Lösungskurve wendet sich an der Stelle t_0 von rechts nach links.

(3) In diesem Fall handelt es sich bei den Lösungen um Linearkombinationen von

$$\varphi(t) = e^{at}\begin{pmatrix}\cos(bt)\\ \sin(bt)\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi(t) = e^{at}\begin{pmatrix}-\sin(bt)\\ \cos(bt)\end{pmatrix}.$$

Im Fall $a = 0$ sind die Trajektorien Kreise, die für $b > 0$ gegen und für $b < 0$ im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Hier bezeichnet man den Nullpunkt als ***Zentrum*** oder ***Wirbelpunkt***, und es liegt eine ***stabile Ruhelage***, aber keine asymptotisch stabile Ruhelage vor.

Im Fall $a \neq 0$ haben die Trajektorien die Form von Spiralen. Für $a < 0$ laufen die Lösungen spiralförmig auf den Nullpunkt zu. Die Ruhelage $(0,0)$ ist hier wiederum asymptotisch stabil; weil aber der Richtungsvektor

der Lösungskurven diesmal für $t \to +\infty$ keinen Grenzwert besitzt, sondern in der Nähe des Nullpunkts immer schneller rotiert, spricht man hier nicht von einem stabilen Knoten, sondern von einem ***stabilen Strudel***. Im Fall $a > 0$ laufen alle Lösungen vom Nullpunkt weg. Hier haben wir es bei $(0,0)$ wiederum mit einer instabilen Ruhelage bzw. einem ***instabilen Strudel*** zu tun.

Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir die bisher entwickelte Theorie auf lineare Differenzialgleichungen höhere Ordnung mit konstanten Koeffizienten an. Eine solche DGL schreiben wir in der Form

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y \quad = \quad 0$$

mit $a_0, a_1, ..., a_{k-1} \in \mathbb{K}$. Man bezeichnet das Polynom $\chi = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$ als das ***charakteristische Polynom*** der DGL.

Für den weiteren Verlauf wird sich die folgende Notation als praktisch erweisen: Ist $p \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$, $p = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$, dann bezeichnen wir mit $p(\frac{\partial}{\partial t})$ den Differentialoperator auf dem Raum $C^k(I)$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(f)(t) \quad = \quad a_k f^{(k)}(t) + ... + a_1 f'(t) + a_0.$$

Lemma 5.22 Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann gilt für jede Funktion $f \in C^k(I)$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^k (f(t)e^{\lambda t}) \quad = \quad f^{(k)}(t)e^{\lambda t}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über k. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Den Induktionsschritt von k auf $k+1$ erhält man durch die Rechnung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^{k+1} (f(t)e^{\lambda t}) \quad = \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)(f^{(k)}(t)e^{\lambda t}) \quad =$$

$$f^{(k+1)}(t)e^{\lambda t} + f^{(k)}(t)\lambda e^{\lambda t} - \lambda f^{(k)}(t)e^{\lambda t} \quad = \quad f^{(k+1)}(t)e^{\lambda t}.$$

□

Lemma 5.23 Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p(\lambda) \neq 0$. Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad k, dann gibt es eine weitere Polynomfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vom selben Grad mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(g(t)e^{\lambda t}) \quad = \quad h(t)e^{\lambda t}.$$

Beweis: Sei p vom Grad k. Wir schreiben $p \in \mathbb{C}[x]$ in der Form $p = \sum_{j=0}^{k} c_j (x-\lambda)^j$, mit geeigneten Koeffizienten $c_j \in \mathbb{C}$. Dies ist möglich, da die Polynome $g_j = (x-\lambda)^j$ mit $0 \leq j \leq k$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind. Wegen $p(\lambda) \neq 0$ ist $c_0 \neq 0$. Nun gilt auf Grund des vorherigen Lemmas

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(g(t)e^{\lambda t}) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k} c_j \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^j (g(t)e^{\lambda t}) \quad = \quad \sum_{j=0}^{k} c_j g^{(j)}(t)e^{\lambda t}.$$

Die gesuchte Polynomfunktion h ist also durch $h(t) = \sum_{j=0}^{k} c_j g^{(j)}(t)$ gegeben; wegen $c_0 \neq 0$ ist diese vom Grad k. □

Im weiteren Verlauf werden wir auch lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten betrachten. Darunter verstehen wir ein System der Form

$$a_k(x)y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y \quad = \quad b(x) \quad ,$$

wobei $a_\ell : I \to \mathbb{K}$ für $0 \le \ell \le k$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnen. Ist $b = 0$, dann bezeichnen wir die DGL als ***homogen***, sonst als ***inhomogen***. Im homogenen Fall nennen wir ein Tupel $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ von k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi_\ell : I \to \mathbb{K}$ ein ***Fundamentalsystem*** von Lösungen, wenn $\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell(t)\varphi^{(\ell)}(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt, und wenn die ***Wronski-Determinante***

$$w(t) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & \varphi_2^{(k-1)}(t) & \ldots & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in I$ ungleich null ist. Wegen Folgerung 5.5 ist $w(a) \neq 0$ für ein $a \in I$ bereits hinreichend dafür, dass die Wronski-Determinante auf ganz I ungleich null ist.

Satz 5.24 Sei $p \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom der Form $\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j)^{e_j}$, mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die lineare Differentialgleichung r-ter Ordnung mit charakteristischem Polynom p ein Fundamentalsystem von Lösungen bestehend aus den Funktionen

$$\varphi_{jm}(t) \quad = \quad t^m e^{\lambda_j t} \quad , \quad 0 \le m < e_j \quad , \quad 1 \le j \le r.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Funktionen φ_{jm} tatsächlich Lösungen der DGL sind. Für $1 \le j \le m$ sei das Polynom $q_j \in \mathbb{C}[x]$ jeweils der Faktor in der Zerlegung $p = (x-\lambda_j)^{e_j} q_j$. Auf Grund von Lemma 5.22 und wegen $e_j > m$ gilt

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_{jm} \quad = \quad q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j\right)^{e_j}(t^m e^{\lambda_j t}) \quad = \quad q_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{e_j}(t^m)\cdot e^{\lambda_j t}\right) \quad = \quad 0.$$

Nun beweisen wir noch die lineare Unabhängigkeit des Systems. Eine beliebige Linearkombination der Funktionen φ_{jm} kann in der Form

$$\sum_{j=1}^{r} g_j(t)e^{\lambda_i t}$$

dargestellt werden, mit geeigneten Polynomfunktionen g_j vom Grad $\le e_j - 1$. Zu zeigen ist, dass diese Linearkombination nur dann gleich Null ist, wenn alle Polynomfunktionen gleich Null sind. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über r. Aus $g_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt offenbar $g_1 = 0$. Setzen wir nun die Aussage für $r-1$ als gültig voraus, und sei

$$\sum_{j=1}^{r} g_j(t)e^{\lambda_j t} \quad = \quad 0.$$

Wenn eine der Polynomfunktionen g_j gleich Null ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Ansonsten wenden wir den Differentialoperator $D = (\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_r)^{e_r}$ auf die Gleichung an. Dann verschwindet der

letzte Summand wegen Lemma 5.22 und $g_r^{(e_r)}(t) = 0$, und nach Lemma 5.23 gibt es Polynomfunktionen h_j desselben Grades wie g_j mit $D(g_j(t)e^{\lambda_j t}) = h_j(t)e^{\lambda_j t}$ für $1 \leq j \leq r-1$. Wir erhalten die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{r-1} h_j(t)e^{\lambda_j t} \quad = \quad 0.$$

Da alle $h_j \neq 0$ sind, widerspricht dies der Induktionsvoraussetzung. Also muss bereits $g_j = 0$ für $1 \leq j \leq r$ gelten. □

Wir betrachten die DGL $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p \quad = \quad x^4 + 8x^2 + 16 \quad = \quad (x^2+4)^2 \quad = \quad (x-2i)^2(x+2i)^2.$$

Die beiden Nullstellen sind also $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$, mit Vielfachheiten $e_1 = e_2 = 2$. Auf Grund des Satzes ist also durch

$$\varphi_{1,0}(t) = e^{2it} \quad , \quad \varphi_{1,1}(t) = te^{2it} \quad , \quad \varphi_{2,0}(t) = e^{-2it} \quad , \quad \varphi_{2,1}(t) = te^{-2it}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben. Um ein System aus reellwertigen Funktionen zu erhalten, bilden wir die Linearkombinationen

$$\begin{aligned}\psi_1(t) \quad = \quad \mathrm{Re}\varphi_{1,0}(t) \quad = \quad = \quad \tfrac{1}{2}\varphi_{1,0}(t) + \tfrac{1}{2}\varphi_{2,0}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2}e^{2it} + \tfrac{1}{2}e^{-2it} \quad = \\ \tfrac{1}{2}(\cos(2t) + i\sin(2t)) + \tfrac{1}{2}(\cos(2t) - i\sin(2t)) \quad = \quad \cos(2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(t) \quad = \quad \mathrm{Im}\varphi_{1,0}(t) \quad = \quad = \quad \tfrac{1}{2i}\varphi_{1,0}(t) - \tfrac{1}{2i}\varphi_{2,0}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2i}e^{2it} - \tfrac{1}{2i}e^{-2it} \quad = \\ \tfrac{1}{2i}(\cos(2t) + i\sin(2t)) - \tfrac{1}{2i}(\cos(2t) - i\sin(2t)) \quad = \quad \sin(2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_3(t) \quad = \quad \mathrm{Re}\varphi_{1,1}(t) \quad = \quad = \quad \tfrac{1}{2}\varphi_{1,1}(t) + \tfrac{1}{2}\varphi_{2,1}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2}te^{2it} + \tfrac{1}{2}te^{-2it} \quad = \\ \tfrac{1}{2}(t\cos(2t) + it\sin(2t)) + \tfrac{1}{2}(t\cos(2t) - it\sin(2t)) \quad = \quad t\cos(2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_4(t) \quad = \quad \mathrm{Im}\varphi_{1,1}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2i}\varphi_{1,1}(t) - \tfrac{1}{2i}\varphi_{2,1}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2i}te^{2it} - \tfrac{1}{2i}te^{-2it} \quad = \\ \tfrac{1}{2i}(t\cos(2t) + it\sin(2t)) - \tfrac{1}{2i}(t\cos(2t) - it\sin(2t)) \quad = \quad t\sin(2t)\end{aligned}$$

Auch $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ ist ein Fundamentalsystem von Lösungen, über $\mathbb{C}$ und damit auch über $\mathbb{R}$, denn offenbar können wir die ursprünglichen Funktionen $\varphi_{1,0}, \varphi_{1,1}, \varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}$ durch Bildung von Linearkombinationen aus $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ zurückgewinnen.

§ 6. *Weitere Verfahren zur Untersuchung linearer Systeme*

Zusammenfassung. Das Reduktionsverfahren von d'Alembert ermöglicht es, ein lineares System von Differenzialgleichungen der Größe n auf ein System der Größe $n-1$ zu reduzieren, sobald eine Lösung bekannt ist. Mit einer geeigneten Variante dieses Verfahrens lassen sich auch lineare DGLs höherer Ordnung behandeln. Auch zur Variation des Konstanten für inhomogene Systeme, die wir im letzten Kapitel kennengelernt haben, führen wir eine Variante für lineare DGLs höherer Ordnung ein. Die Floquet-Theorie ermöglicht, Ergebnisse der Theorie linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten auf Systeme mit periodischen Koeffizienten zu übertragen.

Wir beginnen mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert.

Satz 6.1 Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $y' = A(x)y$ ein lineares System, mit einer matrixwertigen Funktion $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sei $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung mit $\varphi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Sei außerdem $z' = B(x)z$ das lineare System mit $B : I \to \mathcal{M}_{n-1,\mathbb{K}}$ gegeben durch

$$b_{ij}(x) \quad = \quad a_{ij}(x) - \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)} a_{1j}(x) \quad \text{für } 2 \leq i, j \leq n.$$

(i) Ist $\rho : I \to \mathbb{K}^{n-1}$ eine Lösung von $z' = Bz$, $a \in I$, und ist $\phi : I \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$\phi(t) \quad = \quad \int_a^t \frac{1}{\varphi_1(s)} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}(s)\rho_j(s) \right) ds \quad ,$$

dann ist $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\psi(t) = \phi(t)\varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(t) \end{pmatrix}$ eine Lösung von $y' = A(x)y$.

(ii) Sei $P = (\rho_{ij})$ ein Fundamentalsystem von $z' = Bz$. Für $2 \leq j \leq n$ seien $\phi_j : I \to \mathbb{K}$ und $\psi_j : I \to \mathbb{K}^n$ definiert durch

$$\phi_j(t) = \int_a^t \frac{1}{\varphi_1(s)} \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1k}(s)\rho_{kj}(s) \right) ds \quad , \quad \psi_j(t)(t) = \phi_j(t)\varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_{2j}(t) \\ \vdots \\ \rho_{nj}(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist die matrixwertige Funktion $\Psi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ mit den Spalten $\varphi, \psi_2, ..., \psi_n$ ein Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$.

Beweis: zu (i) Dass ψ eine Lösung von $y' = A(x)y$ ist, ist äquivalent zu

$$\psi'(t) = A(t)\psi(t) \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(t)\varphi(t) + \phi(t)\varphi'(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho'(t) \end{pmatrix} = \phi(t)A(t)\varphi(t) + A(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \rho(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi'(t)\varphi(t) + \phi(t)A(t)\varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho'(t) \end{pmatrix} = \phi(t)A(t)\varphi(t) + A(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \rho(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi'(t)\varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho'(t) \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \rho(t) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \rho'(t) \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \rho(t) \end{pmatrix} - \phi'(t)\varphi(t).$$

Betrachten wir in der vorletzten Gleichung auf beiden Seiten die erste Komponente, so erhalten wir

$$\phi'(t)\varphi_1(t) = \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)\rho_j(t) \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)} \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)\rho_j(t) \quad ,$$

was nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung äquivalent ist zum angegebenen Ausdruck für die Funktion ϕ. Betrachten wir in der letzten Gleichung der obigen Rechnung die k-te Komponente für $2 \leq k \leq n$, so erhalten wir jeweils

$$\begin{aligned} \rho_k'(t) &= \sum_{j=2}^{n} a_{kj}(t)\rho_j(t) - \phi'(t)\varphi_k(t) = \sum_{j=2}^{n} a_{kj}(t)\rho_j(t) - \frac{\varphi_k(t)}{\varphi_1(t)} \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)\rho_j(t) \\ &= \sum_{j=2}^{n} \left(a_{kj}(t) - \frac{\varphi_k(t)}{\varphi_1(t)} a_{1j}(t) \right) \rho_j(t). \end{aligned}$$

Das ist äquivalent dazu, dass ρ eine Lösung von $z' = Bz$ ist.

zu (ii) Nach Teil (i) sind $\varphi, \psi_2, ..., \psi_n$ Lösungen des Systems. Zu zeigen bleibt die lineare Unabhängigkeit. Seien also $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi_2 + ... + \lambda_n\psi_n = 0$. Betrachten wir auf beiden Seiten die erste Komponente und multiplizieren wir mit φ_1^{-1}, so erhalten wir

$$\lambda_1 + \lambda_2\phi_2 + ... + \lambda_n\phi_n = 0.$$

Multiplizieren wir dies mit φ und ziehen es von der ursprünglichen Gleichung ab, so erhalten wir

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_{22}(t) \\ \vdots \\ \rho_{n2}(t) \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_{2n}(t) \\ \vdots \\ \rho_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $P = (\rho_{ij})$ nach Voraussetzung ein Fundamentalsystem von $z' = Bz$ ist, folgt daraus $\lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, und damit auch $\lambda_1 = -\lambda_2\phi_2 - ... - \lambda_n\phi_n = 0$. □

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das System $y' = A(x)y$, auf dem Definitionsintervall $I = \mathbb{R}^+$ gegeben durch

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}$$

Offenbar ist $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems. Mit der Notation aus dem Satz gilt

$$b_{22}(x) \quad = \quad a_{22}(x) - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} a_{12}(x) \quad = \quad \tfrac{2}{x} - \tfrac{(-x)}{x^2}(-1) \quad = \quad \tfrac{2}{x} - (-\tfrac{1}{x})(-1) = \tfrac{1}{x}.$$

Damit haben wir unser System der Größe 2 auf das System $z' = \frac{1}{x} \cdot z$ der Größe 1 reduziert. Eine Lösung dieses Systems ist durch $\rho_{22}(t) = t$ gegeben. Wir berechnen nun

$$\phi_2(t) \quad = \quad \int_1^t \varphi_1(s)^{-1} a_{12}(s) \rho_{22}(s)\, ds \quad = \quad \int_1^t \frac{1}{s^2} \cdot (-1) \cdot s\, ds \quad = \quad \int_1^t (-\tfrac{1}{s})\, ds \quad = \quad -\ln(t)$$

und erhalten durch

$$\psi_2(t) \quad = \quad \phi_2(t)\varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_{22}(t) \end{pmatrix} \quad = \quad (-\ln(t)) \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -t^2 \ln(t) \\ t\ln(t) + t \end{pmatrix}$$

eine weitere Lösung des ursprünglichen Systems. Nach Teil (ii) des Satzes ist

$$\Psi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln(t) \\ -t & t\ln(t) + t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$.

Wir formulieren eine Variante des d'Alembert'schen Reduktionsverfahrens für Differenzialgleichungen höherer Ordnung.

Satz 6.2 Gegeben sei eine DGL höherer Ordnung

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y \quad = \quad 0$$

mit $a_k : I \to \mathbb{K}$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq n$. Sei $\varphi : I \to \mathbb{K}$ eine Lösung der DGL mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und für $1 \leq j \leq n$ sei $b_j(x) = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k(x) \varphi^{(k-j)}(x)$.

(i) Ist ρ eine Lösung von

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(x) y^{(j)} \quad = \quad 0 \quad ,$$

und ist $\hat{\rho} : I \to \mathbb{K}$ eine Stammfunktion von ρ, dann ist durch $\psi = \varphi\hat{\rho}$ eine Lösung der ursprünglichen DGL definiert.

(ii) Ist $(\rho_2, \ldots, \rho_n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL aus Teil (i), und ist $\hat{\rho}_k$ jeweils eine Stammfunktion von ρ_k für $2 \leq k \leq n$, dann ist durch $\varphi, \varphi\hat{\rho}_2, \ldots, \varphi\hat{\rho}_n$ ein Fundamentalsystem der ursprünglichen DGL definiert.

Beweis: zu (i) Setzen wir ψ in unsere DGL n-ter Ordnung ein, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\psi^{(k)}(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(t)(\varphi\hat{\rho})^{(k)}(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\hat{\rho}^{(j)}(t)\varphi^{(k-j)}(t) \quad =$$

$$\sum_{j=0}^{n}\hat{\rho}^{(j)}(t)\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}a_k(t)\varphi^{(k-j)}(t) \quad = \quad \hat{\rho}(t)\sum_{k=0}^{n}a_k(t)\varphi^{(k)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\hat{\rho}^{(j)}(t)\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}a_k(t)\varphi^{(k-j)}(t) \quad =$$

$$0+\sum_{j=1}^{n}\rho^{(j-1)}(t)\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}a_k(t)\varphi^{(k-j)}(t) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n-1}\rho^{(j)}(t)\sum_{k=j+1}^{n}\binom{k}{j+1}a_k(t)\varphi^{(k-j-1)}(t) \quad =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j+1}^{n}\binom{k}{j+1}a_k(t)\varphi^{(k-j-1)}(t)\right)\rho^{(j)}(t) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n-1}b_{j+1}(t)\rho^{(j)}(t) \quad = \quad 0$$

mit $b_j(t)=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}a_k(t)\varphi^{(k-j)}(t)$, wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass ρ nach Voraussetzung eine Lösung von $\sum_{j=0}^{n-1}b_{j+1}(x)y^{(j)}=0$ ist. Das Gleichheitszeichen am Ende der ersten Zeile ist gültig, weil links und rechts davon jeweils über alle Paare (j,k) mit $0\le j\le k\le n$ summiert wird. Insgesamt zeigt die Rechung, dass ψ eine Lösung der ursprünglichen DGL ist.

zu (ii) Aus Teil (i) folgt, dass durch die Funktionen $\varphi,\varphi\hat{\rho}_2,...,\varphi\hat{\rho}_n$ Lösungen der ursprünglichen DGL gegeben sind. Nun muss noch die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen werden. Seien $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$ mit $\lambda_1\varphi+\lambda_2\varphi\hat{\rho}_2+...+\lambda_n\varphi\hat{\rho}_n=0$. Multiplizieren wir die Gleichung mit φ^{-1} und leiten anschließend ab, dann erhalten wir $\lambda_2\rho_2+...+\lambda_n\rho_n=0$. Weil $(\rho_2,...,\rho_n)$ ein Fundamentalsystem ist, folgt $\lambda_k=0$ für $2\le k\le n$. Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung liefert $\lambda_1\varphi=0$ und damit $\lambda_1=0$, wegen $\varphi_1(t)\neq 0$ für alle $t\in I$. □

Im Fall $n=2$ lässt sich die Aussage folgendermaßen formulieren: Ist eine lineare DGL zweiter Ordnung $y''+a_1y'+a_0y=0$ vorgegeben, ist $\varphi:I\to\mathbb{K}$ eine Lösung mit $\varphi(t)\neq 0$ für alle $t\in I$, ist ρ eine Lösung von

$$y'+\left(a_1(x)+2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)y \quad = \quad 0 \quad ,$$

und ist $\hat{\rho}$ eine Stammfunktion von ρ, dann ist durch $\varphi,\varphi\hat{\rho}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL zweiter Ordnung gegeben. Dies ergibt ergibt sich unmittelbar aus

$$b_1(x) \quad = \quad \binom{1}{1}a_1(x)\varphi(x)+\binom{2}{1}a_2(x)\varphi'(x) \quad = \quad a_1(x)\varphi(x)+2\varphi'(x)$$

und $b_2(x)=\binom{2}{2}a_2(x)\varphi(x)=\varphi(x)$, woraus sich die DGL $b_2(x)y'+b_1(x)y=0\Leftrightarrow\varphi(x)y'+(a_1(x)\varphi(x)+2\varphi'(x))y=0$ ergibt, die durch Multiplikation mit $\varphi(x)^{-1}$ die angegebene Form erhält.

Als konkretes Anwendungsbeispiel betrachten wir die Differenzialgleichung

$$y''-\cos(x)y'+\sin(x)y \quad = \quad 0.$$

Eine Lösung ist durch $\varphi(t)=e^{\sin(t)}$ gegeben. Wegen $\varphi'(t)=\cos(t)e^{\sin(t)}$ und $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\cos(t)$ führt der Ansatz von oben auf die Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y'+\cos(x)y \quad = \quad = \quad 0 \quad ,$$

die durch $\rho(t) = e^{-\sin(t)}$ gelöst wird. Wir erhalten also eine weitere Lösung der ursprünglichen DGL durch $\psi_2(t) = \varphi(t)\hat{\rho}(t) = e^{\sin(t)} \int_0^t e^{-\sin(s)}\, ds$, und $(\varphi(t), \psi_2(t))$ ist ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Bereits im letzten (Satz 5.8) Kapitel haben wir die Variation der Konstanten für inhomogene lineare Systeme behandelt. Mit dieser Methode lassen sich prinzipiell auch inhomogene lineare DGLs höherer Ordnung lösen, indem man sie zuvor in ein System erster Ordnung übersetzt. Da aber die Systeme erster Ordnung, die auf diese Weise entstehen, eine spezielle Form haben, lässt sich ein einfacheres Lösungsverfahren formulieren.

Satz 6.3 Gegeben sei eine inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung der Form

$$y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y \quad = \quad b(x)$$

mit stetigen Funktionen $a_k : I \to \mathbb{K}$ $(0 \le k \le n)$ und $b : I \to \mathbb{K}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Es sei w die Wronski-Determinante eines Fundamentalsystems $(u_1, \ldots, u_n)$ von Lösungen der entsprechenden homogenen DGL, und für $1 \le j \le n$ sei w_j die Wronski-Determinante des Systems $(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, u_n)$ von Ordnung $n-1$, also die Determinate der Matrix mit den Einträgen $u_{ik}(t) = u_k^{(i-1)}(t)$ für $1 \le i \le n-1$ und $1 \le k \le n$, $k \ne j$. Ist nun $a \in I$ beliebig gewählt, dann ist durch

$$w(t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} u_j(t) \int_a^t \frac{b(s)}{w(s)} w_j(s)\, ds$$

eine Lösung der DGL gegeben.

Beweis: Die Aussage wird aus Satz 5.8 hergeleitet. Es sei $y' = A(x)y$ das zur homogenen DGL gehörende System erster Ordnung, mit $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$. Dann ist $y' = A(x)y + \hat{b}(x)$ mit $\hat{b}(x) = {}^t(0, \ldots, 0, b(x))$ das entsprechende System erster Ordnung zur inhomogenen DGL. Weiter sei $\Phi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Systems. Dann sind die Einträge von $\Phi(t)$ gegeben durch $u_j^{(i-1)}(t)$ $(1 \le i, j \le n)$, wobei $(u_1, \ldots, u_n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung bezeichnet, vgl. Satz 3.3.

Nach Satz 5.8 ist die Funktion $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\psi(t) = \Phi(t)v(t)$ mit $v(t) = \int_a^t \Phi(s)^{-1}\hat{b}(s)\, ds$ eine Lösung des inhomogenen Systems. Nun ist der Vektor $z(t) = \Phi(t)^{-1}\hat{b}(t)$ für jedes $t \in I$ jeweils eine Lösung des linearen Gleichungssytems $\Phi(t)\cdot x = \hat{b}(t)$. Auf Grund der Cramerschen Regel sind die Komponenten dieser Lösung jeweils gegeben durch $z_j(t) = (\det\Phi(t))^{-1} \cdot \det\Psi_j(t) = w(t)^{-1} \det\Psi_j(t)$, wobei die Matrix $\Psi_j(t)$ dadurch zu Stande kommt, dass man die j-te Spalte von $\Phi(t)$ durch $\hat{b}(t)$ ersetzt. Entwicklung zur j-ten Spalte liefert $\det\Psi_j(t) = (-1)^{n+j} b(t) \det\Psi_j^{(n,j)}(t)$, wobei die Matrix $\Psi_j^{(n,j)}(t) \in \mathcal{M}_{n-1,\mathbb{K}}$ aus $\Psi_j(t) \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ durch Streichung der n-ten Zeile und der j-ten Spalten entsteht. (Denn der einzige Eintrag der j-ten Spalte von $\Psi_j(t)$, der möglicherweise ungleich null ist, ist der Eintrag $b(t)$ in der n-ten Zeile.) Aber das ist zugleich die Matrix, die aus $\Phi(t)$ durch Streichung der n-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, und folglich gilt $\det\Psi_j^{(n,j)}(t) = w_j(t)$, nach Definition von w_j. Die einzelnen Komponenten von $\Phi(t)^{-1}\hat{b}(t)$ sind also insgesamt für $1 \le j \le n$ jeweils gegeben durch

$$z_j(t) \quad = \quad w(t)^{-1} \det\Psi_j(t) \quad = \quad w(t)^{-1} \cdot (-1)^{n+j} b(t) \det\Psi_j^{(n,j)}(t) \quad = \quad (-1)^{n+j} w(t)^{-1} w_j(t) b(t) \quad ,$$

und es folgt

$$v_j(t) \quad = \quad \int_a^s z_j(s)\, ds \quad = \quad (-1)^{n+j} \int_a^t w(s)^{-1} w_j(s) b(s)\, ds.$$

Eine Lösung der inhomogenen DGL erhalten wir nun durch

$$w(t) \quad = \quad \psi_1(t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} u_j(t)v_j(t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}u_j(t)\int_a^t \frac{b(s)}{w(s)}w_j(s)\,ds. \qquad \square$$

Ist $y''(x)+a_1(x)y'+a_0y = b(x)$ eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung und $(u_1(t),u_2(t))$ ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differenzialgleichung, dann erhalten wir eine Lösung also durch den Ausdruck

$$w(t) \quad = \quad -u_1(t)\int_a^t \frac{b(s)u_2(s)}{w(s)}\,ds + u_2(t)\int_a^t \frac{b(s)u_1(s)}{w(s)}\,ds.$$

Als konkretes Anwendungsbeispiel betrachten wir die Differenzialgleichung

$$y'' - \cos(x)y' + \sin(x)y \quad = \quad \sin(x).$$

Wie wir oben gezeigt haben, ist durch

$$u_1(t) = e^{\sin(t)} \quad \text{und} \quad u_2(t) = e^{\sin(t)}\phi(t)$$

mit $\phi(t) = \int_0^t e^{-\sin(s)}\,ds$ ein Fundamentalsystem der entsprechenden homogenen DGL gegeben. Für die Wronski-Determinante erhalten wir

$$\begin{aligned} w(t) \quad &= \quad \det\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \quad = \quad \det\begin{pmatrix} e^{\sin(t)} & e^{\sin(t)}\phi(t) \\ \cos(t)e^{\sin(t)} & 1+\cos(t)\phi(t)e^{\sin(t)} \end{pmatrix} \\ &= \quad e^{\sin(t)}\cdot(1+\cos(t)\phi(t)e^{\sin(t)}) - \cos(t)e^{\sin(t)}\cdot e^{\sin(t)}\phi(t) \\ &= \quad e^{\sin(t)} + \cos(t)\phi(t)e^{2\sin(t)} - \cos(t)\phi(t)e^{2\sin(t)} \quad = \quad e^{\sin(t)} \quad , \end{aligned}$$

wobei der Eintrag rechts unten in der Matrix durch die Rechnung $u_2'(t) = \cos(t)e^{\sin(t)}\phi(t)+e^{\sin(t)}\phi'(t) = \cos(t)e^{\sin(t)}\phi(t)+e^{\sin(t)}e^{-\sin(t)} = \cos(t)e^{\sin(t)}\phi(t)+1$ zu Stande kommt. Einsetzen in die Lösungsformel von oben liefert

$$w(t) \quad = \quad -u_1(t)\int_0^t \frac{b(s)u_2(s)}{w(s)}\,ds + u_2(t)\int_0^t \frac{b(s)u_1(s)}{w(s)}\,ds \quad =$$

$$-e^{\sin(t)}\int_0^t \frac{\sin(s)\phi(s)e^{\sin(s)}}{e^{\sin(s)}}\,ds + \phi(t)e^{\sin(t)}\int_0^t \frac{\sin(s)}{e^{\sin(s)}}e^{\sin(s)}\,ds \quad = \quad -e^{\sin(t)}\int_0^t \sin(s)\phi(s)\,ds + \phi(t)e^{\sin(t)}\int_0^t \sin(s)\,ds \quad =$$

$$-e^{\sin(t)}\int_0^t \sin(s)\phi(s)\,ds - \phi(t)e^{\sin(t)}\cos(t).$$

Wir berechnen das erste Integral durch Betrachtung des zweidimensionalen Integrationsbereichs $\Delta = \{(r,s)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\le s\le t\}$. Es ist

$$\int_0^t \sin(s)\phi(s)\,ds \quad = \quad \int_0^t \sin(s)\left(\int_0^s e^{-\sin(r)}\,dr\right)ds \quad = \quad \int_\Delta \sin(s)e^{-\sin(r)}\,d(r,s) \quad =$$

$$\int_0^t e^{-\sin(r)}\left(\int_r^t \sin(s)\,ds\right)dr \quad = \quad -\int_0^t e^{-\sin(r)}(\cos(t)-\cos(r))\,dr \quad =$$

$$-\cos(t)\int_0^t e^{-\sin(r)}\,dr - \int_0^t e^{-\sin(r)}(-\cos(r))\,dr \quad = \quad -\cos(t)\phi(t) - \left[e^{-\sin(r)}\right]_0^t \quad = \quad -\cos(t)\phi(t) - e^{-\sin(t)} + 1.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} w(t) &= -e^{\sin(t)} \cdot \left(-\phi(t)\cos(t) - e^{-\sin(t)} + 1\right) - \phi(t) e^{\sin(t)} \cos(t) = \\ & e^{\sin(t)}\phi(t)\cos(t) + 1 - e^{\sin(t)} - \phi(t) e^{\sin(t)} \cos(t) = 1 - e^{\sin(t)}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass auch die konstante Funktion $(u_1 + w)(t) = e^{\sin(t)} + (1 - e^{\sin(t)}) = 1$ eine spezielle Lösung der DGL ist.

Als nächstes betrachten wir speziell inhomogene DGLs n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, also Gleichungen der Form

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

mit einer stetigen Funktion $b : I \to \mathbb{C}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir führen für eine solche Gleichung die folgende abkürzende Schreibweise ein: Es sei $p = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, das charakteristische Polynom der entsprechenden homogenen linearen DGL. Dann schreiben wir die DGL oben in der Form $p(\frac{\partial}{\partial x})y = b(x)$. Zunächst bemerken wir

Lemma 6.4

(i) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$.

(ii) Für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Beweis: zu (i) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt die Aussage unmittelbar aus der bekannten Ableitungsregel für die Exponentialfunktion. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\lambda = a + ib$ die Zerlegung von λ in Real- und Imaginärteil. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t}) &= \frac{\partial}{\partial t}(e^{(a+ib)t}) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))) = \\ & ae^{at}\cos(bt) + e^{at}(-b\sin(bt)) + iae^{at}(\sin(bt) + bie^{at}\cos(bt)) = \\ & (a+ib)e^{at}\cos(bt) + i(a+ib)e^{at}\sin(bt) = \\ & (a+ib)e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) = (a+ib)e^{(a+ib)t} = \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

zu (ii) Sei $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Durch Anwendung von (i) erhalten wir

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t}. \qquad \square$$

Lemma 6.5 Seien $m \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_m : I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $b = \sum_{j=1}^{m} b_j$ deren Summe und $p \in \mathbb{C}[x]$. Für $1 \le i \le m$ sei ψ_j eine Lösung der DGL $p(\frac{\partial}{\partial x})y = b_j(x)$. Dann ist $\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j(x)$ eine Lösung von $p(\frac{\partial}{\partial x})y = b(x)$.

Beweis: Aus der Linearität des Operators $\frac{\partial}{\partial t}$ folgt unmittelbar die Linearität von $p(\frac{\partial}{\partial t})$, d.h. für hinreichend oft differenzierbare Funktionen $\psi, \tilde{\psi}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\psi + \tilde{\psi}) = p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\psi) + p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\tilde{\psi}) \quad \text{und} \quad p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\lambda\psi) = \lambda p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\psi).$$

Damit ergibt sich die Aussage aus der Rechnung

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_j(x)\right) \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi_j(x)) \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} b_j(x) \quad = \quad b(x). \qquad \square$$

Satz 6.6 Seien $p \in \mathbb{C}[x]$, $c \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $p(\mu) \neq 0$.

(i) Die DGL $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) y = ce^{\mu x}$ hat $\psi(t) = \frac{c}{p(\mu)} e^{\mu t}$ als Lösung.

(ii) Sei allgemeiner $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad m. Dann hat die DGL $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) y = f(x)e^{\mu x}$ eine Lösung der Form $\psi(x) = g(x)e^{\mu x}$, mit einer geeigneten Polynomfunktion g vom Grad m.

Beweis: zu (i) Dies folgt direkt aus der Rechnung

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(t) \quad = \quad p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{c}{p(\mu)}e^{\mu t} \quad = \quad \frac{cp(\mu)}{p(\mu)}e^{\mu t} \quad = \quad ce^{\mu t} \quad ,$$

wobei im zweiten Schritt Lemma 6.4 (ii) angewendet wurde.

zu (ii) Hier führen wir den Beweis durch vollständige Induktion über $m = \text{grad}(f)$, wobei der Fall $m = 0$ durch (i) bereits erledigt ist. Sei nun $m \in \mathbb{N}$, und setzen wir die Aussage für Polynomfunktionen vom Grad $\leq m-1$ voraus. Nach Lemma 5.23 existiert eine Polynomfunktion f_0 vom Grad m mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(t^m e^{\mu t}) \quad = \quad f_0(t)e^{\mu t}.$$

Für ein geeignetes $c \in \mathbb{C}$ ist $f_1 = f - cf_0$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq m-1$. Wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten eine Polynomfunktion g_1 vom Grad $\leq m-1$ mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(g_1(t)e^{\mu t}\right) \quad = \quad f_1(t)e^{\mu t}.$$

Setzen wir nun $g(t) = ct^m + g_1(t)$, dann ist g eine Polynomfunktion vom Grad m, und es gilt

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(g(t)e^{\mu t}\right) \quad = \quad cp\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(t^m e^{\mu t}) + p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(g_1(t)e^{\mu t}) \quad =$$

$$cf_0(t)e^{\mu t} + f_1(t)e^{\mu t} \quad = \quad f(t)e^{\mu t}. \qquad \square$$

Als Anwendungsbeispiel bestimmen wir eine Lösung der DGL dritter Ordnung

$$y''' - 2y'' - 2y' + 2y \quad = \quad 2\sin(x).$$

Setzen wir $p = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$, dann erhält man diese Gleichung wegen $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ als Imaginärteil von

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) y \quad = \quad 2e^{ix}.$$

Es gilt $p(i) = i^3 - 2i^2 - 2i + 2 = -i + 2 - 2i + 2 = 4 - 3i \neq 0$. Nach Satz 6.6 (i) ist $\psi_{\mathbb{C}}(x) = \frac{2}{p(i)} e^{ix}$ eine Lösung der komplexen DGL. Wegen

$$\frac{2}{p(i)} \quad = \quad \frac{2}{4-3i} \quad = \quad \frac{2(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} \quad = \quad \tfrac{1}{25}(8+6i)$$

gilt

$$\psi_{\mathbb{C}}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{25}(8+6i)(\cos(t) + i\sin(t)) \quad = \quad \left(\tfrac{8}{25}\cos(t) - \tfrac{6}{25}\sin(t)\right) + i\left(\tfrac{6}{25}\cos(t) + \tfrac{8}{25}\sin(t)\right).$$

Also ist der Imaginärteil von $\psi_{\mathbb{C}}(t)$, und damit eine Lösung der reellen Ausgangsgleichung, gegeben durch

$$\psi(t) \quad = \quad \tfrac{6}{25}\cos(t) + \tfrac{8}{25}\sin(t).$$

Kommen wir nun zum letzten Thema dieses Kapitels, der Floquet-Theorie. Hier untersucht man die Lösungsmengen von linearen System der Form

$$y' \quad = \quad A(x)y$$

wobei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige ***periodische*** Funktion bezeichnet, also eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass ein $\omega \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $A(t+\omega) = A(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Eine solche Funktion bezeichnen wir auch als ω***-periodisch***. Die Theorie basiert auf der folgenden grundlegenden Eigenschaft des Matrix-Exponentials.

Satz 6.7 Für jede Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ existiert eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $e^B = C$.

Beweis: Wir wissen bereits, dass jede quadratische Matrix über $\mathbb{C}$ ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform ist. Es gibt also eine Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ in Jordanscher Normalform und eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $C = TJT^{-1}$. Wie wir bereits im Beweis von Folgerung 5.18 gesehen haben, ist die Konjugation einer Matrix mit T vertauschbar mit dem Einsetzen in die Exponentialreihe. Ist also $B_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit $e^{B_1} = J$, dann folgt $e^{TB_1T^{-1}} = Te^{B_1}T^{-1} = TJT^{-1} = C$. Aus diesem Grund genügt es, die Aussage für eine Matrix $J \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ in Jordanscher Normalform zu beweisen.

Sei $r \in \mathbb{N}$, und seien $J_1, ..., J_r$ die Jordanblöcke von J entlang der Hauptdiagonalen. Wie in § 5 schreiben wir jede Jordanmatrix in der Form $J_k = \lambda_k E_{n_k} + F_{n_k}$, wobei $E_{n_k} \in \mathrm{GL}_{n_k}(\mathbb{C})$ die Einheitsmatrix und $F_{n_k} \in \mathcal{M}_{n_k,\mathbb{C}}$ die nilpotente Matrix mit der ersten Nebendiagonalen aus Einsen bezeichnet (siehe Seite 66). Weil J invertierbar ist, gilt $\lambda_k \neq 0$ für $1 \leq k \leq r$. Offenbar genügt es zu zeigen, dass für jedes k jeweils eine Matrix $B_k \in \mathcal{M}_{n_k,\mathbb{C}}$ mit $e^{B_k} = J_k$ existiert. Bezeichnet dann nämlich B die Matrix mit den Blöcken $B_1, ..., B_r$ auf der Hauptdiagonalen, dann ist $e^B = J$ erfüllt.

Sei also $J = \lambda E_n + F_n$ vorgeben, mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Wir zeigen, dass eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $e^B = J$ existiert. Dazu betrachten wir die Potenzreihe $f \in \mathbb{C}[[x]]$ gegeben durch $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$. Aus der Funktionentheorie ist bekannt, dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt und durch die Gleichung $\ln(1+z) = f(z)$ mit dem komplexen Logarithmus zusammenhängt. Sei $U \subseteq \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ die Menge aller Matrizen der Form $E_n + C$ mit der Eigenschaft, dass $f(C)$ bezüglich der Zeilensummennorm in $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ konvergiert. Dann erhalten wir auf U eine matrixwertige Funktion, indem wir

$$\ln(E_n + C) \quad = \quad f(C) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k \quad \text{definieren.}$$

Auf Grund der Identität $\exp(1+\ln(z)) = \exp(f(z)) = 1+z$ im Potenzreihenring $\mathbb{C}[[z]]$ gilt $e^{\ln(A)} = A$ für alle $A \in U$. Sei nun

$$B \quad = \quad (\ln\lambda)\cdot E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k\lambda^k} F_n^k.$$

Wegen $F_n^n = 0$ gilt $E_n + \frac{F_n}{\lambda} \in U$ und

$$B \quad = \quad (\ln\lambda)\cdot E_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\lambda^k} F_n^k \quad = \quad (\ln\lambda)\cdot E_n + \ln\left(E_n + \frac{F_n}{\lambda}\right).$$

Durch Einsetzen in die Exponentialreihe erhalten wir

$$e^B \quad = \quad e^{(\ln\lambda)E_n} \cdot e^{\ln(E_n + F_n/\lambda)} \quad = \quad \lambda E_n \cdot \left(E_n + \frac{F_n}{\lambda}\right) \quad = \quad \lambda E_n + F_n \quad = \quad J. \qquad \square$$

Man beachte, dass für vorgegebenes $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $e^B = C$ natürlich nicht eindeutig bestimmt ist, da beispielsweise auch $B + 2\pi i m E_n$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ die Gleichung erfüllt.

Satz 6.8 *(Satz von Floquet)*

Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine ω-periodische stetige Funktion. Dann existiert eine ω-periodische stetig differenzierbare Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, so dass durch $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$ gegeben ist.

Beweis: Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von Lösungen. Definieren wir eine weitere Funktion $\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ durch $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$, dann zeigt die Rechnung

$$\Psi'(t) \quad = \quad \Phi(t+\omega) \quad = \quad A(t+\omega)\Phi(t+\omega) \quad = \quad A(t)\Psi(t) \quad ,$$

dass die Spalten von Ψ ebenfalls ein System von Lösungen bilden. Da Φ ein Fundamentalsystem ist, ist $\Phi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar. Auch $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$ ist somit für jedes $t \in \mathbb{R}$ invertierbar, was zeigt, dass es sich auch bei Ψ um ein Fundamentalsystem handelt. Es existiert also eine Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $\Phi(t+\omega) = \Psi(t) = \Phi(t)C$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Nach Satz 6.7 existiert eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $e^{\omega B} = C$. Definieren wir eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ durch $p(t) = \Phi(t)e^{-tB}$, dann gilt $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$, und die Rechnung

$$p(t+\omega) \quad = \quad \Phi(t+\omega)e^{-(t+\omega)B} \quad = \quad \Phi(t)Ce^{-(t+\omega)B} \quad = \quad \Phi(t)e^{\omega B}e^{-(t+\omega)B} \quad = \quad \Phi(t)e^{-tB} \quad = \quad p(t)$$

zeigt, dass die Funktion ω-periodisch ist. Weil die Funktionen Φ und $t \mapsto e^{-Bt}$ stetig differenzierbar sind, gilt dasselbe für p. $\square$

Folgerung 6.9

(i) Das Fundamentalsystem Φ aus Satz 6.8 ist durch seine Werte auf einem abgeschlossenen Intervall der Form $[t_0, t_0+\omega]$ eindeutig festgelegt.

(ii) Sind Φ, Ψ ein Fundamentalsysteme von $y' = A(t)y$, und ist $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)e^{\omega B}$, dann existiert eine zu B ähnliche Matrix $B_1 \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)e^{\omega B_1}$.

Beweis: zu (i) Wie wir im Beweis des Satzes gesehen haben, existiert eine Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C$. Insbesondere gilt also $C = \Phi(t_0)^{-1}\Phi(t_0+\omega)$. Sei nun $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Matrix mit $e^{\omega B} = C$. Die ω-periodische Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ kann nun durch die Gleichung $p(t) = \Phi(t)e^{-tB}$ auf $[t_0, t_0+\omega]$ bestimmt werden und liegt somit auf ganz $\mathbb{R}$ fest. Damit auch $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ auf ganz $\mathbb{R}$ festgelegt.

zu (ii) Da Φ und Ψ beides Fundamentalsysteme sind, existiert eine Matrix $S \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\Psi(t) = \Phi(t)S$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Voraussetzung $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)e^{\omega B}$ liefert nun

$$\Psi(t+p) \quad = \quad \Phi(t+p)S \quad = \quad \Phi(t)e^{\omega B}S \quad = \quad \Phi(t)SS^{-1}e^{\omega B}S \quad = \quad \Psi(t)e^{\omega S^{-1}BS}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Matrix $B_1 = S^{-1}BS$ hat also die gewünschte Eigenschaft $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)e^{\omega B_1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Folgerung 6.10 Seien die Bezeichnungen wie in Satz 6.8. Dann erhält man durch die Zuordnung $\varphi \mapsto p\varphi$ eine bijektive lineare Korrespondenz zwischen den Lösungen des Systems $z' = Bz$ und den Lösungen des periodischen Systems $y' = A(x)y$. Man bezeichnet diese Zuordnung als ***Lyapunov-Transformation***.

Beweis: Offenbar ist die Abbildung $\varphi \mapsto p\varphi$ linear. Sei nun $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\psi = p\varphi$. Wegen $p(t) = \Phi(t)e^{-Bt}$ gilt $p'(t) = A(t)\Phi(t)e^{-Bt} + \Phi(t)e^{-Bt}(-B) = A(t)p(t) - p(t)B$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten die Äquivalenz

$$\begin{gathered}
\psi \text{ ist Lösung von } y' = A(x)y \quad \Leftrightarrow \quad \psi'(t) = A(t)\psi(t) \quad \Leftrightarrow \\
p'(t)\varphi(t) + p(t)\varphi'(t) = A(t)p(t)\varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(t) = p(t)^{-1}\left(A(t)p(t) - p'(t)\right)\varphi(t) \quad \Leftrightarrow \\
\varphi'(t) = p(t)^{-1}\left(A(t)p(t) - (A(t)p(t) - p(t)B)\right)\varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(t) = p(t)^{-1}p(t)B\varphi(t) \quad \Leftrightarrow \\
\varphi'(t) = B\varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ ist Lösung von } z' = Bz.
\end{gathered}$$

□

Die Eigenwerte der Matrix B in Satz 6.8 werden ***charakteristische Exponenten*** des periodischen Systems $y' = A(x)y$. Man beachte, dass diese nicht eindeutig bestimmt sind, weil B nicht eindeutig ist. Die Eigenwerte der Matrix $C = e^{\omega B}$ nennt man die ***charakteristische Multiplikatoren***. Diese sind durch das periodische System eindeutig bestimmt. Ist nämlich Ψ ein beliebiges anderes Fundamentalsystem, dann existiert nach Folgerung 6.9 eine zu B ähnliche Matrix B_1 mit $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)e^{\omega B_1}$. Die Matrix $D = e^{\omega B_1}$ ist zu C ähnlich. Ist nämlich $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit $B_1 = TBT^{-1}$, dann folgt $D = e^{\omega TBT^{-1}} = Te^{\omega B}T^{-1} = TCT^{-1}$. Als zu C ähnliche Matrix besitzt D dieselben Eigenwerte.

Als ***Polynom mit ω-periodischen Koeffizienten*** vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ der Form $f(t) = a_m(t)t^m + \ldots + a_1(t)t + a_0(t)$, wobei $a_k : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ jeweils eine stetige Funktion mit $a_k(t+\omega) = a_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Wir verwenden denselben Ausdruck auch für eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, deren n Komponentenfunktionen $F_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ $(1 \le \ell \le n)$ diese Gestalt haben.

Folgerung 6.11 Seien die Bezeichnungen wie in Satz 6.8 gewählt, sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Exponent und sei $r \in \mathbb{N}$ die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert von B. Dann gibt es ein linear unabhängiges Tupel $(\psi_0, ..., \psi_{r-1})$ von Lösungen von $y' = A(x)y$ der Form

$$\psi_k(t) \quad = \quad e^{\lambda t} f_k(t) \quad ,$$

wobei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ jeweils ein Polynom vom Grad $\leq k$ mit ω-periodischen Koeffizienten ist.

Beweis: Nach Folgerung 6.10 erhalten wir durch $\varphi \mapsto p\varphi$ eine lineare Bijektion zwischen den Lösungen von $z' = Bz$ und den Lösungen von $y' = A(x)y$. Nach Satz 5.19 existiert ein linear unabhängiges Tupel $(\varphi_0, ..., \varphi_{r-1})$ von Lösungen von $z' = Bz$ der Form $\varphi_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, wobei $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ jeweils (komponentenweise) ein Polynom vom Grad $\leq k$ mit konstanten Koeffizienten ist. Weil die Matrix $p(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ aus ω-periodischen Koeffizienten besteht, erhalten wir durch $f_k(t) = p(t)p_k(t)$ ein Polynom vom gleichen Grad wie $p_k(t)$ mit ω-periodischen Koeffizienten. Dies zeigt, dass die Lösungen $\psi_k(t) = p(t)\varphi_k(t) = p(t)e^{\lambda t}p_k(t) = e^{\lambda t}f_k(t)$ die angegebene Form haben. Auf Grund der Invertierbarkeit von $p(t)$ und der linearen Unabhängigkeit von $(\varphi_0, ..., \varphi_{r-1})$ ist auch das System $(\psi_0, ..., \psi_k)$ linear unabhängig. □

Selbst wenn die Matrix $A(t)$ des periodischen Systems reell ist, handelt es sich bei der Matrix B aus Satz 6.8 im Allgemeinen um eine komplexe Matrix. Es gilt aber

Satz 6.12 Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine ω-periodische stetige Funktion. Dann existiert eine 2ω-periodische stetig differenzierbare Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, so dass durch $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$ gegeben ist.

Beweis: Auf Grund des Satzes 6.8 von Floquet existiert eine ω-periodische Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und eine Matrix $B_1 \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, so dass $\Psi(t) = q(t)e^{tB_1}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$ ist. Wie wir im Beweis des Satzes gesehen haben, können ausgehend von einem *beliebigen* Fundamentalsystem Ψ die Funktion q und die Matrix B_1 so gewählt werden, dass die Gleichung $\Psi(t) = q(t)e^{tB_1}$ erfüllt ist. Als reelles lineares System besitzt $y' = A(x)y$ auch ein reelles Fundamentalsystem $\Psi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, und nach Ersetzung von Ψ durch $\Psi\Psi(0)^{-1}$ können wir außerdem $\Psi(0) = E_n$ annehmen.

Sei nun $B = \mathrm{Re}(B_1) = \frac{1}{2}(B_1 + \bar{B}_1)$ und $p(t) = \Psi(t)e^{-tB}$. Dann ist p reellwertig, weil Ψ reellwertig ist und $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ gilt. Nun ist $e^{\omega B_1}$ wegen $\Psi(\omega) = \Psi(0)e^{\omega B_1} = e^{\omega B_1}$ und $\Psi(\omega) \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine reelle Matrix. Es gilt also $e^{\omega B_1} = \overline{e^{\omega B_1}} = e^{\omega \bar{B}_1}$. Die Rechnung

$$\begin{aligned} p(t+2\omega) \quad &= \quad \Psi(t+2\omega)e^{-(t+2\omega)B} \quad = \quad \Psi(t+\omega)e^{\omega B_1}e^{-2\omega B}e^{-tB} \quad = \\ \Psi(t)e^{\omega B_1}e^{\omega B_1}e^{-2\omega B}e^{-tB} \quad &= \quad \Psi(t)e^{\omega B_1}e^{\omega \bar{B}_1}e^{-2\omega B}e^{-tB} \quad = \quad \Psi(t)e^{\omega(B_1+\bar{B}_1)}e^{-2\omega B}e^{-tB} \quad = \\ \Psi(t)e^{2\omega B}e^{-2\omega B}e^{-tB} \quad &= \quad \Psi(t)e^{-tB} \quad = \quad p(t). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass es sich bei p um eine 2ω-periodische Funktion handelt. □

Die Floquet-Theorie kann auch auf Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit periodischen Koeffizienten angewendet werden. Wir betrachten eine DGL der Form

$$y'' + a(x)y' + b(x)y \quad = \quad 0$$

mit stetigen, ω-periodischen Funktionen $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das zugehörige System erster Ordnung ist dann gegeben durch $y' = A(x)y$ mit der Matrix

$$A(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}.$$

Ist $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differenzialgleichung zweiter Ordnung, dann ist

$$\Phi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems $y' = A(x)y$. Wählen wir die Funktionen ψ_1 und ψ_2 so, dass $\psi_1(0) = 1$, $\psi_1'(0) = 0$, $\psi_2(0) = 0$ und $\psi_2'(0) = 1$ erfüllt ist, dann gilt $\Phi(0) = E_2$. Sei $C = \Phi(\omega) \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$. Wir unterscheiden die folgenden Einzelfälle.

(i) Die Matrix C besitzt zwei verschiedene Eigenwerte λ_1, λ_2, entweder beide reell oder beide nichtreell und konjugiert-komplex. Dann existiert eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}$ mit zwei verschiedenen Eigenwerten $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ und $e^{\omega B} = C$, wobei $e^{\omega\mu_j} = \lambda_j$ für $j = 1, 2$ gilt. Nach Folgerung 6.11 gibt es stetig differenzierbare ω-periodische Funktionen $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass durch $\tilde{\psi}_1(t) = p_1(t)e^{\mu_1 t}$ und $\tilde{\psi}_2(t) = p_2(t)e^{\mu_2 t}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL gegeben ist.

(ii) Die Matrix C besitzt nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, mit geometrischer Vielfachheit 2. Dann gibt es wie in Teil (i) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form $\tilde{\psi}_1(t) = p_1(t)e^{\mu t}$ und $\tilde{\psi}_2(t) = p_2(t)e^{\mu t}$, mit $\mu \in \mathbb{C}$ und ω-periodischen Funktionen $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(iii) Die Matrix C besitzt nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, mit geometrischer Vielfachheit 1. In diesem Fall existiert ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form

$$\tilde{\psi}_1(t) = p_1(t)e^{\mu t} \quad , \quad \tilde{\psi}_2(t) = (p_2(t) + p_3(t)t)e^{\mu t}$$

mit $\mu \in \mathbb{C}$ und ω-periodischen Funktionen $p_1, p_2, p_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Ein wichtiger Spezialfall der oben angegebenen Differenzialgleichung zweiter Ordnung ist die ***Hillsche Differenzialgleichung***

$$y'' + b(x)y \quad = \quad 0.$$

In diesem Fall ist die Spur der Matrix $A(x)$ im zugehörigen System erster Ordnung konstant gleich null. Nach Proposition 5.6 folgt daraus für die Wronski-Determinante $w(t) = \det \Phi(t) = w(0) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, insbesondere also $\det C = w(\omega) = 1$. Die charakteristischen Multiplikatoren λ_1, λ_2, also die Eigenwerte der Matrix C, erfüllen dann die Gleichung $\lambda_1\lambda_2 = 1$, und dementsprechend gibt es charakteristische Exponenten $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ mit $\mu_1 + \mu_2 = 0$. Die Fälle (ii) und (iii) können dann also nur mit $\mu = 0$ auftreten.

§ 7. *Autonome Differenzialgleichungen*

Zusammenfassung. Ein autonomes System von Differenzialgleichungen unterscheidet sich von einem allgemeinen System $y' = f(x, y)$ dadurch, dass die Funktion f auf der rechten Seite nicht von x abhängt. Bei der Untersuchung solcher Systeme interessiert man sich vor allem für die Bildkurven von Lösungen des Systems, die als *Trajektorien* bezeichnet werden. Gelten die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes, dann zerfällt der Definitionsbereich des Systems in die Trajektorien. Diese Zerlegung wird *Phasenportrait* genannt. Autonome Systeme spielen in der Physik eine wichtige Rolle, wo sie zur Beschreibung von Systemen der Klassischen Mechanik oder der Quantenmechanik verwendet werden.

Wichtige Grundbegriffe

- autonomes System von Differenzialgleichungen
- (lokale) Lipschitz-Stetigkeit
- Ruhelage eines autonomen Systems
- Fluss und Trajektorien eines autonomen Systems, negative und positive Halbtrajektorie
- Phasenportrait eines autonomen Systems
- Erhaltungsgröße bzw. erstes Integral
- kanonische Hamiltongleichungen und Hamiltonfunktion

Zentrale Ergenisse

- Translationsinvarianz von Lösungen eines autonomen Systems
- Klassifikation der Trajektorien (einelementig, periodisch, offene überkreuzungsfreie Kurve)
- Existenz des Phasenportraits
- Verlauf von Lösungen in Niveaumengen von Erhaltungsgrößen

Definition 7.1 Ein ***autonomes System*** von Differenzialgleichungen ist ein System der Form $y' = f(y)$, wobei $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}^n$ bezeichnet.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}^n$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}^n$ wird ***Lipschitz-stetig*** genannt, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|f(y) - f(\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$ für alle $y, \tilde{y} \in D$ erfüllt ist. Von einer ***lokal*** Lipschitz-stetigen Funktion sprechen wir, wenn für jeden Punkt $y \in D$ eine Umgebung $U_y \subseteq \mathbb{K}^n$ existiert, so dass $f|_{D \cap U_y}$ jeweils Lipschitz-stetig ist.

Lemma 7.2 Sei $y' = f(y)$ ein autonomes System von Differenzialgleichungen mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion f. Sei $\varphi : I \to D$ eine Lösung des Systems, definiert auf einem offenen Intervall $I =]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R}$.

(i) Sei $a \in I$ und $c = \varphi(a) \in D$. Genau dann ist φ konstant, wenn $f(c) = 0$ ist. Die Punkte $c \in D$ mit dieser Eigenschaft werden die ***Ruhelagen*** des Systems genannt.

(ii) Für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion φ_τ auf dem Intervall $I_\tau =]\alpha - \tau, \beta - \tau[$ definiert durch $\varphi_\tau(t) = \varphi(t + \tau)$ eine Lösung des Systems.

Beweis: zu (i) Da es sich bei φ um eine Lösung des Systems handelt, gilt $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ für alle $t \in I$. Ist φ konstant, dann gilt $f(\varphi(t)) = \varphi'(t) = 0$ für alle $t \in I$ und damit insbesondere $f(c) = f(\varphi(a)) = 0$. Setzen wir umgekehrt $f(c) = 0$ voraus, dann ist die konstante Funktion $\psi : \mathbb{R} \to D$ gegeben durch $\psi(t) = c$ für alle $t \in \mathbb{R}$ offenbar eine Lösung mit $\psi(a) = c$. Aus Satz 3.6, dem Eindeutigkeitssatz, folgt dann $\varphi(t) = \psi(t) = c$ für alle $t \in I$.

zu (ii) Sei $\iota : I_\tau \to I$ gegeben durch $\iota(t) = t + \tau$ für alle $t \in I_\tau$. Dann ist $\varphi_\tau = \varphi \circ \iota$, und die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \varphi'_\tau(t) &= (\varphi \circ \iota)'(t) = \varphi'(\iota(t)) \cdot \iota'(t) = \varphi'(\iota(t)) \cdot 1 = \varphi'(t+\tau) = f(\varphi(t+\tau)) \\ &= f((\varphi \circ \iota)(t)) = f(\varphi_\tau(t)) \end{aligned}$$

für alle $t \in I_\tau$. Dies zeigt, dass φ_τ eine Lösung des Systems ist. □

Satz 7.3 Sei $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Für alle $(a,b) \in \mathbb{R} \times D$ sei $\varphi_{a,b} : I_{a,b} \to D$ die maximale Lösung des durch $y' = f(y)$ und (a,b) definierten Anfangswertproblems, mit dem offenen Intervall $I_{a,b} =]\alpha(a,b), \beta(a,b)[$. Dann gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und alle $(a,b) \in \mathbb{R} \times D$ jeweils $I_{a-\tau,b} =]\alpha(a,b) - \tau, \beta(a,b) - \tau[$ und für alle $t \in I_{a,b}$ jeweils $\varphi_{a-\tau,b}(t-\tau) = \varphi_{a,b}(t)$.

Beweis: Nach Lemma 7.2 ist die auf $I =]\alpha(a,b) - \tau, \beta(a,b) - \tau[$ definierte Funktion $\psi(t) = \varphi_{a,b}(t+\tau)$ jedenfalls eine Lösung des Systems, mit $\psi(a-\tau) = \varphi_{a,b}(a) = b$. Nehmen wir an, die Lösung ist nicht maximal, und es gibt eine Fortsetzung $\hat{\varphi} : J \to D$ auf ein offenes Intervall $J \supsetneq I$. Dann würden wir durch $t \mapsto \psi(t-\tau)$ eine Fortsetzung von $\varphi_{a,b}$ auf ein echt größeres offenes Intervall als $I_{a,b}$ erhalten, im Widerspruch zur Maximalität. Aus dem Eindeutigkeitssatz, Satz 3.6, folgt $\psi = \varphi_{a-\tau,b}$, und somit $\varphi_{a-\tau,b}(t-\tau) = \psi(t-\tau) = \varphi_{a,b}(t)$ für alle $t \in I_{a,b}$. □

Wir führen nun zwei wichtige neue Grundbegriffe ein.

Definition 7.4 Seien die Bezeichnungen wie in Satz 7.3 gewählt. Für jedes $b \in D$ setzen wir $\alpha(b) = \alpha(0,b)$, $\beta(b) = \beta(0,b)$ und $I_b =]\alpha(b), \beta(b)[= I_{0,b}$. Weiter sei

$$\mathcal{D} = \{(t,b) \mid b \in D, t \in I_b\}.$$

Dann wird die Funktion $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\Phi(t,b) = \varphi_{0,b}(t)$ der ***Fluss*** des autonomen Systems $y' = f(y)$ genannt.

Definition 7.5 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Eine Teilmenge $T \subseteq D$ wird ***Trajektorie*** des Systems $y' = f(y)$ genannt, wenn ein $b \in D$ mit $T = \varphi_{0,b}(I_b)$ existiert. Die Teilmengen

$$T^-(b) = \varphi_{0,b}(]\alpha(b), 0]) \qquad \text{bzw.} \qquad T^+(b) = \varphi_{0,b}([0, \beta(b)[)$$

werden negative bzw. positive ***Halbtrajektorie*** des Systems genant.

Satz 7.6 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann gilt für jedes $b \in D$ jeweils

(i) Ist $T^-(b)$ in ein einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\alpha(b) = -\infty$.

(ii) Ist $T^+(b)$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\beta(b) = +\infty$.

(iii) Ist $\alpha(b)$ endlich, dann ist $T^-(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t\to\alpha(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.

(iv) Ist $\beta(b)$ endlich, dann ist $T^+(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t\to\beta(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.

Beweis: Wir können dem autonomen System $y' = f(y)$ ein nicht-autonomes System $y' = g(x, y)$ zuordnen, indem wir eine Funktion $g : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{K}^n$ durch $g(x, y) = f(y)$ definieren. Jeder Lösung $\varphi : I \to D$ des ursprünglichen Systems ordnen wir eine Lösung $\hat{\varphi} : I \to \mathbb{R} \times D$ des neuen Systems zu durch $\hat{\varphi}(t) = (t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$. Offenbar ist φ genau dann eine maximale Lösung, wenn dies auf $\hat{\varphi}$ zutrifft. Auf die Lösung $\hat{\varphi}$ können wir nun Satz 3.14 und Proposition 3.12 anwenden. Ist $T^-(b)$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten, so verlässt $\hat{\varphi}$ nur dann jedes Kompaktum nach links, wenn $\alpha(b) = -\infty$ erfüllt ist. Dies beweist die Aussage (i), und ebenso erhält man (ii).

Ist $\alpha(b)$ endlich, dann ist $\hat{\varphi}$ für $t \to \alpha(b)$ auf Grund der Proposition unbeschränkt, oder $\partial(\mathbb{R} \times D)$ ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t\to\alpha(\beta)} d((t, \varphi(t)), \partial(\mathbb{R} \times D)) = 0$. Daraus folgt, dass $T^-(b)$ unbeschränkt ist, oder es gilt $\partial D \neq \varnothing$ und $\lim\limits_{t\to\alpha(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$. Dies zeigt die Gültigkeit der Aussage (iii), und ebenso erhält man (iv). □

Proposition 7.7 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann ist auf der Menge D durch

$$b \sim c \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in I_b : \Phi(t, b) = c$$

eine Äquivalenzrelation auf D definiert, und für jedes $b \in D$ ist die Äquivalenzklasse $[b]$ genau die Trajektorie $T(b)$ des Systems.

Beweis: Wir überprüfen die drei Bedingungen für eine Äquivalenzrelation. Für alle $b \in D$ gilt $\Phi(0, b) = \varphi_{0,b}(0) = b$, also $b \sim b$. Dies zeigt, dass die Relation $\sim$ reflexiv ist. Seien un $b, c \in D$ mit $b \sim c$. Dann existiert ein $s \in I_b$ mit $\varphi_{0,b}(s) = \Phi(s, b) = c$. Folglich ist $\varphi_{0,b} = \varphi_{s,c}$. Mit Satz 7.3 $\varphi_{0,c}(t) = \varphi_{s,c}(t + s)$ für alle $t \in I_c$, insbesondere also $\varphi_{0,c}(-s) = \varphi_{s,c}(0) = \varphi_{0,b}(0) = b$. Es ist $-s$ also ein Element von I_c mit $\Phi(-s, c) = \varphi_{0,c}(-s) = b$; daraus folgt $c \sim b$. Damit haben wir nachgewiesen, dass die Relation $\sim$ symmetrisch ist.

Zum Nachweis der Transitivität seien $b, c, d \in D$ mit $b \sim c$ und $c \sim d$ vorgegeben; zu zeigen ist $b \sim d$. Nach Vorausetzung gibt es $t_1 \in I_b$ und $t_2 \in I_c$ mit $\varphi_{0,b}(t_1) = \Phi(t_1, b) = c$ und $\varphi_{0,c}(t_2) = \Phi(t_2, c) = d$. Es folgt $\varphi_{0,b} = \varphi_{t_1,c}$ und $\varphi_{0,c} = \varphi_{t_2,d}$. Durch zweimalige Anwendung von Satz 7.3 erhalten wir $\varphi_{0,c}(t) = \varphi_{t_1,c}(t + t_1)$ für alle $t \in I_c$ und $\varphi_{0,d}(t) = \varphi_{t_2,d}(t + t_2)$ für alle $t \in I_d$. Es folgt

$$\varphi_{0,b}(t_1 + t_2) \quad = \quad \varphi_{t_1,c}(t_1 + t_2) \quad = \quad \varphi_{0,c}(t_2) \quad = \quad \varphi_{t_2,d}(t_2) \quad = \quad \varphi_{0,d}(0) \quad = \quad d.$$

Dies zeigt, dass $\Phi(t_1 + t_2, b) = \varphi_{0,b}(t_1 + t_2) = d$ und somit $b \sim d$ gilt. □

Aus der Proposition folgt, dass die Trajektorien des Systems eine Zerlegung von D bilden. Diese Zerlegung wird als ***Phasenportrait*** des Systems bezeichnet.

Satz 7.8 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann gilt für jede Trajektorie $T(b)$ genau eine der folgenden drei Aussagen.

(i) Es ist $I_b = \mathbb{R}$, $\varphi_{0,b}$ ist konstant, und b ist eine Ruhelage des Systems. Die Trajektorie $T(b) = \{b\}$ ist einpunktig.

(ii) Es ist $I_b = \mathbb{R}$, und $\varphi_{0,b}$ ist nicht konstant und periodisch. Die Trajektorie $T(b)$ ist also eine geschlossene Kurve in D.

(iii) Die Abbildung $\varphi_{0,b}$ ist injektiv. Die Trajektorie ist also eine nicht-geschlossene Kurve ohne Anfangs- oder Endpunkt.

Beweis: Ist $\varphi_{0,b}$ konstant, dann ist b nach Definiton eine Ruhelage. Die maximale Lösung ist dann offenbar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und nach Definition gilt $T(b) = \varphi_{0,b}(I_b) = \varphi_{0,b}(\mathbb{R}) = \{b\}$. Setzen wir nun voraus, dass $\varphi_{0,b}$ weder konstant noch injektiv ist. Dann gibt es Punkte $s, t \in I_b$ mit $s < t$ und $\varphi_{0,b}(s) = \varphi_{0,b}(t)$. Bezeichnen wir diesen Punkt mit c, dann gilt also $\varphi_{s,c} = \varphi_{0,b} = \varphi_{t,c}$. Nach Satz 7.3, angewendet auf $\tau = t - s$, folgt daraus $\alpha(0,b) = \alpha(t,c)$ und $\alpha(0,b) = \alpha(s,c) = \alpha(t-\tau,c) = \alpha(t,c) - \tau$. Dies ist nur möglich, wenn $\alpha(0,b) = -\infty$ ist. Ebenso zeigt man, dass $\beta(0,b) = +\infty$ gelten muss, insgesamt ist also $I_b = \mathbb{R}$. Für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$\varphi_{0,b}(t_1) \quad = \quad \varphi_{s,c}(t_1) \quad = \quad \varphi_{t-\tau,c}(t_1) \quad = \quad \varphi_{t,c}(t_1+\tau) \quad = \quad \varphi_{0,b}(t_1+\tau).$$

Dies zeigt, dass es sich bei $\varphi_{0,b}$ um eine τ-periodische Lösung handelt. □

Im weiteren Verlauf konzentrieren wir uns auf *ebene* autonome Systeme ($n = 2$). Hier wird unserer wichtigstes Ziel weiterhin die Untersuchung der Trajektorien des Systems sein. Der folgende Satz reduziert die Bestimmung der Trajektorien auf die Lösung von eindimensionalen Anfangswertproblemen.

Satz 7.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $g : D \to \mathbb{R}^2$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Sei $b = (b_1, b_2) \in D$ ein beliebig gewählter Punkt, und sei $T(b)$ die durch b verlaufende Trajektorie des Systems $y' = g(y)$.

(i) Gilt $g_1(y) \neq 0$ für alle $y \in D$, dann folgt $T(b) = \{(t, \psi(t)) \mid t \in J\}$, wobei $\psi : J \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung der eindimensionalen DGL $y' = \frac{g_2(x,y)}{g_1(x,y)}$ mit $\psi(b_1) = b_2$ bezeichnet.

(ii) Gilt $g_2(y) \neq 0$ für alle $y \in D$, dann folgt $T(b) = \{(\phi(t), t)) \mid t \in J\}$, wobei $\phi : J \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung von $y' = \frac{g_1(y,x)}{g_2(y,x)}$ mit $\phi(b_2) = b_1$ bezeichnet.

Beweis: Sei $\varphi : J \to \mathbb{R}^2$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = g(y)$ mit $\varphi(0) = b$. Dann gilt $\varphi_1'(t) = g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ und $\varphi_2'(t) = g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ für alle $t \in J$, außerdem $\varphi_1(0) = b_1$ und $\varphi_2(0) = b_2$.

zu (i) Nach Voraussetzung gilt $\varphi_1'(t) = g_1(\varphi(t)) \neq 0$ für alle $t \in J$. Die Funktion φ_1 ist also auf ganz J streng monoton wachsend oder fallend, besitzt somit eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : \varphi_1(J) \to J$ mit $\varphi_1(b_1) = 0$. Die Trajektorie durch den Punkt b ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} T(b) &= \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \mid t \in J\} = \{(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(x)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))) \mid x \in \varphi_1(J)\} \\ &= \{(x, (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x)) \mid x \in \varphi_1(J)\}. \end{aligned}$$

Wir müssen also zeigen, dass $\psi(t) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(t)$ die maximale Lösung der skalaren DGL $y' = \frac{g_2(x,y)}{g_1(x,y)}$ durch den Punkt b ist. Zunächst verläuft ψ wegen $\psi(b_1) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(b_1) = \varphi_2(0) = b_2$ tatsächlich durch den Punkt b. Außerdem handelt es sich um eine Lösung der DGL, denn für alle $t \in \varphi_1(J)$ gilt

$$\psi'(t) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(t) = \varphi_2'(\varphi_1^{-1}(t)) \cdot (\varphi_1^{-1})'(t) = \frac{\varphi_2'(\varphi_1^{-1}(t))}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(t))} =$$

$$\frac{g_2(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(t)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t)))}{g_1(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(t)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t)))} = \frac{g_2(\psi(t))}{g_1(\psi(t))}.$$

Die Maximalität der Lösung ψ von $y' = \frac{g_2(x,y)}{g_1(x,y)}$ ergibt sich unmittelbar aus der Maximalität der Lösung φ des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = g(y)$ und b.

zu (ii) Hier verläuft die Argumentation weitgehend analog: Man verwendet die Tatsache, dass φ_2 streng monoton wachsend oder fallend ist und somit eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\varphi_2^{-1} : \varphi_2(J) \to J$ existiert. Man rechnet dann nach, dass

$$T(b) = \{((\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(x), x) \mid x \in \varphi_2(J)\}$$

gilt, und dass $\phi(t) = (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(t)$ die maximale Lösung von $y' = \frac{g_1(y,x)}{g_2(y,x)}$ mit $\phi(b_2) = \varphi_1(\varphi_2^{-1}(b_2)) = \varphi_1(0) = b_1$ ist. □

In der Regel sind die im Satz unter (i) und (ii) angegebenen Bedingungen nicht auf ganz D erfüllt. Man behilft sich dann dadurch, dass man g auf gewissen Teilmengen von D einschränkt. Hilfreich ist hierbei die Betrachtung der ***Monotoniebereiche***

$$\begin{aligned} B_{\text{no}} &= \{y \in D \mid f_1(y) > 0, f_2(y) > 0\} \\ B_{\text{nw}} &= \{y \in D \mid f_1(y) < 0, f_2(y) > 0\} \\ B_{\text{so}} &= \{y \in D \mid f_1(y) > 0, f_2(y) < 0\} \\ B_{\text{sw}} &= \{y \in D \mid f_1(y) < 0, f_2(y) < 0\} \end{aligned}$$

(wobei der Index jeweils die „Himmelsrichtung“ des Richtungsfeldes angibt), die durch die sog. ***Isoklinen***

$$\begin{aligned} I_{\text{n}} &= \{y \in D \mid f_1(y) = 0, f_2(y) > 0\} \\ I_{\text{s}} &= \{y \in D \mid f_1(y) = 0, f_2(y) < 0\} \\ I_{\text{w}} &= \{y \in D \mid f_1(y) < 0, f_2(y) = 0\} \\ I_{\text{o}} &= \{y \in D \mid f_1(y) > 0, f_2(y) = 0\} \end{aligned}$$

berandet werden. Betrachten wir beispielsweise das autonome System

$$y_1' = y_2(1 - y_1^2)^2 \quad , \quad y_2' = -y_1(1 - y_2^2)^2.$$

Teil (i) von Satz 7.9 kann angewendet werden, wenn wir das System auf den Bereich $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (I_n \cup I_s) = (\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ beschränken. Auf Grund des Satzes muss dann die skalare Differenzialgleichungen

$$y' \quad = \quad -\frac{x(1-y^2)^2}{y(1-x^2)^2} \tag{7.1}$$

gelöst werden. Um die Trajektorien durch die noch ausgeschlossenen Punkte zu bestimmen, wenden wir Teil (ii) des Satzes auf den Bereich $D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (I_w \cup I_o) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$. Hier führt uns der Satz noch einmal auf auf dieselbe Differenzialgleichung (7.1).

Die in Satz 7.9 vorkommenden sklaren Differenzialgleichungen können wie in § 2 durch Differenzialformen ausgedrückt werden. Die Lösungen der Gleichung in Teil (i) sind genau die Lösungen der Gleichung $g_2(x,y) - g_1(x,y)y' = 0$, und wenn man in Teil (ii) die Variablen x und y vertauscht, so kann die Gleichung dort zu $g_2(x,y)x' - g_1(x,y) = 0$ umgeformt werden. Beide Differenzialgleichungen können durch

$$g_2(x,y)\,dx - g_1(x,y)\,dy \quad = \quad 0 \tag{7.2}$$

zumsammengefasst werden. Eine Funktion $\psi : J \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung der DGL unter (i), wenn die Kurve $\gamma(t) = (t, \psi(t))$ eine Lösung von (7.2) ist. Ebenso ist $\phi : J \to \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung der DGL unter (ii), wenn die Kurve $\gamma(t) = (\phi(t), t)$ eine Lösung von (7.2) ist. wie wir in § 2 gesehen haben, wird die Bestimmung von Lösungen durch die Exaktheit der 1-Form $\omega = g_2(x,y)\,dx - g_1(x,y)\,dy$, also durch die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion $F : D \to \mathbb{R}^2$ mit $dF = \omega$, vereinfacht. Dies führt uns zu der folgenden

Definition 7.10 Ein ebenes autonomes System wie in Satz 7.9 wird ***hamiltonsch*** genannt, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -g_2(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = g_1(x,y)$$

existiert. Man nennt eines solche Funktion eine ***Hamilton-Funktion*** des Systems.

Die Hamilton-Funktion steht nun mit den Trajektorien von $y' = g(y)$ in folgendem Zusammenhang.

Satz 7.11 Sei $y' = g(y)$ ein ebenes autonomes System mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion $g : D \to \mathbb{R}^2$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und sei $H : D \to \mathbb{R}$ eine Hamilton-Funktion des Systems. Dann ist H längs jeder Trajektorie des Systems konstant.

Beweis: Sei $b \in D$ beliebig vorgegeben und $\varphi = \varphi_{0,b}$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung von $y' = g(y)$ mit $\varphi(0) = b$. Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich von φ. Dann ist die Trajektorie $T(b)$ genau die Bildmenge $\varphi(J)$. Es genügt also zu zeigen, dass die Funktion $H \circ \varphi$ auf J konstant ist. Auf Grund der Lösungseigenschaft gilt $\varphi'(t) = g(\varphi(t))$ für alle $t \in J$. Mit der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir für alle $t \in J$ jeweils

$$\begin{aligned}(H \circ \varphi)'(t) \quad &= \quad H'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad = \quad \frac{\partial H}{\partial x}(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi(t))\varphi_2'(t) \\ = \quad -g_2(\varphi(t))\varphi_1'(t) + g_1(\varphi(t))\varphi_2'(t) \quad &= \quad -g_2(\varphi(t))g_1(\varphi(t)) + g_1(\varphi(t))g_2(\varphi(t)) \quad = \quad 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Hamiltonsche Systeme kommen vielfach im Rahmen der Klassischen Mechanik vor, wo die Hamilton-Funktion als die Energie des Systems interpretiert wird und durch Satz 7.11 die Energieerhaltung zum Ausdruck kommt. Wir betrachten als Paradebeispiel solcher Systeme das reibungsfreie Pendel im homogenen Schwerefeld.

Gegeben sei eine punktförmige Masse m, die durch eine Metallstange der Länge ℓ mit einem festen Aufhängungspunkt verbunden ist und sich unter dem Einfluss der räumlich und zeitlich konstanten, nach unten gerichteten Schwerkraft $F_{\text{grav}} = -mg$ bewegt, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Es sei $\varphi(t)$ der Auslenkungswinkel zum Zeitpunkt t, wobei der Wert 0 der Ausrichtung der Stange senkrecht nach unten entspricht. Die Bewegung der Stange erfolgt in festen Ebene durch den Aufhängungspunkt, und die Bewegung der Masse erfolgt außerdem senkrecht zur Stange. Sehen wir die Bewegung gegen den Uhrzeigersinn als positiv an, dann ist Geschwindigkeit $v(t)$ zu jedem Zeitpunkt gleich $v(t) = \ell\varphi'(t)$, und die Beschleunigung entsprechend gleich $a(t) = \ell\varphi''(t)$. Die Beschleunigung der Masse wird verursacht durch die zur Stange orthogonale Komponente F von F_{grav}; diese ist gegeben durch $F(t) = -mg\sin(\varphi(t))$. Insgesamt erhalten wir auf Grund des Zweiten Newtonschen Gesetzes also die Gleichung

$$-mg\sin(\varphi(t)) \quad = \quad F(t) \quad = \quad ma(t) \quad = \quad m\ell\varphi''(t) \quad ,$$

die zu $\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t))$ vereinfacht werden kann. Durch passende Normierung der Einheiten können wir uns auf die Untersuchung der Differenzialgleichung $y'' = -\sin(y)$ beschränken. Diese entspricht dem autonomen System erste Ordnung

$$y_1' \quad = \quad y_2 \qquad , \qquad y_2' \quad = \quad -\sin(y_1).$$

Die Variable y_1 entspricht dem „Ort“, die Variable y_2 dem „Impuls“ des Systems. Das System besitzt die Hamilton-Funktion $H(y) = \frac{1}{2}y_2^2 - \cos(y_1)$, wobei der erste Term der „kinetischen Energie“ und der zweite Term der „potentiellen Energie“ entspricht. Die rechte Seite des Systems ist wegen $\left\|\binom{y_2}{-\sin(y_1)}\right\| \leq \left\|\binom{y_1}{y_2}\right\| = \|y\|$ linear beschränkt; nach Satz 3.16 existieren deshalb alle Lösungen des Systems auf ganz $\mathbb{R}$. Nach Satz 7.11 verläuft jede Trajektorie vollständig in einer Niveaumenge

$$N_c \quad = \quad \{y \in \mathbb{R}^2 \mid H(y) = c\} \quad = \quad \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{1}{2}y_2^2 - \cos(y_1) = c\}.$$

Die Trajektorien des Systems lassen sich folgendermaßen anhand dieser Niveaumengen klassifizieren.

(i) Für alle $c < -1$ ist $N_c = \emptyset$, wegen $\frac{1}{2}y_2^2 - \cos(y_1) \geq -\cos(y_1) \geq -1$ für alle $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Für $-1 < c < 1$ und $(y_1, y_2) \in N_c$ ist wegen $\cos(y_1) = c - \frac{1}{2}y_2^2 \geq c > -1$ jeweils $\cos(y_1) = -1$ und somit $y_1 = (2k+1)\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ausgeschlossen. Somit ist N_c eine disjunkte Vereinigung von Teilmengen der Form $N_c \cap B_k$ mit $B_k =](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[\times \mathbb{R}$, wobei k die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen durchläuft. Wir können uns auf die Beschreibung des Bereichs $N_c \cap B_0$ beschränken, denn wegen $\cos(y_1) = \cos(y_1 + 2k\pi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ erhält man die Trajektorien in den anderen Bereichen durch Translation um ganzzahlige Vielfache von 2π in x-Richtung.

Für die Punkte $(y_1, y_2) \in N_c \cap B_0$ muss jeweils $c + \cos(y_1) = \frac{1}{2}y_2^2 \geq 0$ gelten. Die erste Koordinate unterliegt also der Einschränkung $\cos(y_1) = \cos(|y_1|) \geq -c$, was zu $|y_1| \leq \arccos(-c)$ äquivalent ist. Für $c \to -1$ schrumpft die Länge des zulässigen Intervall für y_1 also gegen 0, während sich das Intervall für $c \to 1$ den Grenzen von $]-\pi, \pi[$ annähert. Wegen $\frac{1}{2}y_2^2 \leq c + \cos(y_1) \leq c + 1 < 2$ ist auch die zweite Koordinate beschränkt. Offenbar ist $N_c \cap B_0$ abgeschlossen, insgesamt also eine kompakte Teilmenge von B_0. Es gilt

$$N_c \cap B_0 \quad = \quad \left\{(y_1, \pm\sqrt{2(\cos(y_1) + c)} \mid |y_1| \leq \arccos(-c)\right\}.$$

Für alle $(y_1, y_2) \in N_c \cap B_0$ mit $|y_1| < \arccos(-c)$ ist $y_2 > 0$. Aus Teil (i) von Satz 7.9 folgt somit, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und eine Funktion $\psi :]y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $\psi(y_1) = y_2$ existieren, so dass die Trajektorie des Systems durch den Punkt (y_1, y_2) eingeschränkt auf $]y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon[\times \mathbb{R}$ mit dem Graph von ψ übereinstimmt. Für die beiden Punkte $(y_1, y_2) \in N_c \cap B_0$ mit $|y_1| = \arccos(-c)$ gilt $y_2 = 0$ und $-\sin(y_1) \neq 0$. Aus Teil (ii) von Satz 7.9 folgt, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und eine Funktion $\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $\psi(0) = y_1$ existieren, so dass die Trajektorie des Systems durch den Punkt $(y_1, 0)$ eingeschränkt auf $\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ mit $\{(\phi(x), x) \mid -\varepsilon < x < \varepsilon\}$ übereinstimmt.

Insgesamt wird $N_c \cap B_0$ also durch relativ offene, zusammenhängende Teilmengen überdeckt, deren Punkte jeweils zu ein- und derselben Trajektorie gehören, auf Grund der Kompaktheit von $N_c \cap B_0$ sogar durch endlich viele solche Teilmengen. Weil $N_c \cap B_0$ offenbar selbst zusammenhängend ist, besitzt jede dieser Teilmengen Schnittpunkte mit mindestens einer anderen. Dies zeigt, dass $N_c \cap B_0$ insgesamt nur aus einer einzigen Trajektorie besteht. Die Trajektorien entsprechen der normalen Pendelbewegung, wobei der Ausschlag umso heftiger ausfällt, je näher der Betrag $|c|$ dem Wert 1 kommt.

(iii) Für $c > 1$ zerfällt N_c in die beiden Teilmengen

$$N_c^+ = \{(y_1, \sqrt{2(\cos(y_1) + c)}) \mid y_1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad N_c^- = \{(y_1, -\sqrt{2(\cos(y_1) + c)}) \mid y_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Ähnlich wie unter (ii) kann man zeigen, dass N_c^+ und N_c^- beides Trajektorien des Systems sind, also nicht in weitere Trajektorien zerfallen. Sie entsprechen einem periodisch sich überschlagenden Pendel, wobei die Überschlagsbewegung beim Durchlauf der Trajektorie N_c^+ gegen den Uhrzeigersinn und beim Durchlauf der Trajektorie N_c^- im Uhrzeigersinn erfolgt.

(iv) Für $c = -1$ erhalten wir die Trajektorien $\{\binom{2k\pi}{0}\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Diese Ruhelagen entsprechem dem bewegungslos nach unten hängenden Pendel; es handelt sich um asymptotisch stabile Ruhelagen.

(v) Für die Untersuchung der Niveaumenge N_1 beschränken wir uns auf den Teilbereich $M_1 = \{(y_1, y_2) \in N_c \mid -\pi \leq y_1 \leq \pi\}$. Diese Menge zerfällt in die vier Trajektorien $\{\binom{-\pi}{0}\}$, $\{\binom{\pi}{0}\}$, M_1^- und M_1^+, wobei letztere gegeben sind durch

$$M_1^- = \{(y_1, -\sqrt{2(\cos(y_1) + 1)}) \mid -\pi < y_1 < \pi\} \quad \text{und} \quad M_1^+ = \{(y_1, \sqrt{2(\cos(y_1) + 1)}) \mid -\pi < y_1 < \pi\}.$$

Dass M_1^- und M^+ nicht in mehrere Trajektorien zerfallen, zeigt man wiederum auf ähnliche Weise wie unter (ii). Die beiden Ruhelagen sind instabil; sie entsprechen dem senkrecht stehenden Pendel. In die Trajektorien M_1^- oder M_c^+ gerät man, indem man das Pendel aus diesem Zustand infinitesimal auslenkt. Das Pendel führt dann eine Umdrehung aus und kommt in derselben senkrechten Position zum Stillstand. Im Fall M_1^- erfolgt die Umdrehung mit, im Fall M_1^+ gegen den Uhrzeigersinn.

Nicht jedes autonome System $y' = f(y)$ mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion ist hamiltonsch. Für die Bestimmung der Trajektorien verwendet man häufig auch das folgende schwächere Konzept, dass auch in höherer Dimension als $n = 2$ anwendbar ist.

Definition 7.12 Sei $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $E : D \to \mathbb{R}$ wird ***Erhaltungsgröße*** oder auch ***erstes Integral*** für das System $y' = f(y)$ genannt, wenn

$$\langle (\nabla E)(y), f(y) \rangle \quad = \quad 0$$

für alle $y \in D$ gilt, wobei ∇E den Gradienten von E und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Standard-Sklarprodukt bezeichnet.

Wie die Hamilton-Funktion ist auch jede Erhaltungsgröße längs jeder Trajektorie konstant. Ist nämlich $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = f(y)$, dann gilt für alle $t \in J$ jeweils $\varphi'(t) = g(\varphi(t))$ und somit

$$(E \circ \varphi)'(t) \quad = \quad E'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad = \quad \langle (\nabla E)(\varphi(t)), g(\varphi(t)) \rangle \quad = \quad 0.$$

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, dass jede Hamilton-Funktion $H : D \to \mathbb{R}$ eines ebenen autonomen Systems $y' = g(y)$ mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion g auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Erhaltungsgröße ist, denn für alle $y \in D$ gilt

$$\langle (\nabla H)(x,y), g(x,y) \rangle = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) g_1(x,y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) g_2(x,y) = -g_2(x,y) \cdot g_1(x,y) + g_1(x,y) \cdot g_2(x,y) = 0.$$

Definition 7.13 Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Dann ist das dem autonomen System $x' = f(x,y)$, $y' = g(x,y)$ zugeordnete ***System in Polarkoordinaten*** gegeben durch

$$r' = p(r,\phi) \quad , \quad \phi' = q(r,\phi)$$

wobei die Funktionen $p, q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} p(r,\phi) &= f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) + g(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) \\ q(r,\phi) &= \tfrac{1}{r} \left(g(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) - f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) \right) \end{aligned}$$

Die Lösung des Systems in kartesischen Koordinaten kann auf die Lösung des Systems in Polarkoordinaten folgendermaßen zurückgeführt werden.

Proposition 7.14 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.13 gewählt. Ist nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, sind (r_0, ϕ_0) die eindeutig bestimmten Polarkoordinaten des Punktes (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, also $x_0 = r_0 \cos(\phi_0)$ und $y_0 = r_0 \sin(\phi_0)$ und ist (μ_1, μ_2) eine Lösung des System in Polarkoordinaten mit $(\mu_1(0), \mu_2(0)) = (r_0, \phi_0)$, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, dann bilden die Funktion $\nu_1, \nu_2 : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\nu_1(t) = \mu_1(t) \cdot \cos(\mu_2(t)) \quad , \quad \nu_2(t) = \mu_1(t) \cdot \sin(\mu_2(t))$$

eine Lösung es ursprünglichen Systems gegeben durch f und g mit $(\nu_1(0), \nu_2(0)) = (x_0, y_0)$.

Beweis: Die Lösung (ν_1, ν_2) durchläuft den Punkt (x_0, y_0) wegen $\nu_1(0) = \mu_1(0) \cdot \cos(\mu_2(0)) = r_0 \cos(\phi_0) = x_0$ und $\nu_2(0) = \mu_1(0) \cdot \sin(\mu_2(0)) = r_0 \sin(\phi_0) = y_0$. Wegen $\mu_1'(t) = p(\mu_1(t), \mu_2(t))$ und $\mu_2'(t) = q(\mu_1(t), \mu_2(t))$ für alle $t \in I$ gilt außerdem jeweils

$$\begin{aligned} \nu_1'(t) &= \mu_1'(t)\cos(\mu_2(t)) - \mu_1(t)\mu_2'(t)\sin(\mu_2(t)) = \\ & p(\mu_1(t), \mu_2(t))\cos(\mu_2(t)) - \mu_1(t) q(\mu_1(t), \mu_2(t))\sin(\mu_2(t)) = \\ & f(\nu_1(t), \nu_2(t))\cos(\mu_2(t))^2 + g(\nu_1(t), \nu_2(t))\cos(\mu_2(t))\sin(\mu_2(t)) \\ -g(\nu_1(t), \nu_2(t))\cos(\mu_2(t))\sin(\mu_2(t)) &+ f(\nu_1(t)\nu_2(t))\sin(\mu_2(t))^2 = f(\nu_1(t), \nu_2(t)) \quad , \end{aligned}$$

und durch eine analoge Rechung erhält man $\nu_2'(t) = g(\nu_1(t), \nu_2(t))$ für alle $t \in I$. □

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das System

$$x' = y + x(1 - x^2 - y^2) \quad , \quad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Das zugehörige System in Polarkoordinaten ist $r' = p(r, \phi)$ und $\phi' = q(r, \phi)$ mit

$$\begin{aligned} p(r, \phi) &= (r\sin(\phi) + r\cos(\phi)(1 - r^2))\cos(\phi) + (-r\cos(\phi) + r\sin(\phi)(1 - r^2))\sin(\phi) = \\ & r\sin(\phi)\cos(\phi) + r\cos(\phi)^2(1 - r^2) - r\cos(\phi)\sin(\phi) + r\sin(\phi)^2(1 - r^2) = r(1 - r^2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q(r, \phi) &= \tfrac{1}{r}\left((-r\cos(\phi) + r\sin(\phi)(1 - r^2))\cos(\phi) - (r\sin(\phi) + r\cos(\phi)(1 - r^2))\sin(\phi)\right) \\ = \tfrac{1}{r}&\left(-r\cos(\phi)^2 + r\sin(\phi)\cos(\phi)(1 - r^2) - r\sin(\phi)^2 - r\cos(\phi)\sin(\phi)(1 - r^2)\right) = \tfrac{1}{r}(-r) = -1. \end{aligned}$$

Das System lautet also $r' = r(1 - r^2)$, $\phi' = -1$. Sei nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, und seien $(r_0, \phi_0) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ die Polarkoordinaten des Punkts. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\phi' = -1$ und $\phi(0) = \phi_0$ ist $\mu_2(t) = \phi_0 - t$. Durch Trennung der Variablen findet man für das Anfangswertproblem $r' = r(1 - r^2)$ und $r(0) = r_0$ die Lösung

$$\mu_1(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}}.$$

Für das ursprüngliche System ist dann

$$(\nu_1(t), \nu_2(t)) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}}(\cos(\phi_0 - t), \sin(\phi_0 - t))$$

eine Lösung mit $(\nu_1(0), \nu_2(0)) = (r_0\cos(\phi_0), r_0\sin(\phi_0)) = (x_0, y_0)$.

§ 8. *Stabilität von Lösungen*

Wichtige Grundbegriffe	*Zentrale Ergenisse*
– (asymptotisch) stabile, instabile, attraktive Lösung einer Differenzialgleichung	– einheitliches Stabilitätsverhalten linearer Systeme
– Übergangsmatrix eines linearen Systems	– Eigenwertbedingung für Stabilität bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten
– Lyapunov-Funktion einer Differenzialgleichung	– Satz über die linearisierte asymptotische Stabilität
	– direkte Methode von Lyapunov

Definition 8.1 Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen eine Lösung $\varphi :]\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ als

(i) ***stabil***, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und jedes $a > \alpha$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass zu jedem Anfangswert $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ die maximale Lösung ϕ mit $\phi(a) = b$ für alle $t \geq a$ existiert und $\|\phi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq a$ gilt. Ansonsten wird die Lösung φ als ***instabil*** bezeichnet.

(ii) ***attraktiv***, wenn es für jedes $a > \alpha$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass zum jedem Anfangswert $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ die maximale Lösung ϕ mit $\phi(a) = b$ für alle $t \geq a$ existiert und

$$\lim_{t \to +\infty} \|\phi(t) - \varphi(t)\| \quad = \quad 0 \qquad \text{erfüllt ist.}$$

(iii) ***asymptotisch stabil***, falls φ stabil und attraktiv ist.

Am einfachsten lässt sich die Bedeutung dieser Begriffe veranschaulichen, wenn das System autonom ist und es sich bei φ um eine konstante Lösung des Systems handelt. In diesem Fall wird der konstante Wert der Lösung als ***Ruhelage*** bezeichnet. In diesem Fall bedeutet die Stabilität von φ (bzw. der Ruhelage), dass für jeden ε-Ball um den Ruhepunkt c ein δ-Ball um c gewählt werden kann (mit $\delta < \varepsilon$), so dass jede Lösung, die in diesem δ-Ball startet, im ε-Ball verbleibt. Wenn dagegen für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig nahe am Ruhepunkt startende Lösungen existieren, die den ε-Ball verlassen, dann handelt es sich bei c um eine instabile Ruhelage.

Die Ruhelage c ist attraktiv, wenn alle Lösungen, die hinreichend nahe bei c starten, schließlich gegen c konvergieren, wobei sie sich allerdings zwischendurch beliebig weit von c entfernen dürfen. Kann man die maximale Entfernung aber für hinreichend nahe Startpunkte durch ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beschränken, dann haben wir es mit einer asymptotisch stabilen Ruhelage zu tun.

Wir bemerken noch, dass es bei einem autonomen System $y' = g(y)$, gegeben durch eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, auch zulässig ist, von ***stabilen Trajektorien*** zu sprechen, und dass Entsprechendes auch für die Begriffe „instabil“, „attraktiv“ und „asymptotisch stabil“ gilt. Ist nämlich $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung mit $\varphi(0) = b$ und ψ eine weitere Lösung mit derselben Trajektorie, dann gilt $\psi(\tau) = b = \varphi(0)$ und somit $\psi(t + \tau) = \varphi(t)$ für alle $t \in J$. Wie man sich leicht überzeugt, weisen die Lösungen φ und ψ dasselbe Stabilitätsverhalten auf.

Als nächstes verallgemeinern wir die Definition des Flusses auf nicht-autonome Systeme.

Definition 8.2 Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Für jedes Paar $(a,b) \in D$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ sei $\varphi_{a,b} : I_{a,b} \to \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Systems $y' = f(x,y)$. Dann wird die Funktion $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D} \quad = \quad \{(t,a,b) \in \mathbb{R} \times D \mid t \in I_{a,b}\}$$

gegeben durch $\Phi(t,a,b) = \varphi_{a,b}(t)$ der ***Fluss*** des Systems $y' = f(x,y)$ genannt.

Den folgenden Satz werden wir im nächsten Kapitel in einem allgemeineren Rahmen beweisen.

Satz 8.3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann ist die Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ aus Definition 8.2 offen, und der Fluss $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion.

Wir können nun ein erstes Ergebnis über die Stabilität von Lösungen *skalarer* Systeme formulieren.

Satz 8.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ist $\varphi :]\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}$ eine attraktive Lösung von $y' = f(x,y)$, dann ist φ auch stabil (ingesamt also asymptotisch stabil).

Beweis: Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a > \alpha$ vorgegeben. Auf Grund der Attraktivität von φ existiert ein $\eta \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$\lim_{t \to +\infty} |\phi(t) - \varphi(t)| \quad = \quad 0$$

für jede Lösung ϕ von $y' = f(x,y)$ mit $|\phi(a) - \varphi(a)| < \eta$ erfüllt ist, wobei $\phi(t)$ dann für alle $t \geq a$ existiert.

Seien nun ϕ^+ und ϕ^- die beiden eindeutig bestimmten Lösungen mit den Anfangswerten $\phi^+(a) = \varphi(a) + \frac{1}{2}\eta$ und $\phi^-(a) = \varphi(a) - \frac{1}{2}\eta$. Wiederum auf Grund der Attraktivität von φ sind diese Lösungen für alle $t \geq a$ definiert, und es existiert ein $a_1 \geq a$, so dass $|\phi^+(t) - \varphi(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $|\phi^-(t) - \varphi(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $t \geq a_1$ gilt.

Auf Grund der lokalen Lipschitz-Stetigkeit und des Satzes von Picard-Lindelöf überschneiden sich die Graphen zweier Lösungen von $y' = f(x,y)$ nicht. Sind also $\psi_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ und $\psi_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen und ist $t_0 \in J_1 \cap J_2$ ein Punkt mit $\psi_1(t_0) < \psi_2(t_0)$, dann folgt $\psi_1(t) < \psi_2(t)$ für alle $t \in J_1 \cap J_2$. Jede Lösung ψ mit $|\psi(a) - \varphi(a)| < \frac{1}{2}\eta$, also mit $\phi^-(a) < \psi(a) < \phi^+(a)$, erfüllt somit $\phi^-(t) < \psi(t) < \phi^+(t)$ für alle $t \geq a_0$. Für alle $t \geq a_1$ folgt

$$\varphi(t) - \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad < \quad \phi^-(t) \quad < \quad \psi(t) \quad < \quad \phi^+(t) \quad < \quad \varphi(t) + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

und somit $|\psi(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$. Aus Satz 8.3 und der Tatsache, dass der stetige Fluss $\Phi:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ auf der kompakten Teilmenge $[a,a_1]\times[a,a_1]\times[\varphi(a)-\frac{1}{2}\eta,\varphi(a)+\frac{1}{2}\eta]$ von $\mathcal{D}$ sogar gleichmäßig stetig ist, folgt die Existenz eines $\delta\in\mathbb{R}^+$ mit $\delta\leq\frac{1}{2}\eta$, so dass für jede Lösung ψ mit $|\psi(a)-\varphi(a)|<\delta$ jeweils $|\psi(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$ für alle $t\in[a,a_1]$ erfüllt ist. Insgesamt ist dann $|\psi(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$ für alle $t\geq a$ für jede solche Lösung erfüllt. □

Als nächstens untersuchen wir nun das Stabilitätsverhalten von Lösungen linearer Systeme von Differenzialgleichungen. Der folgende Begriff hat lediglich eine Hilfsfunktion bei der Formulierung der nachfolgenden Beweise.

Definition 8.5 Sei $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f:D\to\mathbb{R}^n$ eine Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\varphi:J\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y'=f(x,y)$. Weiter sei $D_\varphi=\{(x,y-\varphi(x))\mid x\in J\wedge(x,y)\in D\}$ und $f_\varphi:D_\varphi\to\mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f_\varphi(x,y) \quad = \quad f(x,y+\varphi(x))-f(x,\varphi(x)).$$

Dann bezeichnen wir $y'=f_\varphi(x,y)$ als ***Differenzialgleichung der Störungen*** von φ.

Die Idee bei dieser Definition besteht darin, alle von φ verschiedenen Lösungen der Differenzialgleichung $y'=f(x,y)$ als „Störungen“ von φ, verursacht durch eine Störung des Anfangswerts $\varphi(a)$ für ein $a\in J$, anzusehen.

Satz 8.6 Sei $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f:D\to\mathbb{R}^n$ eine Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\varphi:\,]\alpha,+\infty[\,\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y'=f(x,y)$. Dann besitzt die Differenzialgleichung der Störungen von φ die konstante Funktion mit Wert null als Lösung. Diese ist genau dann stabil bzw. attraktiv, wenn φ stabil bzw. attraktiv ist.

Beweis: Wir beginnen damit, dass wir bijektive, zueinander inverse Korrespondenzen zwischen den Lösungen von $y'=f(x,y)$ einerseits und den Lösungen der DGL der Störungen andererseits herstellen.

Für jeden Punkt $(a,b)\in D$ sei $\varphi_{a,b}$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung von $y'=f(x,y)$ durch den Punkt (a,b), und für jeden Punkt $(a,c)\in D_\varphi$ sein $\psi_{a,c}$ die eindeutig bestimmte Lösung von $y'=f_\varphi(x,y)$ durch den Punkt (a,c). Wir überprüfen die Gleichung

$$\psi_{a,c}(t) \quad = \quad \varphi_{a,c+\varphi(a)}(t)-\varphi(t) \tag{8.1}$$

für alle $(a,c)\in D_\varphi$ und alle t im Definitionsintervall von $\psi_{a,c}(t)$. Sei $\psi(t)=\varphi_{a,c+\varphi(a)}(t)-\varphi(t)$, Weil $\varphi_{a,b}$ eine Lösung von $y'=f(x,y)$ ist, gilt

$$\begin{aligned}\psi'(t) \quad &= \quad \varphi'_{a,c+\varphi(a)}(t)-\varphi'(t) \quad = \quad f(t,\varphi_{a,c+\varphi(a)}(t))-f(t,\varphi(t)) \quad = \\ f(t,\varphi_{a,c+\varphi(a)}(t)-\varphi(t)+\varphi(t))-f(t,\varphi(t)) \quad &= \quad f(x,\psi(t)+\varphi(t))-f(t,\varphi(t)) \quad = \quad f_\varphi(t,\psi(t)) \quad ,\end{aligned}$$

und außerdem $\psi(a)=\varphi_{a,c+\varphi(a)}(a)-\varphi(a)=(c+\varphi(a))-\varphi(a)=c$. Ebenso gilt für alle $(a,b)\in D$ und alle t im Definitionsintervall von $\varphi_{a,b}$ die Gleichung

$$\varphi_{a,b}(t) \quad = \quad \psi_{a,b-\varphi(a)}(t)+\varphi(t). \tag{8.2}$$

Sei nämlich $\phi(t) = \psi_{a,b-\varphi(a)}(t) + \varphi(t)$. Weil $\psi_{a,b-\varphi(a)}$ eine Lösung von $y' = f_\varphi(x,y)$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \psi'_{a,b-\varphi(a)}(t) + \varphi'(t) = f_\varphi(t, \psi_{a,b-\varphi(a)}(t)) + \varphi'(t) = \\ f(t, \psi_{a,b-\varphi(a)}(t) + \varphi(t)) - f(t,\varphi(t)) + f(t,\varphi(t)) &= f(t, \psi_{a,b-\varphi(a)}(t) + \varphi(t)) = f(t,\phi(t)) \quad ,\end{aligned}$$

und außerdem $\phi(a) = \psi_{a,b-\varphi(a)}(a) + \varphi(a) = b - \varphi(a) + \varphi(a) = b$. Die konstante Nullfunktion $\nu_0(t) = 0$ ist tatsächlich eine Lösung von $y' = f_\varphi(x,y)$, denn es gilt $\nu_0'(t) = 0 = f(t, \nu_0(t) + \varphi(t)) - f(t,\varphi(t)) = f_\varphi(t, \nu_0(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $(t,0) \in D_\varphi$ bzw. $(t,\varphi(t)) \in D$.

Setzen wir nun voraus, dass die Lösung φ von $y' = f(x,y)$ stabil ist. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a > \alpha$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ jeweils die Abschätzung $\|\varphi_{a,b}(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ erfüllt ist, für alle $t \geq a$. Sei nun $c \in \mathbb{R}^n$ mit $\|c\| < \delta$. Setzen wir $b = c + \varphi(a)$, dann gilt nach (8.1) die Identität $\psi_{a,c}(t) = \varphi_{a,c+\varphi(a)}(t) - \varphi(t) = \varphi_{a,b}(t) - \varphi(t)$, außerdem $\|b - \varphi(a)\| < \delta$, und somit $\|\psi_{a,c}(t)\| < \varepsilon$, für alle $t \geq a$. Dies zeigt, dass die Nulllösung der DGL $y' = f_\varphi(x,y)$ stabil ist.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass die Nulllösung von $y' = f_\varphi(x,y)$ stabil ist. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a > \alpha$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ mit $\|c\| < \delta$ jeweils die Abschätzung $\|\psi_{a,c}(t)\| < \varepsilon$ erfüllt ist, für alle $t \geq a$. Sei nun $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$. Setzen wir $c = b - \varphi(a)$, dann gilt nach (8.2) die Gleichung $\varphi_{a,b}(t) = \psi_{a,b-\varphi(a)}(t) + \varphi(t)$, außerdem $\|c\| < \delta$, und somit $\|\varphi_{a,b}(t) - \varphi(t)\| = \|\psi_{a,c}(t)\| < \varepsilon$, für alle $t \geq a$. Damit ist nachgewiesen, dass die Lösung φ stabil ist.

Für die Eigenschaft „attraktiv“ läuft der Beweis nach dem gleichen Schema. □

Definition 8.7 Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : J \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion. Seien $t_0, t_1 \in J$ und $\Phi : J \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ das Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$ mit $\Phi(t_0) = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix bezeichnet. Dann wird $\Lambda(t_1,t_0) = \Phi(t_1)$ die ***Übergangsmatrix*** des Systems $y' = A(x)y$ von t_0 nach t_1 genannt.

Wir notieren eine Reihe von Eigenschaften der Übergangsmatrizen.

Proposition 8.8

(i) Ist $\Psi : J \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ein beliebiges Fundamentalsystem, dann ist die Übergangsmatrix von t_0 nach t_1 durch $\Lambda(t_1,t_0) = \Psi(t_1)\Psi(t_0)^{-1}$ gegeben.

(ii) Für alle $t_1, t_2, t_3 \in J$ gilt $\Lambda(t_3,t_1) = \Lambda(t_3,t_2)\Lambda(t_2,t_1)$.

(iii) Ist $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung von $y' = A(x)y$, dann gilt $\varphi(t_2) = \Lambda(t_2,t_1)\varphi(t_1)$ für alle $t_1, t_2 \in J$.

Beweis: zu (i) Das Fundamentalsystem Ψ hängt mit den in der Definition von Λ gegebenen Fundamentalsystem Φ durch die Gleichung $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}$ zusammen. Deshalb gilt $\Lambda(t_1,t_0) = \Phi(t_1) = \Psi(t_1)\Psi(t_0)^{-1}$.

zu (ii) Dies erhält man mit Teil (i) durch $\Lambda(t_3,t_2)\Lambda(t_2,t_1) = \Phi(t_3)\Phi(t_2)^{-1} \cdot \Phi(t_2)\Phi(t_1)^{-1} = \Phi(t_3)\Phi(t_1)^{-1} = \Lambda(t_3,t_1)$.

zu (iii) Weil φ eine Linearkombination der Spalten von Φ ist, existiert ein Vektor $v = {}^t(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\varphi(t) = \Phi(t)v$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $\varphi(t_2) = \Phi(t_2)v = \Phi(t_2)\Phi(t_1)^{-1}\Phi(t_1)v = \Lambda(t_2, t_1)\varphi(t_1)$. □

Im Folgenden bezeichnet $\|C\|$ für eine Matrix $C \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ wie in § 5 stets die Zeilensummennorm von C, und $\|v\|$ für jeden Vektor $v = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ die Maximumsnorm $\|v\| = \|v\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|\}$.

Satz 8.9 *(einheitliches Stabilitätsverhalten)*

Seien $A :]\alpha, +\infty[\to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ und $g :]\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Wir betrachten das lineare System von Differenzialgleichungen $y' = A(x)y + g(x)$.

(i) Eine beliebige Lösung ψ des Systems ist genau dann stabil bzw. attraktiv, wenn die Nulllösung des homogenen Systems $y' = A(x)y$ stabil bzw. attraktiv ist.

(ii) Ist die Lösung ψ attraktiv, dann ist sie auch stabil.

Beweis: zu (i) Wir wenden Satz 8.6 auf die Funktion $f(x, y) = A(x)y + g(x)$ und die Lösung ψ an. Die Differenzialgleichung der Störung stimmt mit dem homogenen System $y' = A(x)y$ überein, denn mit der Notation des Satzes gilt

$$\begin{aligned} f_\psi(x, y) &= f(x, y + \psi(x)) - f(x, \psi(x)) = (A(x)(y + \psi(x)) + g(x)) - (A(x)\psi(x) + g(x)) \\ &= A(x)y + A(x)\psi(x) + g(x) - A(x)\psi(x) - g(x) = A(x)y. \end{aligned}$$

Auf Grund des Satzes ist also die Lösung ψ genau dann stabil bzw. attraktiv, wenn dies auf die Nulllösung von $y' = A(x)y$ zutrifft.

zu (ii) Wegen Teil (i) genügt es zu zeigen, dass die Nulllösung v_0 von $y' = A(x)y$ stabil ist, unter der Voraussetzung der Attraktivität von v_0. Aus dieser Voraussetzung folgt, dass für jedes $a > \alpha$ ein $\delta = \delta(a) \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$ jeweils

$$\lim_{t \to +\infty} \Lambda(t, a)v = \lim_{t \to +\infty} \varphi_v(t) = 0$$

gilt, wobei φ_v die Lösung von $y' = A(x)y$ mit $\varphi_v(a) = v$ bezeichnet. Wenden wir dies auf die Vielfachen $\frac{1}{2}\delta e_j$ der Einheitsvektoren an, für $1 \le j \le n$, so erhalten wir wegen $\|\frac{1}{2}\delta e_j\| = \frac{1}{2}\delta < \delta$ jeweils

$$\lim_{t \to +\infty} \Lambda(t, a)e_j = 2\delta^{-1} \cdot \lim_{t \to +\infty} \Lambda(t, a) \cdot \tfrac{1}{2}\delta e_j = 2\delta^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Es folgt $\lim_{t \to +\infty} \Lambda(t, a) = 0$ bezüglich der Zeilensummennorm. Geben wir ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vor, so existiert also ein $a_1 \ge a$ mit $\|\Lambda(t, a)\| < \varepsilon$ für alle $t \ge a_1$. Zusammen mit der Stetigkeit der Funktion $t \mapsto \|\Lambda(t, a)\|$ auf $[a, a_1]$ folgt daraus, dass ein $\beta = \beta(a) \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\Lambda(t, a)\| \le \beta$ für alle $t \ge a$ existiert.

Um die Stabilität der Nulllösung nachzuweisen, sei nun erneut ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, und außerdem ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > \alpha$. Definieren wir $\beta = \beta(a)$ wie oben und setzen wir $\delta = \varepsilon\beta^{-1}$, dann erhalten wir für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$ und alle $t \ge a$ jeweils

$$\|\varphi_v(t)\| = \|\Lambda(t, a)v\| \le \|\Lambda(t, a)\| \cdot \|v\| < \beta \cdot \varepsilon\beta^{-1} = \varepsilon.$$

Damit ist die Stabilität nachgewiesen. □

Auf Grund von Satz 8.9 ist es gerechtfertigt, von einem ***stabilen linearen System*** von Differenzialgleichungen zu sprechen, und ebenso von instabilen, attraktiven oder asymptotisch stabilen Systemen.

Satz 8.10 *(Stabilitätsverhalten homogener Lösungen)*

Sei $A :]\alpha, +\infty[\to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion. Für alle $t, t' \in]\alpha, +\infty[$ sei $\Lambda(t', t)$ jeweils die Übergangsmatrix zum homogenen System $y' = A(x)y$.

(i) Das System ist genau dann stabil, wenn für jedes $a > \alpha$ ein $\beta = \beta(a) \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|\Lambda(t, a)\| \leq \beta$ für alle $t \geq a$ erfüllt ist.

(ii) Das System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t \to +\infty} \Lambda(t, a) = 0$ für alle $a > \alpha$ gilt.

Beweis: Auf Grund von Satz 8.9 genügt es, das Stabilitätsverhalten der Nulllösung zu untersuchen.

zu (i) Ist die Nulllösung stabil, dann gibt es für jedes $a > \alpha$ ein $\delta = \delta(a)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$ und alle $t \geq a$ jeweils $\|\Lambda(t, a)v\| = \|\varphi_v(t)\| < 1$ gilt, wobei φ_v die eindeutig bestimmte Lösung mit $\varphi_v(a) = v$ bezeichnet. Wenden wir dies auf die Vektoren $\frac{1}{2}\delta e_j$ mit $1 \leq j \leq n$ an, dann folgt jeweils $\|\Lambda(t, a)e_j\| \leq 2\delta^{-1}$ für alle $t \geq a$. Die Spalten der Matrix $\Lambda(t, a)$, und somit auch die Zeilensummennorm $\|\Lambda(t, a)\|$, sind also durch eine nur von a abhängige Konstante $\beta = \beta(a) \in \mathbb{R}^+$ beschränkt.

Setzen wir umgekehrt die Existenz einer Konstanten $\beta = \beta(a)$ mit dieser Eigenschaft voraus, dann folgt daraus die Stabilität der Nulllösung, wie wir am Ende des Beweises von Satz 8.9 gesehen haben.

zu (ii) Ist die Nulllösung asymptotisch stabil, so ist sie auch attraktiv. Wie wir zu Beginn des Beweises von Satz 8.9 (ii) gesehen haben, folgt daraus $\lim_{t \to +\infty} \Lambda(t, a) = 0$ für alle $a \geq \alpha$. Setzen wir dies umgekehrt voraus, dann folgt wegen $\|\varphi_v(t)\| = \|\Lambda(t, a)v\| \leq \|\Lambda(t, a)\| \cdot \|v\|$ jeweils $\lim_{t \to +\infty} \varphi_v(t) = 0$, für jedes $v \in \mathbb{R}^n$. Die Nulllösung ist also attraktiv. Nach Satz 8.9 (ii) ist sie auch stabil, insgesamt also asymptotisch stabil. □

Wir betrachten nun die Stabilität linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten.

Satz 8.11 Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, und seien $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ die verschiedenen komplexen Eigenwerte der Matrix. Das System $y' = Ay$ ist genau dann

(i) stabil, falls $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ für $1 \leq j \leq m$ gilt und außerdem für jeden Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ die algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils übereinstimmen;

(ii) asymptotisch stabil, falls $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für $1 \leq j \leq m$ erfüllt ist.

Beweis: Für $1 \leq j \leq m$ sei r_j jeweils die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_j. Nach Satz 5.19 existiert jeweils ein linear unabhängiges Tupel $(\varphi_{j,0}, ...\varphi_{j,r_j-1})$ von Lösungen der Form $\varphi_{j,k}(t) = e^{\lambda_j t} p_{j,k}(t)$, wobei die Funktion $p_{j,k}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ in jeder Komponente ein Polynom vom Grad $\leq k$ ist. Dabei sind alle Polynome $p_{j,k}$ für $0 \leq k \leq r_j - 1$ genau dann vom Grad 0, wenn die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_j mit der geometrischen Vielfachheit

übereinstimmt. In dem Fall, dass A eine Matrix in Jordanscher Normalform ist, erkennt man dies direkt an der Form des Matrixexponentials e^{tA}, siehe Lemma 5.17. Im allgemeinen Fall folgt es aus der Tatsache, dass eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ existiert, so dass $J = T^{-1}AT$ in Jordanscher Normalform vorliegt, und dass nach Proposition 5.12 durch $\varphi \mapsto T\varphi$ ein linearer Isomorphismus zwischen dem Lösungsraum $y' = Jy$ und dem Lösungsraum von $y' = Ay$ gegeben ist.

Der gesamte Lösungsraum des Systems $y' = Ay$ zerfällt als direkte Summe in die Untervektorräume, die von diesen linear unabhängigen Tupeln für die einzelnen Eigenwerte λ_j aufgespannt werden. Auch diese Aussage kann auf die gleiche Weise auf die Form des Matrixexponentials zurückgeführt werden. Wir erhalten also für $y' = Ay$ ein Fundamentalsystem von Lösungen, indem wir die linear unabhängigen Tupel von Lösungen für die einzelnen Eigenwerte λ_j zu einem Tupel zusammenfassen.

Ist λ_j nicht reell, also $\lambda_j = a_j + ib_j$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ und $b_j \neq 0$, dann ist wegen $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ auch $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ein Eigenwert von A, und zu jeder der angegebenen Lösungen existiert auch eine konjugiert-komplexe Lösung. Nach Umsortierung der Eigenwerte können wir davon ausgehen, dass $\lambda_{j+1} = \bar{\lambda}_j$ ist, und dass das linear unabhängige Tupel zum Eigenwert λ_{j+1} durch

$$(\varphi_{j+1,0}, \ldots \varphi_{j+1,r_j-1}) \quad = \quad (\bar{\varphi}_{j,0}, \ldots \bar{\varphi}_{j,r_j-1})$$

gegeben ist. Wir zerlegen nun die vektorwertigen Polynomfunktionen $p_{j,k}$ jeweils in Real- und Imaginärteil, schreiben also $p_{j,k}(t) = u_{j,k}(t) + iv_{j,k}(t)$ mit $u_{j,k}, v_{j,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt jeweils

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(t) \quad = \quad e^{\lambda_j t} p_{j,k}(t) \quad = \quad e^{a_j t}(\cos(b_j t) + i\sin(b_j t))(u_{j,k}(t) + iv_{j,k}(t)) \quad = \\ e^{a_j t}(\cos(b_j t)u_{j,k}(t) - \sin(b_j t)v_{j,k}(t)) + ie^{a_j t}(\cos(b_j t)v_{j,k}(t) + \sin(b_j t)u_{j,k}(t)). \end{aligned}$$

Indem wir für $0 \leq k \leq r_j - 1$ jeweils

$$\psi_{j,k}(t) \quad = \quad \mathrm{Re}\,\varphi_{j,k}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\varphi_{j,k}(t) + \tfrac{1}{2}\varphi_{j+1,k}(t) \quad = \quad e^{a_j t}\left(\cos(b_j t)u_{j,k}(t) - \sin(b_j t)v_{j,k}(t)\right)$$

und

$$\phi_{j,k}(t) \quad = \quad \mathrm{Im}\,\varphi_{j,k}(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2i}\varphi_{j,k}(t) + \tfrac{1}{2i}\varphi_{j+1,k}(t) \quad = \quad e^{a_j t}\left(\cos(b_j t)v_{j,k}(t) + \sin(b_j t)u_{j,k}(t)\right)$$

setzen, erhalten wir durch $(\psi_{j,0}(t), \phi_{j,0}(t), \ldots, \psi_{j,r_j-1}(t), \phi_{j,r_j-1}(t))$ ein linear unabhängiges System von $2r_j$ reellwertigen Lösungen.

Sei nun $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ das Fundamentalsystem mit den soeben definierten reellwertigen Lösungen als Spalten. An der Form der Lösungen in diesen Systemen lässt sich unmittelbar erkennen, dass $\|\Phi(t)\|$ für $t \to +\infty$ genau dann beschränkt bleibt, wenn entweder $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ oder $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ und die Funktion $p_{j,k}$ (bzw. die Funktionen $u_{j,k}$ und $v_{j,k}$) für $0 \leq k \leq r_j - 1$ konstant sind. Letzteres ist, wie wir oben festgestellt haben, genau dann der Fall, wenn algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_j übereinstimmen. Da es sich sowohl bei $\Phi(t)$ als auch bei der Übergangsmatrix $\Lambda(t,a)$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ um reelle Fundamentalsysteme handelt, existiert eine Matrix $T_a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $\Lambda(t,a) = \Phi(t)T_a$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass auch $\|\Lambda(t,a)\|$ für $t \to +\infty$ genau dann beschränkt bleibt, wenn die unter (i) angebene Bedingung an die Eigenwerte erfüllt ist. Nach Teil (i) von Satz 8.10 ist dies genau dann der Fall, wenn das System $y' = Ay$ stabil ist.

Ebenso lässt sich an der Form der Spalten im Fundamentalsystem Φ erkennen, dass $\Phi(t)$ genau dann für $t \to +\infty$ gegen Null konvergiert, wenn $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ für $1 \leq j \leq m$ gilt. Wie im Fall (i) sieht man, dass dies äquivalent dazu ist, dass $\Lambda(t,a)$ für $t \to +\infty$ gegen Null konvergiert, und dies ist nach Teil (ii) von Satz 8.10 wiederum äquivalent dazu, dass das System $y' = Ay$ asymptotisch stabil ist. □

Folgerung 8.12 Seien die Bezeichnungen wie in Satz 8.11 gewählt. Dann existiert unter der Voraussetzung (i) des Satzes eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $M \geq 1$, so dass $\|e^{tA}\| \leq M$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist. Unter der Voraussetzung (ii) gibt es Konstanten $K, \alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.

Beweis: Wie wir im Beweis von Satz 8.11 gesehen haben, ist die Bedingung (i) an die Eigenwerte äquivalent dazu, dass die dort konstruierte Fundamentalmatrix $\|\Phi(t)\|$ für $t \to +\infty$ beschränkt bleibt. Weil auch $t \mapsto e^{tA}$ ein reelles Fundamentalsystem ist, existiert eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $e^{tA} = \Phi(t)T$ für alle $t \in R$, und somit bleibt auch e^{tA} für $t \to +\infty$ beschränkt. Es gibt also ein $a \in \mathbb{R}^+$ und eine Kontante $M_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|e^{tA}\| \leq M_1$ für alle $t \geq a$. Auf Grund der Stetigkeit von $t \mapsto e^{tA}$ und dem Maximumsprinzip gibt es eine weitere Konstante $M_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|e^{tA}\| \leq M_2$ für $0 \leq t \leq a$. Setzen wir $M = \max\{M_1, M_2\}$, dann folgt $\|e^{tA}\| \leq M$ für alle $t \in R$. Wegen $\|e^{0 \cdot A}\| = \|E_n\| = 1$ muss $M \geq 1$ gelten.

Für den Nachweis der zweiten Abschätzung sei ρ das Maximum der Realteile der Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$; auf Grund der Bedingung (ii) ist $\rho < 0$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\rho + \alpha < 0$ bleibt $e^{\alpha t}\|\Phi(t)\| = \|e^{\alpha t}\Phi(t)\|$ für $t \to +\infty$ beschränkt, wie man anhand der Spalten der Matrix $e^{\alpha t}\Phi(t)$ unmittelbar erkennt, und somit gilt dasselbe auch für $e^{\alpha t}\|e^{tA}\|$. Wie unter (i) zeigt man, dass eine Konstante $K \in \mathbb{R}^+$ mit $e^{\alpha t}\|e^{tA}\| \leq K$ für alle $t \geq 0$ existiert, und es folgt $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$. □

In § 5 haben wir die Trajektorien des Systems $y' = Ay$ für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ berechnet. Mit Hilfe von Satz 8.11 können wir nun Aussagen zur Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ treffen.

(i) Ist A ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, so ist die Ruhelage im Fall $b < 0$ asymptotisch stabil, im Fall $b = 0$ stabil und im Fall $b > 0$ instabil.

(ii) Ist die Matrix A ähnlich zu einer Jordanmatrix der Größe 2 und ist $a \in \mathbb{R}$ der einzige Eigenwert, so ist die Ruhelage im Fall $a < 0$ asymptotisch stabil und im Fall $a \geq 0$ instabil.

(iii) Besitzt A zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte $a \pm ib$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$), so ist die Ruhelage im Fall $a < 0$ asymptotisch stabil, im Fall $a = 0$ stabil und im Fall $a > 0$ instabil.

Folgerung 8.13 Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine ω-periodische stetige Funktion. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine 2ω-periodische stetig differenzierbare Funktion und $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine Matrix wie in Satz 6.12. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von B. Das System $y' = A(x)y$ ist genau dann

(i) stabil, falls $\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq 0$ für $1 \leq j \leq m$ gilt und außerdem für jeden Eigenwert λ_j mit $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ die algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils übereinstimmen;

(ii) asymptotisch stabil, falls $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ für $1 \leq j \leq m$ erfüllt ist.

Beweis: Nach Satz 6.12 ist $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems $y' = A(x)y$. Auf Grund der Stetigkeit von $t \mapsto p(t)$ gibt es Konstanten $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|p(t)\| \leq M_1$ und $\|p(t)^{-1}\| \leq M_2$ für $0 \leq t \leq 2\omega$, und

auf Grund der 2ω-Periodizität gelten diese Abschätzungen darüber hinaus für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $\|\Phi(t)\| \leq M_1\|e^{tB}\|$ und $\|e^{tB}\| \leq M_2\|\Phi(t)\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir beweisen nun die beiden angegebenen Äquivalenzen.

zu (i) Das System $y' = By$ ist nach Satz 8.11 genau dann stabil, wenn die Eigenwerte die unter (i) angegebene Bedingung erfüllen. Die Stabilität von $y' = By$ wiederum ist nach Satz 8.10 äquialent dazu, dass $t \mapsto \|\Psi(t)\|$ für $t \to +\infty$ für ein (und damit für jedes) Fundamentalsystem Ψ von $y' = By$ beschränkt bleibt; insbesondere gilt das für das Fundamentalsystem $t \mapsto e^{tB}$. Auf Grund der Existenz der Konstanten M_1, M_2 bleibt $t \mapsto e^{tB}$ genau dann beschränkt, wenn dies für $t \mapsto p(t)e^{tB}$ zutrifft. Dies wiederum ist nach Satz 8.10 genau dann der Fall, wenn das System $y' = A(x)y$ stabil ist.

zu (ii) Hier verläuft die Argumentation vollkommen analog, mit dem einzigen Unterschied, dass an Stelle der Beschränktheit die Konvergenz gegen null für $t \to +\infty$ betrachtet wird. □

Um das folgende Ergebnis zu motivieren, betrachten wir das von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige autonome System

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \sin(x) + y + xy^3 \\ y' &= -x\cos(y) + \alpha(e^y - 1) \end{aligned} \tag{8.3}$$

Dieses besitzt offenbar die Ruhelage $(0,0)$. Weil wir die gesamte Lösungsmenge des Systems nicht ohne Weiteres ausrechnen können, lassen sich auf direktem Wege keine Aussagen zur Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ treffen. Es erscheint aber naheliegend, in der Nähe von $(0,0)$ mit den Taylor-Entwicklungen der im System auftretenden Funktionen zu arbeiten, im Einzelnen in erster Näherung $\sin(x) \approx x$, $\cos(y) \approx 1$ und $e^y \approx 1 + y$. Wir erhalten auf diese Weise das „genäherte System“

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + y \\ y' &= -x + \alpha y \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Auf dieses System können wir nun Satz 8.11 anwenden: Das charakteristische Polynom der Matrix ist gleich $(x-\alpha)^2+1$, die beiden Eigenwerte sind also $\alpha \pm i$, und beide treten notwendigerweise mit algebraischer Vielfachheit 1 auf. Daraus folgt, dass die algebraische Vielfachheit der beiden Eigenwerte gleich der geometrischen Vielfachheit ist. Auf Grund des Satzes ist das System ist also für $\alpha < 0$ asymptotisch stabil, für $\alpha = 0$ stabil und für $\alpha > 0$ instabil. Die entscheidende Frage lautet nun, ob sich diese Ergebnisse auf das ursprüngliche System übertragen lassen.

Für den Beweis des folgenden Satzes greifen wir auf den *Schrankensatz* aus der Analysis mehrerer Variablen zurück. Dieser besagt, dass für jede stetig differenzierbare Funkton $f : U \to \mathbb{R}^m$ definiert auf einer offenen konvexen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ für alle $x, y \in U$ jeweils die Abschätzung $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \kappa\|x - y\|_\infty$ gilt, wobei $\kappa \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante mit $\|f'(x)\| \leq \kappa$ für alle $x \in U$ bezeichnet und $\|f'(x)\|$ jeweils für die Zeilensummennorm der Jacobi-Matrix $f'(x) \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$ steht.

Satz 8.14 *(Satz über linearisierte asymptotische Stabilität)*

Gegeben sei ein autonomes System der Form

$$y' = Ay + r(y) \quad ,$$

bestehend aus einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $r : D \to \mathbb{R}^n$ definiert auf einer offenen Nullumgebung $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $r(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $r'(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}}$. Besitzt die Matrix A nur Eigenwerte mit negativem Realteil, so ist die Ruhelage $0_{\mathbb{R}^n}$ des Systems asymptotisch stabil.

Beweis: Wir unterteilen den Beweis der Übersichtlichkeit halber in drei Abschnitte.

1. Teil: Vorbereitungen

Wir definieren eine Reihe von Konstanten.

- Da nach Voraussetzung alle Eigenwerte einen negativen Realteil besitzen, existieren nach Folgerung 8.12 Konstanten $K, \alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $K \geq 1$ und $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.
- Wir wählen ein $M \in \mathbb{R}^+$ mit $M < \frac{\alpha}{K}$. Dann gilt $KM - \alpha < 0$.
- Auf Grund der Stetigkeit von r' können wir ein $\rho \in \mathbb{R}^+$ so wählen, dass $\bar{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n}) \subseteq D$ und $\|r'(x)\| \leq M$ für alle $x \in \bar{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$ erfüllt ist. Auf Grund des Schrankensatzes folgt dann $\|r(x)\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in \bar{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$.
- Für jedes $v \in B_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$ sei $t_0(v) = \sup\{t_1 \in I_v \mid \|\varphi_v(t)\| \leq \rho \; \forall \, t \in [0, t_1[\}$, wobei $\varphi_v : I_v \to D$ die maximale Lösung des Systems bezeichnet. Es ist $t_0(v)$ also der Zeitpunkt, zu dem die Lösung φ_v endet oder die Kreisscheibe $B_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$ verlässt.

2. Teil: Nachweis der Abschätzung $\|\varphi_v(t)\| \leq K\|v\|e^{(KM-\alpha)t}$ für alle $v \in B_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$ und alle $t \in [0, t_0(v)[$

Sei $v \in B_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$. Die Funktion $\varphi_v : I_v \to D$ kann als Lösung des linearen Systems $y' = Ay + r(\varphi_v(x))$ aufgefasst werden. Nach Satz 5.8 über die Variation der Konstanten gilt

$$\varphi_v(t) \quad = \quad e^{tA}v + \int_0^t e^{(t-s)A} r(\varphi_v(s))\, ds \qquad \text{für alle} \quad t \in [0, t_0(v)].$$

Es folgt die Abschätzung

$$\|\varphi_v(t)\| \quad \leq \quad \|e^{tA}\| \cdot \|v\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \cdot \|r(\varphi_v(s))\|\, ds \quad \leq$$

$$Ke^{-\alpha t}\|v\| + \int_0^t Ke^{\alpha(s-t)}\|r(\varphi_v(s))\|\, ds \quad \leq \quad Ke^{-\alpha t}\|v\| + \int_0^t Ke^{\alpha(s-t)}M\|\varphi_v(s)\|\, ds$$

und somit $e^{\alpha t}\|\varphi_v(t)\| \leq K\|v\| + KM\int_0^t e^{\alpha s}\|\varphi_v(s)\|\, ds$ für alle $t \in [0, t_0(v)[$. Wir wenden nun das Satz 3.15, das Gronwall-Lemma, auf die Funktion $u(t) = e^{\alpha t}\|\varphi_v(t)\|$ an. Es folgt $e^{\alpha t}\|\varphi_v(t)\| \leq K\|v\|e^{KMt}$ für alle $t \in [0, t_0(v)[$ und $v \in B_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$, was zur oben angegebenen Abschätzung äquivalent ist.

3. Teil: Abschluss des Beweises

Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq \frac{\rho}{K}$ und $t \in [0, t_0(v)[$ gilt $\|\varphi_v(t)\| \leq \rho e^{(KM-\alpha)t} < \rho$, wegen $KM - \alpha < 0$. Insbesondere ist die positive Halbtrajektorie $T^+(v)$ in $\bar{B}_\rho(v) \subseteq D$ enthalten und damit in D relativ kompakt. Nach Proposition 3.12 ist $\varphi_v(t)$ deshalb für alle $t \geq 0$ definiert, und weil $B_\rho(v)$ von der Lösung nicht verlassen wird, gilt $t_0(v) = +\infty$. Die Abschätzung zeigt auch, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq \frac{\rho}{K}$ jeweils

$$\lim_{t \to +\infty} \|\varphi_v(t)\| \quad = \quad 0$$

gilt. Dies zeigt, dass die Ruhelage des Systems im Nullpunkt attraktiv ist. Für ein vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ setzen wir nun $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, \frac{\rho}{K}\}$. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$ ist die Lösung φ_v dann auf ganz $\mathbb{R}_+$ definiert, und es gilt $\|\varphi_v(t)\| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot e^{(KM-\alpha)t} < \varepsilon$. Die Ruhelage im Nullpunkt ist also auch stabil, insgesamt also asymptotisch stabil. □

Besitzt die Matrix A in Satz 8.14 einen Eigenwert mit positivem Realteil, dann kann laut Bemerkung 7.6.5 (2) in [Aul10] gezeigt werden, dass die Ruhelage im Nullpunkt instabil ist.

Kommen wir nun noch einmal auf das System (8.3) zurück. Definieren wir die Matrix A durch

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad ,$$

dann hat das System die Form $\binom{x'}{y'} = f(x,y)$ mit $f(x,y) = A\binom{x}{y} + r(x,y)$ mit

$$r(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha(\sin(x) - x) + xy^3 \\ (-x)(\cos(y) - 1) + \alpha(e^y - y - 1) \end{pmatrix}.$$

Offenbar gilt $r(0,0) = 0$. Die Ableitung von r ist gegeben durch

$$r'(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha(\cos(x) - 1) + y^3 & 3xy^2 \\ 1 - \cos(y) & x\sin(y) + \alpha(e^y - 1) \end{pmatrix},$$

und offenbar ist $r'(0,0) = 0_{\mathcal{M}_2,\mathbb{R}}$. Weil die Matrix A, wie wir oben gesehen haben, im Fall $\alpha < 0$ nur negative Eigenwerte besitzt, liefert uns Satz 8.14 die asymptotische Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ in diesem Fall.

Eine wesentliche Einschränkung des Satzes besteht darin, dass über Eigenwerte mit Realteil 0 keine Aussage möglich ist. Davon ist beispielsweise auch das System $y_1' = y_2$, $y_2' = -\sin(y_1)$ des reibungsfreien Pendels betroffen, das wir am Ende von § 7 untersucht hatten. Das System wird approximiert durch das lineare System $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$, also $y' = Ay$ mit der Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Eigenwerte von A sind $\pm i$, besitzen also Realteil 0, und folglich ist auf Grund von Satz 8.14 keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage in $(0,0)$ möglich. Dieses Problem soll durch die Theorie, die wir nun vorstellen, behoben werden.

Definition 8.15 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ wird ***Lyapunov-Funktion*** zu $y' = f(y)$ genannt, wenn $\langle (\nabla V)(y), f(y) \rangle \leq 0$ für alle $y \in D$ erfüllt ist.

Wie man leicht überprüft, ist jede Erhaltungsgröße eines autonomen Systems eine Lyapunov-Funktion, insbesondere jede Hamilton-Funktion für ein ebenes autonomes System.

Lemma 8.16 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zu $y' = f(y)$. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des autonomen Systems, dann ist die Funktion $V \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ monoton fallend.

Beweis: Auf Grund der mehrdimensionalen Kettenregel gilt für alle $t \in I$ jeweils

$$(V \circ \varphi)'(t) \quad = \quad V'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad = \quad \langle (\nabla V)(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle \quad \leq \quad 0.$$

Also ist $V \circ \varphi$ tatsächlich auf I monoton fallend. □

Satz 8.17 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zu $y' = f(y)$. Ist $c \in D$ mit $f(c) = V(c) = 0$ und $V(y) > 0$ für alle $y \in D \setminus \{c\}$, dann ist c eine stabile Ruhelage von $y' = f(y)$.

Beweis: Sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(c) \subseteq D$ und $\varepsilon \in]0, r]$. Auf Grund des Maximumsprinzips, und weil V auf $D \setminus \{c\}$ nicht null wird, nimmt die Funktion V auf der kompakten Teilmenge $S_\varepsilon = \{y \in D \mid \|y - c\| = \varepsilon\}$ ein positives Minimum $m(\varepsilon)$ an. Auf Grund der Stetigkeit von V gibt es nach dem ε-δ-Kriterium ein $\delta(\varepsilon) \in]0, \varepsilon[$ mit $V(y) \in [0, \frac{1}{2}m(\varepsilon)]$ für alle $y \in D$ mit $\|y - c\| < \delta(\varepsilon)$.

Sei nun $v \in D$ mit $\|v - c\| < \delta(\varepsilon)$. Wir betrachten die maximale Lösung $\varphi_v : I_v \to D$ von $y' = f(y)$ mit $\varphi_v(0) = v$. Nehmen wir an, dass φ_v den Bereich $\bar{B}_\varepsilon(c)$ in positiver Zeitrichtung verlässt, dass also ein $s \in I_v$ mit $\varphi_v(s) \notin \bar{B}_\varepsilon(c)$ existiert. Nach dem Zwischenwertsatz, angewendet auf die Funktion $g : I_v \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|\varphi_v(t) - c\|$, gibt es dann wegen $\|\varphi_v(0) - c\| = \|v - c\| < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ ein $t_1 \in I_v \cap \mathbb{R}_+$ mit $\|\varphi_v(t_1) - c\| = \varepsilon$. Weil $[0, t_1] \cap g^{-1}(\varepsilon)$ eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, enthält sie ein minimales Element t_0. Es gilt dann $\|\varphi_v(t) - v\| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, t_0[$ und $\|\varphi_v(t_0) - v\| = \varepsilon$. Auf Grund des Lemmas von oben ist die Funktion auf I_v gegeben durch $t \mapsto V(\varphi_v(t))$ monoton fallend. Nach Konstruktion gilt nun $m(\varepsilon) \leq V(\varphi_v(t_0)) \leq V(\varphi_v(0)) = V(v) \leq \frac{1}{2}m(\varepsilon)$, im Widerspruch zu $\frac{1}{2}m(\varepsilon) < m(\varepsilon)$.

Der Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war, und dass $\varphi_v(t) \in B_\varepsilon(c)$ für alle $t \geq 0$ mit $t \in I_v$ gilt. Die Halbtrajektorie $T^+(v)$ ist also insbesondere in $\bar{B}_\varepsilon(c) \subseteq D$ enthalten und damit relativ kompakt in D. Nach Proposition 7.6 (ii) ist I_v deshalb nach rechts unbeschränkt. Insgesamt ist damit die Stabilität der Ruhelage c nachgewiesen. □

Häufig ist es nicht möglich, eine Lyapunov-Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich des autonomen Systems anzugeben. Man schränkt dann den Definitionsbereich auf eine geeignete Teilmenge ein.

Definition 8.18 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine Teilmenge $M \subseteq D$ wird bezüglich $y' = g(y)$

(i) ***positiv invariant*** genannt, wenn für jedes $v \in M$ auch die positive Halbtrajektorie $T^+(v)$ in M enthalten ist,

(ii) ***negativ invariant***, wenn für jedes $v \in M$ auch die negative Halbtrajektorie $T^-(v)$ in M enthalten ist, und

(iii) ***invariant***, wenn für jedes $v \in M$ die gesamte Trajektorie $T(v)$ in M liegt.

Liegt ein Punkt v in einer offenen positiv invarianten Teilmenge M des Definitionsbereichs von $y' = f(y)$, dann genügt es, bei der Untersuchung der Stabilität von v das autonome System eingeschränkt auf M zu betrachten.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir noch einmal das System des reibungsfreien Pendels $y_1' = y_2$, $y_2' = -\sin(y_1)$, das wir in der Form $y' = f(y)$ mit $f(y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) \end{pmatrix}$ schreiben. Wie wir am Ende von § 7 gezeigt haben, existiert für jedes $c \in [-1, 1[$ eine Trajektorie der Form

$$T_c \quad = \quad \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < y_1 < \pi, \tfrac{1}{2}y_2^2 - \cos(y_1) = c\}.$$

(Genauer gesagt hatten wir dort T_c unter (ii) zunächst nur für $-1 < c < 1$ eingeführt und den Fall $c = -1$ unter (iv) als Spezialfall behandelt, aber die angegebene Gleichung für T_c bleibt im Fall $c = -1$ gültig.) Als Vereinigung von Trajektorien ist

$$M \quad = \quad \bigcup_{c\in[-1,1[} T_c \quad = \quad \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 \mid -\pi < y_1 < \pi, \tfrac{1}{2}y_2^2 - \cos(y_1) < 1\}$$

invariant, insbesondere positiv invariant. Für die Untersuchung der Ruhelage betrachten wir nun auf M die Hamilton-Funktion $H(y_1,y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 - \cos(y_1)$. Aus der Bemerkung im Anschluss an Definition 8.15 ist H eine Lyapunov-Funktion für $y' = f(y)$. Mit H ist auch $V(y_1,y_2) = H(y_1,y_2)+1$ eine Lyapunov-Funktion des Systems $y' = f(y)$ auf M. Es gilt $V(0,0) = 0$ und $V(y_1,y_2) > 0$ für alle $(y_1,y_2) \in M \setminus \{(0,0)\}$. Nach Satz 8.17 ist $(0,0)$ somit eine stabile Ruhelage des Systems.

Satz 8.19 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zum autonomen System $y' = f(y)$. Ist $c \in D$ mit $f(c) = V(c) = 0$, und gilt sowohl $V(y) > 0$ als auch $\langle(\nabla V)(y), f(y)\rangle < 0$ für alle $y \in D \setminus \{c\}$, dann ist c eine asymptotisch stabile Ruhelage von $y' = f(y)$.

Beweis: Nach Satz 8.17 ist c eine stabile Ruhelage. Sei $\bar{C}$ eine kompakte Umgebung von c. Auf Grund der Stabilität existiert eine offene Umgebung U von c, so dass die eindeutig bestimmte Lösung φ_v von $y' = f(y)$ fur alle $v \in U$ jeweils auf ganz $\mathbb{R}_+$ definiert und $\varphi_v(t) \in \bar{C}$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist. Weil die Funktion $h_v = (V \circ \varphi_v)(t)$ nach Lemma 8.16 monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist, existiert jeweils $u_v = \inf\{h_v(t) \mid t \geq 0\}$ als nichtnegative reelle Zahl. Wir definieren eine Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}_+$ durch $v \mapsto u_v$.

Nehmen wir nun an, es existiert ein $v \in U$ mit $\psi(v) > 0$. Dann gilt $V(\varphi_v(t)) \geq u_v > 0$ für alle $t \geq 0$. Wegen $V(c) = 0$ existiert eine offene Umgebung W von c mit $0 \leq V(y) < \psi(v)$ für alle $y \in W$. Daraus folgt $\varphi_v(t) \in \bar{C} \setminus W$ für alle $t \geq 0$. Weil die Funktion $y \mapsto \langle(\nabla V)(y), f(y)\rangle$ stetig, negativ und $\bar{C} \setminus W$ kompakt ist, nimmt diese Funktion auf $\bar{C} \setminus W$ ein Maximum $\mu < 0$ an. Es folgt $\langle(\nabla V)(\varphi_v(t)), f(\varphi_v(t))\rangle \leq \mu$ für alle $t \geq 0$. Auf Grund des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung erhalten wir für alle $t \geq 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}(V\circ\varphi_v)(t) - V(v) \quad &= \quad (V\circ\varphi_v)(t) - (V\circ\varphi_v)(0) \quad = \quad \int_0^t (V\circ\varphi)'(s)\,ds \\ &= \quad \int_0^t \langle(\nabla V)(\varphi_v(s)), f(\varphi_v(s))\rangle\,ds \quad \leq \quad \int_0^t \mu\,ds \quad = \quad \mu t\end{aligned}$$

(vgl. den Beweis von Lemma 8.16) und somit $\lim\limits_{t\to+\infty}(V\circ\varphi_v)(t) = -\infty$. Aber dies steht im Widerspruch zu $V(y) \geq 0$ für alle $y \in D$. Es folgt $\psi(v) \leq 0$ und somit auch $\lim\limits_{t\to+\infty}(V\circ\varphi_v)(t) \leq 0$ für alle $v \in U$. Daraus wiederum ergibt sich, wie wir unten zeigen werden, die Gleichung $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_v(t) = c$ und insbesondere die Existenz des Grenzwerts, womit die asymptotische Stabilität bewiesen ist.

Denn nehmen wir an, der Grenzwert existiert nicht oder ist von c verschieden. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n t_n = +\infty$ und $\|\varphi_v(t_n) - c\| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\varphi_v(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist in der kompakten Menge $\bar{C}$ enthalten und besitzt eine Teilfolge, die gegen einen von c verschiedenen Punkt $d \in \bar{C}$ konvergiert. Außerdem gilt $V(d) = \lim_n(V\circ\varphi_v)(t_n) = 0$. Aber dies steht im Widerspruch dazu, dass $c \in D$ der einzige Punkt mit $V(c) = 0$ ist. □

Satz 8.20 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zum autonomen System $y' = f(y)$. Ist $c \in D$ mit $f(c) = V(c) = 0$, gilt $\langle (\nabla V)(y), f(y)\rangle < 0$ für alle $y \in D \setminus \{c\}$ und existiert in jeder Umgebung von c ein $y \in D$ mit $V(y) < 0$, dann ist c eine instabile Ruhelage von $y' = f(y)$.

Beweis: Angenommen, c ist eine stabile Ruhelage des Systems. Wir beginnen mit zwei Feststellungen.

(i) Auf Grund der Stabilität existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_\varepsilon(c) \subseteq D$ ein $\delta(\varepsilon) \in]0, \varepsilon[$, so dass für alle $v \in D$ mit $\|v - c\| < \delta(\varepsilon)$ jeweils $\|\varphi_v(t) - c\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, wobei φ_v wie immer die eindeutig bestimmte Lösung von $y' = f(y)$ mit $\varphi_v(0) = v$ bezeichnet.

(ii) Auf Grund unserer Voraussetzung existiert außerdem jeweils ein $y(\varepsilon) \in D$ mit $\|y(\varepsilon) - c\| < \delta(\varepsilon)$ und $V(y(\varepsilon)) < 0$. Weil V stetig ist und $V(c) = 0$ gilt, existiert ein $r(\varepsilon) \in]0, \delta(\varepsilon)[$ mit $V(y) > V(y(\varepsilon))$ für alle $y \in D$ mit $\|y - c\| < r(\varepsilon)$.

Weil die Lyapunov-Funktion V entlang der Lösungen nach Lemma 8.16 monoton fallend ist, gilt $V(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) \leq V(\varphi_{y(\varepsilon)}(0)) = V(y(\varepsilon))$ für alle $t \geq 0$. Daraus folgt $r(\varepsilon) \leq \|\varphi_{y(\varepsilon)}(t) - c\| \leq \varepsilon$ für alle $t \geq 0$, die erste Ungleichung wegen (ii) und die zweite wegen (i) und $\|y(\varepsilon) - c\| < \delta(\varepsilon)$.

Die Teilmenge $A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid r(\varepsilon) \leq \|y - c\| \leq \varepsilon\}$ von D ist kompakt. Deshalb nimmt die stetige Funktion $y \mapsto \langle (\nabla V)(y), f(y)\rangle$ auf A ein Maximum μ an, das wegen $c \notin A$ negativ ist. Insbesondere gilt also die Ungleichung $\langle (\nabla V)(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)), f(\varphi_{y(\varepsilon)}(t))\rangle \leq \mu$ für alle $t \geq 0$. Es gilt jeweils

$$(V \circ \varphi_{y(\varepsilon)})'(t) \quad = \quad V'(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) \cdot \varphi'_{y(\varepsilon)}(t) \quad = \quad \langle (\nabla V)(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)), \varphi'_{y(\varepsilon)}(t)\rangle \quad = \quad \langle (\nabla V)(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)), f(\varphi_{y(\varepsilon)}(t))\rangle$$

und mit dem Haupsatz der Differenzial- und Integralrechnung erhalten wir

$$V(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) - V(y(\varepsilon)) \quad = \quad (V \circ \varphi_{y(\varepsilon)})(t) - (V \circ \varphi_{y(\varepsilon)})(0) \quad = \quad \int_0^t (V \circ \varphi_{y(\varepsilon)})'(s)\, ds \quad =$$

$$\int_0^t \langle (\nabla V)(\varphi_{y(\varepsilon)}(s)), f(\varphi_{y(\varepsilon)}(s))\rangle\, ds \quad \leq \quad \int_0^t \mu\, ds \quad = \quad \mu t.$$

Für $t \to +\infty$ läuft die Differenz $V(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) - V(y(\varepsilon))$ also gegen $-\infty$. Andererseits aber gilt $\varphi_{y(\varepsilon)}(t) \in A$ für alle $t \geq 0$, und V ist auf der kompakten Menge A beschränkt. Es müsste also für die Menge $\{V(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) \mid t \geq 0\}$ eine endliche untere Schranke gegeben. Der Widerspruch zeigt, dass die Annahme der Stabilität zu Beginn falsch war. □

§ 9. *Parameterabhängige Systeme von Differenzialgleichungen*

Wichtige Grundbegriffe	*Zentrale Ergenisse*
– parameterabhängiges System von DGLs – parameterabhängiges Anfangswertproblem (PAWP) – Lösung eines PAWPs – zugeordnetes parameterunabhängiges AWP	– Korrespondenz zwischen den Lösungen eines PAWPs und den Lösungen des zugeordneten parameterunabhängigen AWPs – Stetigkeit der allgemeinen Lösung

Definition 9.1 Ein ***parameterabhängiges System von Differenzialgleichungen*** ist eine Gleichung der Form

$$y' \quad = \quad f(x,y,\alpha) \quad ,$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n+m}$ bezeichnet, mit $m, n \in \mathbb{N}$. Als ***parameterabhängiges Anfangswertproblem*** (PAWP) bezeichnen wir ein Paar bestehend aus einem parameterabhängigen System von DGLs und einem Punkt $(a,b,\alpha) \in D$.

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^m$ sei $D_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid (x,y,\alpha) \in D\}$, und $f_\alpha : D_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sei definiert durch $f_\alpha(x,y) = f(x,y,\alpha)$. Dann können wir für jeden Punkt $(a,b) \in D_\alpha$ das Anfangswertproblem gegeben durch

$$y' = f_\alpha(x,y) \qquad \text{und} \qquad (a,b)$$

betrachten. Eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ dieses Anfangswertproblems bezeichnen wir dementsprechend auch als Lösung des PAWPs gegeben durch $y' = f(x,y,\alpha)$ und den Punkt $(a,b,\alpha) \in D$.

Definition 9.2 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 9.1 gewählt. Wir sagen, das parameterabhängige System von DGLs ***erfüllt die Standardvoraussetzungen***, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^m$ die oben definierte Funktion $f_\alpha : D_\alpha \to \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem gegeben durch $y' = f_\alpha(x,y)$ und einen Punkt $(a,b) \in D_\alpha$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi_{a,b,\alpha} : I_{a,b,\alpha} \to \mathbb{R}^n$, definiert auf einem offenen Intervall $I_{a,b,\alpha} \subseteq \mathbb{R}$. Wir bezeichnen diese Funktion $\varphi_{a,b,\alpha}$ auch als die eindeutig bestimmte maximale Lösung des PAWPs gegeben durch $y' = f(x,y,\alpha)$ und den Punkt $(a,b,\alpha) \in D$.

Definition 9.3 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 9.1 gewählt. Als das dem PAWP ***zugeordnete parameterunabhängige AWP*** bezeichnen wir das Paar bestehend aus der Gleichung $(y',z') = g(x,y,z)$ und dem Punkt (a,b,α), wobei die Funktion $g : D \to \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben ist durch die beiden Komponenten $g_1 : D \to \mathbb{R}^n$ und $g_2 : D \to \mathbb{R}^m$ mit $g_1(x,y,z) = f(x,y,z)$ und $g_2(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Der folgende Satz zeigt, dass die Lösung von PAWPs im Vergleich zu den bereits früher definierten AWPs keine neuen Schwierigkeiten bereitet.

Satz 9.4 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 9.1 gewählt. Insbesondere sei (a, b, α) ein beliebig vorgegebener Punkt.

(i) Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des PAWPs, dann ist die Funktion $\psi : I \to \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben durch $\psi(t) = (\varphi(t), \alpha)$ eine Lösung des zugeordneten parameterunabhängigen AWPs.

(ii) Ist umgekehrt $\psi : J \to \mathbb{R}^{n+m}$ eine Lösung des zugeordneten parameterunabhängigen AWPs, und bezeichnen $\psi_1 : J \to \mathbb{R}^n$ und $\psi_2 : J \to \mathbb{R}^m$ die Komponenten von ψ, dann ist ψ_1 eine Lösung des ursprünglichen PAWPs.

Beweis: zu (i) Nach Definition gilt zunächst $\psi(a) = (\varphi(a), \alpha) = (b, \alpha)$. Der Graph von ψ durchläuft also den Punkt (a, b, α). Außerdem gilt für alle $t \in I$ jeweils

$$\psi'(t) \quad = \quad (\varphi'(t), 0) \quad = \quad (f(t, \varphi(t), \alpha), 0) \quad = \quad (g_1(t, \varphi(t), \alpha), g_2(t, \varphi(t), \alpha)) \quad = \quad g(t, \psi(t)).$$

zu (ii) Wegen $\psi(a) = (b, \alpha)$ gilt $\psi_1(a) = b$ und $\psi_2(a) = \alpha$. Insbesondere durchläuft der Graph von ψ_1 also den Punkt $(a, b) \in D_\alpha$. Für alle $t \in J$ gilt außerdem

$$\psi'(t) \quad = \quad g(t, \psi(t)) \quad = \quad (g_1(t, \psi_1(t), \psi_2(t)), g_2(t, \psi_1(t), \psi_2(t))) \quad = \quad (f(t, \psi_1(t), \psi_2(t)), 0) \quad ,$$

also $\psi_1'(t) = f(t, \psi_1(t), \psi_2(t))$ und $\psi_2'(t) = 0$. Aus $\psi_2(a) = \alpha$ und $\psi_2'(t) = 0$ für alle $t \in J$ folgt $\psi_2(t) = \alpha$ für alle $t \in J$. Daraus wiederum folgt $\psi_1'(t) = f(t, \psi_1(t), \alpha)$ für alle $t \in J$. □

Im gesamten weiteren Verlauf betrachten wir nun noch parameterabhänige Systeme, die die Standardvoraussetzungen erfüllen, ohne jedes Mal explizit darauf hinzuweisen. Die Funktion $g : D \to \mathbb{R}^{n+m}$ aus Definition 9.3 genügt im Allgemeinen keiner lokalen Lipschitz-Bedingung. Dennoch gilt

Folgerung 9.5 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 9.1 gewählt, und sei $(y', z') = g(x, y, z)$ das zugeordnete parameterunabhängige System von DGLs wie in Definition 9.3. Dann besitzt das AWP gegeben durch dieses System und einen beliebig gewählten Punkt $(a, b, \alpha) \in D$ jeweils eine eindeutig bestimmte maximale Lösung.

Beweis: Sei $(a, b, \alpha) \in D$ vorgegeben und $\varphi : I_{a,b,\alpha} \to \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung von $y' = f(x, y, \alpha)$ durch den Punkt (a, b). Nach Satz 9.4 (i) ist dann $\psi : I_{a,b,\alpha} \to \mathbb{R}^{n+m}$, $t \mapsto (\varphi(t), \alpha)$ eine Lösung von $(y', z') = g(x, y, z)$ durch (a, b, α). Nehmen wir nun an, diese Lösung wäre nicht maximal, und es gäbe eine Fortsetzung $\tilde{\psi} : J \to \mathbb{R}^{n+m}$ auf ein Intervall $J \supsetneq I_{a,b,\alpha}$. Sei $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ die Zerlegung in die Komponenten $\tilde{\psi}_1 : J \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\psi}_2 : J \to \mathbb{R}^m$. Dann würde man nach Satz 9.4 $\tilde{\psi}_1$ eine Lösung von $y' = f(x, y, \alpha)$ durch (a, b) erhalten. Aber dies würde der Maximalität der Lösung φ widersprechen. □

Am Anfang von § 8 haben wir den Fluss eines Systems $y' = f(x,y)$ eingeführt, das durch eine Funktion f mit lokaler Lipschitz-Bedingung definiert ist. Wir dehnen diese Definition auf den parameterabhängigen Fall aus, in dem wir eine Funktion $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ auf der Menge

$$\mathcal{D} \quad = \quad \{(t,a,b,\alpha) \in \mathbb{R} \times D \mid t \in I_{a,b,\alpha}\} \ \subseteq \ \mathbb{R}^{2+n+m}$$

durch $\Phi(t,a,b,\alpha) = \varphi_{a,b,\alpha}(t)$ definieren. Dabei bezeichnet $\varphi_{a,b,\alpha} : I_{a,b,\alpha} \to \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung von $y' = f(x,y,\alpha)$ durch den Punkt (a,b).

Das dem System $y' = f(x,y,\alpha)$ zugeordnete parameterunabhängige System $(y',z') = g(x,y,z)$ mit $g : D \to \mathbb{R}^{n+m}$ genügt zwar im Allgemeinen keiner lokalen Lipschitz-Bedingung, dennoch existiert nach Folgerung 9.5 durch jeden Punkt $(a,b,\alpha) \in D$ jeweils eine eindeutig bestimmte maximale Lösung, die wir mit $\psi_{(a,b,\alpha)}$ bezeichnen.

Zur Vereinfachung der Notation fassen wir $(b,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ zu einem Parameter $c \in \mathbb{R}^{n+m}$ zusammen und bezeichnen die eindeutig bestimmte maximale Lösung durch $(a,c) \in D$ mit $\psi_{(a,c)}$. An Stelle von $(y',z') = g(x,y,z)$ schreiben wir das parameterunabhängige System auch wieder in der einfacheren Form $y' = g(x,y)$, wobei y nun als Element von $\mathbb{R}^{n+m}$, und nicht mehr von $\mathbb{R}^n$, zu interpretieren ist. Die Existenz der eindeutig bestimmten maximalen Lösungen erlaubt es uns, auch dem parameterunabhängigen System einen Fluss zuzuordnen. Der Definitionsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{2+n+m}$ ist derselbe wie der des parameterabhängigen Flusses, und der Fluss selbst ist definiert durch

$$\Psi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{n+m} \quad , \quad (t,a,c) \mapsto \psi_{a,c}(t).$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren und beweisen.

Satz 9.6 Sei $y' = f(x,y,\alpha)$ ein parameterabhängiges System wie in Definition 9.1, das den Standardvoraussetzungen genügt. Sei $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ der zugeordnete Fluss. Dann ist $\mathcal{D}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2+n+m}$, und die Funktion Φ ist stetig.

Beweis: An Stelle des parameterabhängigen Systems betrachten wir das zugeordnete parameterunabhängige System $y' = g(x,y)$. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}$ des Flusses $\Psi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{n+m}$ ist, wie wir bereits oben festgestellt haben, derselbe. Ferner genügt es, die Stetigkeit von Ψ nachzuweisen, denn aus Satz 9.4 ergibt sich unmittelbar, dass Φ durch die erste Komponente von $\Psi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gegeben ist. Wir formulieren nun zwei Hilfsaussagen, die wir weiter unten beweisen und aus der wir unseren Satz zunächst ableiten. Wie zuvor bezeichet $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n+m}$ den Definitionsbereich der definierenden Funktion g. Außerdem führen wir die folgende Notation ein: Für beliebige $\tau, r \in \mathbb{R}^+$ und jeden Punkt $(a,c) \in D$ setzen wir $Z_{\tau,r}(a,c) = [a-\tau, a+\tau] \times \bar{B}_r(c)$ und nennen eine solche Menge eine *Zylinderumgebung* von (a,c) in $\mathbb{R}^{1+n+m}$. Außerdem setzen wir

$$\hat{Z}_{\tau,r}(a,c) \quad = \quad [a-\tau, a+\tau] \times Z_{\tau,r} \quad = \quad [a-\tau, a+\tau] \times [a-\tau, a+\tau] \times \bar{B}_r(c).$$

Dies ist eine Zylinderumgebung von (a,a,c) in $\mathbb{R}^{2+n+m}$.

1. Hilfsaussage:

Zu jedem Punkt $(a,c) \in D$ gibt es positive Zahlen $\tau, r \in \mathbb{R}^+$ mit $Z_{\tau,r}(a,c) \subseteq Z_{\tau,2r}(a,c) \subseteq D$ und der Eigenschaft, dass für alle $(b,d) \in Z_{\tau,r}(a,c)$ die Lösung $\psi_{b,d}$ auf dem Intervall $[a-\tau, a+\tau]$ existiert und $\|\psi_{b,d}(t) - c\| < 2r$ für alle $t \in [a-\tau, a+\tau]$ gilt, die Lösung also insbesondere die Zylinderumgebung $Z_{\tau,2r}(a,c)$ nicht verlässt.

2. Hilfsaussage:

Zu jedem Punkt $(a,a,c) \in \mathcal{D}$ gibt es $\tau, r \in \mathbb{R}^+$, so dass die Zylinderumgebung $\hat{Z}_{\tau,r}(a,c)$ in $\mathcal{D}$ enthalten und der Fluss Ψ auf dieser Zylinderumgebung stetig ist.

Wir zeigen nun als erstes, wie unser Satz aus diesen beiden Hilfsaussagen folgt. Es sei $\mathcal{U}$ das System aller offenen Teilmengen $U \subseteq \mathcal{D}$ mit der Eigenschaft, dass $\Psi|_U$ stetig ist. Unser Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die Vereinigung $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ mit der gesamten Menge $\mathcal{D}$ übereinstimmt.

Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist, und dass (t_0, a_0, c_0) ein Punkt in $\mathcal{D} \setminus V$ ist. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass $t_0 > a_0$ gilt. Denn für $t_0 < a_0$ läuft die nachfolgende Argumentation vollkommen analog, und der Fall $t_0 = a_0$ ist ausgeschlossen, denn auf Grund der 2. Hilfsaussage ist Ψ auf einer Umgebung von (a_0, a_0, c_0) stetig. Nach Definition von $\mathcal{D}$ ist (a_0, c_0) in D enthalten, und es gilt $t_0 \in J_{a_0,c_0}$, wobei J_{a_0,c_0} das Definitionsintervall der maximalen Lösung ψ_{a_0,c_0} bezeichnet. Es gilt dann auch $(t, a_0, c_0) \in \mathcal{D}$ für alle $t \in [a_0, t_0]$. Wir definieren nun

$$t^* \quad = \quad \inf\{t \in [a_0, t_0] \mid (t, a_0, c_0) \in \mathcal{D} \setminus V\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist nichtleer wegen $(t_0, a_0, c_0) \in \mathcal{D} \setminus V$. Wegen $(a_0, a_0, c_0) \in V$ und der Offenheit von V gilt $t^* \in]a_0, t_0]$, und auf Grund der Offenheit von V muss auch $(t^*, a_0, c_0) \in \mathcal{D} \setminus V$ gelten. Unser Ziel besteht darin, andererseits auch $(t^*, a_0, c_0) \in V$ herzuleiten und auf diese Weise einen Widerspruch zu erhalten.

Wegen $[a_0, t_0] \subseteq J_{a_0,c_0}$ gilt auch $t^* \in J_{a_0,c_0}$, und daraus folgt $(t^*, \psi_{a_0,c_0}(t^*)) \in D$. Auf Grund der 2. Hilfsaussage finden wir $\tau, r \in \mathbb{R}^+$, so dass die Zylinderumgebung $\hat{Z}_{\tau,r}(t^*, \psi_{a_0,c_0}(t^*))$ in $\mathcal{D}$ enthalten und Ψ auf dieser Zylinderumgebung stetig ist. Somit ist insbesondere für jeden Punkt $a \in [t^* - \tau, t^* + \tau]$ die Abbildung

$$\delta_a : [t^* - \tau, t^* + \tau] \times \bar{B}_r(\psi_{a_0,c_0}(t^*)) \to \mathbb{R}^{n+m} \quad , \quad (t,c) \mapsto \psi_{a,c}(t) \quad \text{stetig.}$$

Wir wählen nun einen Punkt $\tilde{t} \in]\max\{a_0, t^* - \tau\}, t^*[$ mit $\psi_{a_0,c_0}(\tilde{t}) \in B_r(\psi_{a_0,c_0}(t^*))$. Dies ist möglich, da auf Grund der Stetigkeit der Lösung ψ_{a_0,c_0} die Gleichung

$$\lim_{t \to t^*} \psi_{a_0,c_0}(t) \quad = \quad \psi_{a_0,c_0}(t^*) \quad \text{gilt.}$$

Wegen $\tilde{t} < t^*$ und auf Grund der Definition von t^* als Infimum gilt $(\tilde{t}, a_0, c_0) \in V$. Aus der Definition von V ergibt sich, dass Ψ auf einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathcal{D}$ von $(\tilde{t}, a_0, c_0)$ stetig ist. Seien $\nu, \rho \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $\{\tilde{t}\} \times Z_{\nu,\rho}(a_0, c_0)$ in U enthalten ist. Wegen $\psi_{a_0,c_0}(\tilde{t}) \in B_r(\psi_{a_0,c_0}(t^*))$ erhalten wir nach eventueller Verkleinerung von ν, ρ eine stetige Abbildung $Z_{\nu,\rho}(a_0, c_0) \to B_r(\psi_{a_0,c_0}(t^*))$, $(a,c) \mapsto \psi_{a,c}(\tilde{t})$. Wir erweitern diese zu einer Abbildung

$$\gamma :]t^* - \tau, t^* + \tau[\times]a_0 - \nu, a_0 + \nu[\times B_\rho(c_0) \to]t^* - \tau, t^* + \tau[\times B_r(\psi_{a_0,c_0}(t^*)) \quad , \quad (t,a,c) \mapsto (t, \psi_{a,c}(\tilde{t})).$$

Wir betrachten nun die Menge $\tilde{Z} =]t^* - \tau, t^* + \tau[\times]a_0 - \nu, a_0 + \nu[\times B_\rho(c_0)$. Für alle $(t,a,c) \in \tilde{Z}$ gilt $\psi_{a,c}(t) = \psi_{\tilde{t},\psi_{a,c}(\tilde{t})}(t)$, denn $\psi_{a,c}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung mit dem Wert $\psi_{a,c}(\tilde{t})$ an der Stelle $\tilde{t}$. Dies zeigt insbesondere, dass $\tilde{Z}$ in $\mathcal{D}$ enthalten ist. Für diese Punkte $(t,a,c) \in \tilde{Z}$ erhalten wir nun

$$(\delta_{\tilde{t}} \circ \gamma)(t,a,c) \quad = \quad \delta_{\tilde{t}}(t, \psi_{a,c}(\tilde{t})) \quad = \quad \psi_{\tilde{t},\psi_{a,c}(\tilde{t})}(t) \quad = \quad \psi_{a,c}(t) \quad = \quad \Psi(t,a,c).$$

Dies zeigt, dass $\tilde{Z}$ eine offene Umgebung von (t^*, a_0, c_0) ist, auf der der Fluss Ψ stetig ist. Es folgt der gewünschte Widerspruch $(t^*, a_0, c_0) \in V$.

Beweis der 1. Hilfsaussage:

Sei $(a,c) \in D$ vorgegeben. Auf Grund der Offenheit von D gibt es $\tau, r \in \mathbb{R}^+$ mit $Z_{\tau,r}(a,c) \subseteq Z_{\tau,2r}(a,c) \subseteq D$. Zu zeigen ist, dass für alle $(b,d) \in Z_{\tau,r}(a,c)$ die Lösung $\psi_{b,d}$ auf dem Intervall $[a-\tau, a+\tau]$ existiert und $\|\psi_{b,d}(t)-c\| < 2r$ für alle $t \in [a-\tau, a+\tau]$ erfüllt ist. Auf Grund der Stetigkeit von g und der Kompaktheit von $Z_{\tau,2r}(a,c)$ existiert $M = \sup\{|f(x,y)| \mid (x,y) \in Z_{\tau,2r}(a,c)\}$ in $\mathbb{R}_+$. Nach eventueller Verkleinerung von τ können wir $2\tau M < r$ voraussetzen.

Nehmen wir nun an, es gibt ein Paar (b,d) in $Z_{\tau,r}(a,c)$, für dass entweder das Lösungsintervall $J_{b,d}$ nicht das gesamte Intervall $[a-\tau, a+\tau]$ umfasst, oder die Bedingung $\|\psi_{b,d}(t)-c\| < 2r$ nicht auf dem gesamten Intervall erfüllt ist. Dann gibt es in beiden Fällen ein $\bar{t} \in [a-\tau, a+\tau]$ mit $\|\psi_{b,d}(\bar{t})-c\| \geq 2r$, im ersten Fall auf Grund des Randverhaltens maximaler Lösungen, siehe Satz 3.14. O.B.d.A. setzen wir $\bar{t} > b$ voraus, da im Fall $\bar{t} < b$ die Argumentation analog verläuft, und der Fall $\bar{t} = b$ wegen $\psi_{b,d}(b) = d$ und $\|d-c\| \leq r$ ausgeschlossen ist.

Weil die Funktion $\psi_{b,d}$ auf ihrem Definitionsintervall stetig ist, existiert ein $t^* \in]b, \bar{t}]$ mit $\|\psi_{b,d}(t^*)-c\| = 2r$ und $\|\psi_{b,d}(t)-c\| < 2r$ für alle $t \in [b, t^*[$. Andererseits gilt für alle $t \in [b, t^*]$ aber $\psi_{b,d}(t)-d = \int_b^t g(s, \psi_{b,d}(s))\, ds$, und wegen $|g(t, \psi_{b,d}(t))| \leq M$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\psi_{b,d}(t^*)-c\| \quad &\leq \quad \|\psi_{b,d}(t^*)-d\| + \|d-c\| \quad \leq \quad \int_b^{t^*} \|g(s, \psi_{b,d}(s))\|\, ds + \|d-c\| \\ &\leq \quad (t^*-b)M + \|d-c\| \quad \leq \quad 2\tau M + r \quad < \quad r+r \quad = \quad 2r \quad , \end{aligned}$$

was zu $\|\psi_{b,d}(t^*)-c\| = 2r$ im Widerspruch steht. Die Annahme der Existenz eines Paares $(b,d) \in Z_{\tau,r}(a,c)$, dass die Aussage nicht erfüllt, war also falsch.

Beweis der 2. Hilfsaussage:

Aus $(a,a,c) \in \mathcal{D}$ folgt $(a,c) \in D$, und auf Grund der 1. Hilfsaussage gibt es $\tau, r \in \mathbb{R}^+$ mit $Z_{\tau,r}(a,c) \subseteq Z_{\tau,2r}(a,c) \subseteq D$ und der Eigenschaft, dass für alle $(b,d) \in Z_{\tau,r}(a,c)$ die Lösung $\psi_{b,d}$ auf dem Intervall $[a-\tau, a+\tau]$ existiert und $\|\psi_{b,d}(t)-c\| < 2r$ für alle $t \in [a-\tau, a+\tau]$ gilt. Sei nun $(t,b,d) \in \hat{Z}_{\tau,r}(a,c)$. Dann gilt $(b,d) \in Z_{\tau,r}(a,c) \subseteq D$, die Lösung $\psi_{b,d}$ ist in t definiert, und folglich gilt $(t,b,d) \in \mathcal{D}$. Damit ist die Inklusion $\hat{Z}_{\tau,r}(a,c) \subseteq \mathcal{D}$ nachgewiesen.

Um zu zeigen, dass Ψ auf $\hat{Z}_{\tau,r}(a,c)$ stetig ist, sei $(t_0,b_0,d_0) \in \hat{Z}_{\tau,r}(a,c)$ vorgegeben und (t_j,b_j,d_j) eine Folge in $\hat{Z}_{\tau,r}(a,c)$ mit $\lim_j (t_j,b_j,d_j) = (t_0,b_0,d_0)$. Zu zeigen ist $\lim_j \Psi(t_j,b_j,d_j) = \Psi(t_0,b_0,d_0)$, was gleichbedeutend mit $\lim_j \psi_{b_j,d_j}(t_j) = \psi_{b_0,d_0}(t_0)$ ist. Dafür wiederum genügt es, die Aussage

$$\lim_{j\to\infty} \psi_{b_j,d_j}(t) \;=\; \psi_{b_0,d_0}(t) \quad \forall\, t \in [a-\tau, a+\tau] \tag{9.1}$$

nachzuweisen. Sind nämlich $t, t' \in [a-\tau, a+\tau]$ mit $t \leq t'$ vorgegeben und ist $M \in \mathbb{R}^+$ eine obere Schranke der Funktion $(b,d) \mapsto \|g(b,d)\|$ eingeschränkt auf die kompakte Teilmenge $Z_{\tau,2r}(a,c)$ von D, dann gilt für alle $(b,d) \in Z_{\tau,2r}(a,c)$ jeweils die Abschätzung $\|\psi_{b,d}(t')-\psi_{b,d}(t)\| \leq \int_t^{t'} \|g(s, \psi_{b,d}(s))\|\, ds \leq M(t'-t)$, und somit für alle $j \in \mathbb{N}$ jeweils

$$\begin{aligned} \|\psi_{b_j,d_j}(t_j)-\psi_{b_0,d_0}(t_0)\| \quad &\leq \quad \|\psi_{b_j,d_j}(t_j)-\psi_{b_j,d_j}(t_0)\| \;+\; \|\psi_{b_j,d_j}(t_0)-\psi_{b_0,d_0}(t_0)\| \\ &\leq \quad M|t_j-t_0| \;+\; \|\psi_{b_j,d_j}(t_0)-\psi_{b_0,d_0}(t_0)\| \quad , \end{aligned}$$

und nach (9.1) läuft nicht nur der erste, sondern auch der zweite Summand für $j \to \infty$ gegen null.

Wir beweisen nun die Aussage (9.1), indem wir das Gegenteil annehmen und einen Widerspruch herleiten. Auf Grund dieser Annahme existiert ein $\bar{t} \in [a-\tau, a+\tau]$, ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und Teilfolgen $(b_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(d_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|\psi_{b_{j_k},d_{j_k}}(\bar{t}) - \psi_{b_0,d_0}(\bar{t})\| \geq \varepsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{9.2}$$

Setzen wir $h_k(t) = \psi_{b_{j_k},d_{j_k}}(t)$ für alle $t \in [a-\tau, a+\tau]$, dann ist $\mathcal{F} = \{h_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ wegen $\|\psi_{b_j,d_j}(t) - c\| < 2r$ (siehe oben) eine beschränkte Familie in $\mathcal{C}([a-\tau, a+\tau])$, die wegen $\|\psi_{b,d}(t_2) - \psi_{b,d}(t_1)\| \leq M|t_2 - t_1|$ für alle $t_1, t_2 \in [a-\tau, a+\tau]$ auch gleichgradig stetig ist. Auf Grund des Satzes 4.20 von Arzela-Ascoli ist der Abschluss von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}([a-\tau, a+\tau])$ bezüglich der Maximumsnorm kompakt. Es gibt also eine Teilfolge $(h_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$, die bezüglich der Maximumsnorm, also gleichmäßig, gegen $h \in \mathcal{C}([a-\tau, a+\tau])$ konvergiert. Wir zeigen, dass $h = \psi_{b_0,d_0}$ gilt und erhalten auf diese Weise einen Widerspruch zu (9.2). Weil h_{k_ℓ} jeweils eine Lösung des Systems $y' = g(x,y)$ durch den Punkt $(b_{j_{k_\ell}}, d_{j_{k_\ell}})$ ist, gilt für alle $t \in [a-\tau, a+\tau]$ jeweils die Gleichung

$$h_{k_\ell}(t) \quad = \quad d_{j_{k_\ell}} + \int_{b_{j_{k_\ell}}}^{t} g(s, h_{k_\ell}(s))\, ds.$$

Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz von $(h_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ gegen h und der gleichmäßigen Stetigkeit von g auf dem Kompaktum $Z_{\tau,2r}(a,c) \subseteq D$ konvergiert $t \mapsto g(t, h_{k_\ell}(t))$ auf $[a-\tau, a+\tau]$ gleichmäßig gegen $t \mapsto g(t, h(t))$. Durch den Grenzübergang $\ell \to \infty$ erhalten wir die Identität $h(t) = d_0 + \int_{b_0}^{t} g(s, h(s))\, ds$ für alle $t \in [a-\tau, a+\tau]$. Also ist h eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = g(x,y)$ und (b_0, d_0). Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt die Übereinstimmung $h = \varphi_{b_0,d_0}$ auf dem Intervall $[a-\tau, a+\tau]$. Die Funktionenfolge $(h_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert also auf diesem Intervall gleichmäßig gegen φ_{b_0,d_0}, und insbesondere gilt

$$\|\psi_{b_{j_{k_\ell}},d_{j_{k_\ell}}}(\bar{t}) - \psi_{b_0,d_0}(\bar{t})\| \quad = \quad \|h_{k_\ell}(\bar{t}) - \psi_{b_0,d_0}(\bar{t})\| \quad < \quad \varepsilon$$

für hinreichend großes ℓ. Aber dies steht zu (9.2) im Widerspruch. □

Ausblick: Parameterabhängige Systeme und Verzweigung von Ruhelagen

Ein zentrales Anliegen bei der Untersuchung parameterabhängiger Systeme von Differenzialgleichungen ist das Verhalten der Ruhelagen in Abhängigkeit vom Parameter. Um einen ersten Einblick in solche Untersuchungen zu erhalten, konzentrieren auf die einfachste Situation, nämlich den Fall eindimensionaler Systeme. Häufig lässt sich in parameterunabhängigen Systemen der Dimension 1 die Stabilität von Ruhelagen durch das folgende Kriterium ermitteln.

Satz 9.7 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei $c \in I$ eine Ruhelage des Systems $y' = f(y)$.

(i) Existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subseteq I$, so dass $f(y) > 0$ für alle $y \in]c-\varepsilon, c[$ und $f(y) < 0$ für alle $y \in]c, c+\varepsilon[$ gilt, dann ist c asymptotisch stabil.

(ii) Existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subseteq I$ derart, dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

(1) $f(y) < 0$ für $y \in]c-\varepsilon, c[$, $f(y) > 0$ für $y \in]c, c+\varepsilon[$

(2) $f(y) < 0$ für $y \in]c-\varepsilon, c[$, $f(y) < 0$ für $y \in]c, c+\varepsilon[$

(3) $f(y) > 0$ für $y \in]c-\varepsilon, c[$, $f(y) > 0$ für $y \in]c, c+\varepsilon[$

dann ist die Ruhelage c instabil.

Beweis: zu (i) Sei $D =]c, c+\varepsilon[$, $p \in D$ und $\varphi_p : J_p \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung der Gleichung $y' = f(y)$ im Definitionsbereich D mit $\varphi_p(0) = p$. Weil $f(\varphi_p(t))$ für alle $t \in J_p$ negativ ist, ist $\varphi_p(t)$ streng monoton fallend. Es sei $T(p) = T(\varphi_p) \subseteq D$ die Trajektorie der Lösung und $\gamma_p = \inf T(p)$. Ist $\gamma_p > c$, dann liegt die Halbtrajektorie $T^+(p)$ in einem kompakten Teilbereich von D. Aus Satz 7.6 folgt dann, dass $+\infty$ das rechte Intervallende von J_p ist. Es gilt dann

$$f(\gamma_p) \quad = \quad \lim_{t \to +\infty} f(\varphi_p(t)) \quad = \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi_p'(t) \quad = \quad 0 \quad ,$$

was zu $f(\gamma_p) < 0$ im Widerspruch steht. Es gilt also $\gamma_p = c$, und folglich ist auch der Grenzwert von $\varphi_p(t)$ für $t \to +\infty$ gleich c. Ebenso zeigt man, dass im Fall $p \in]c-\varepsilon, c[$ der Grenzwert $\varphi_p(t)$ für $t \to +\infty$ gleich c ist. Jede maximale Lösung mit Startwert $p = \varphi_p(0)$ im Intervall $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ läuft also gegen die Ruhelage c. Damit ist c attraktiv, und nach Satz 8.4 darüber hinaus asymptotisch stabil.

zu (ii) Wir beschränken uns auf die Situation (1). Wiederum sei $D =]c, c+\varepsilon[$, $p \in D$ und $\varphi_p : J_p \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung der Gleichung $y' = f(y)$ im Definitionsbereich D mit $\varphi_p(0) = p$. Mit denselben Argumenten folgt aus der Voraussetzung $f(y) > 0$ für alle $y \in D$ diesmal, dass der Grenzwert von $\varphi_p(t)$ gleich $c+\varepsilon$ ist, wenn t gegen das rechte Intervallende von J_p läuft, unabhängig davon, ob Letzteres endlich oder unendlich ist. Es gibt also insbesondere kein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass eine Lösung φ_p mit einem Startwert $p = \varphi_p(0)$ in $]c, c+\delta[$ im Intervall $\left]c, c+\frac{1}{2}\varepsilon\right[$ verbleibt. Dies zeigt, dass die Ruhelage c instabil ist. □

Wir betrachten nun ein parameterabhängiges System

$$y' \quad = \quad f(y, \alpha) \quad ,$$

wobei f eine stetig differenzierbare Funktion bezeichnet, die auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert ist.
Es soll untersucht werden, wie sich die Ruhelagen von $y' = f_\alpha(y)$ in Abhängigkeit von α verhalten.

Definition 9.8 Sei (y_0, α_0) eine Ruhelage des Systems $y' = f_{\alpha_0}(y)$. Existieren offene Intervalle I und J mit $I \times J \subseteq D$, $y_0 \in I$ und $\alpha_0 \in J$, und besitzt das System $y' = f_\alpha(y)$ für jedes $\alpha \in J$ nur eine Ruhelage in I, dann bezeichnet man y_0 als ***unverzweigte*** Ruhelage von $y' = f_{\alpha_0}(y)$.

Wenn dagegen die Anzahl der Ruhelagen in I in Abhängigkeit von $\alpha \in J$ für jede noch so kleine Umgebung $I \times J$ von (y_0, α_0) nicht konstant ist, dann spricht man von einer ***Verzweigung*** der Ruhelage. Um ein konkretes Beispiel für ein solches Verhalten vor Augen zu haben, betrachten wir das parameterabhängige System

$$y' \quad = \quad \alpha y - y^3.$$

Die rechte Seite der Gleichung lässt sich als Produkt $f_\alpha(y) = y(\alpha - y^2)$ schreiben. Daraus ergeben sich in Abhängigkeit von α die folgenden Ruhelagen.

- Für $\alpha = 0$ hat das System $y' = f_\alpha(y)$ genau eine Ruhelage, nämlich $y_0 = 0$. Die Funktion $f_0(y) = -y^3$ ist für $y < 0$ positiv und für $y > 0$ negativ. Auf Grund von Satz 9.7 zeigt dies, dass y_0 eine asymptotisch stabile Ruhelage ist.

- Ebenso besitzt das System für $\alpha < 0$ eine einzige Ruhelage, nämlich $y_\alpha = 0$, die ebenfalls asymptotisch stabil. Der Faktor $\alpha - y^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ negativ, deshalb ist $f_\alpha(y)$ für $y < y_\alpha$ positiv und für $y > y_\alpha$ negativ.

- Für $\alpha > 0$ existieren dagegen drei Ruhelagen, nämlich $y_\alpha^- = -\sqrt{\alpha}$, $y_\alpha = 0$ und $y_\alpha^+ = \sqrt{\alpha}$. Das Vorzeichen von $f_\alpha(y)$ ist für $y < y_\alpha^-$ positiv, für $y_\alpha^- < y < y_\alpha$ negativ, für $y_\alpha < y < y_\alpha^+$ positiv und für $y > y_\alpha^+$ wiederum negativ. Nach Satz 9.7 ist y_α somit eine instabile Ruhelage, und die Ruhelagen $y_\alpha^\pm$ sind asymptotisch stabil.

Ein solches Verzweigungsverhalten wird als ***Heugabel-Verzweigung*** bezeichnet.

Literaturverzeichnis

[Aul10] Bernd Aulbach. *Gewöhnliche Differenzialgleichungen* -. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2010. ISBN: 978-3-827-41492-2.

[BF17] Dominik Bullach und Johannes Funk. *Vorbereitungskurs Staatsexamen Mathematik - Aufgabenbereiche Algebra und Analysis mit umfassenden Lösungen*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2017. ISBN: 978-3-658-18341-7.

[Heu08] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2* -. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008. ISBN: 978-3-835-10208-8.

[Heu13] Harro Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Einführung in Lehre und Gebrauch*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-322-93992-0.

[Rog80] C. A. Rogers. “A Less Strange Version of Milnor’s Proof of Brouwer’s Fixed-Point Theorem”. In: *American Mathematical Monthly* 87.7 (1980), S. 525–527.

[Wal13] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-642-57240-1.