Definition (25.1)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ als elementar konstruierbar aus $\mathcal{P}$, wenn Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}$ mit $p_1 \neq p_2$ und $p_3 \neq p_4$ existieren, so dass auf q eine der folgenden Aussagen zutrifft.

(1) Der Punkt q ist Schnittpunkt der Geraden durch p_1 und p_2 mit der Geraden durch p_3 und p_4, wobei die beiden Geraden aber nicht zusammenfallen.

(2) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit der Geraden durch die Punkte p_3 und p_4.

(3) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit dem Mittelpunkt p_3 durch den Punkt p_4.

Mehrschrittige Konstruktionen

Definition (25.2)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir definieren rekursiv eine Folge $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Teilmengen $\mathcal{P}_n \subseteq \mathbb{R}^2$ durch folgende Vorschrift: Zunächst setzen wir $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$. Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{P}_n$ bereits definiert, dann bezeichen wir mit $\mathcal{Q}$ die Menge der Punkte, die aus $\mathcal{P}_n$ elementar konstruierbar sind, und setzen $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}$. Die Punkte der Menge

$$\mathcal{P}_{\text{con}} \quad = \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

bezeichnen wir dann als die Menge der aus $\mathcal{P}$ konstruierbaren Punkte.

Es ist $\mathcal{P}_{\text{con}}$ die kleinste Obermenge von $\mathcal{P}$, die abgeschlossen unter der elementaren Konstruktion von Punkten ist.

Wichtige geometrische Basiskonstruktionen

I. Konstruktion einer Orthogonalen
durch einen Punkt p_0 einer Geraden g

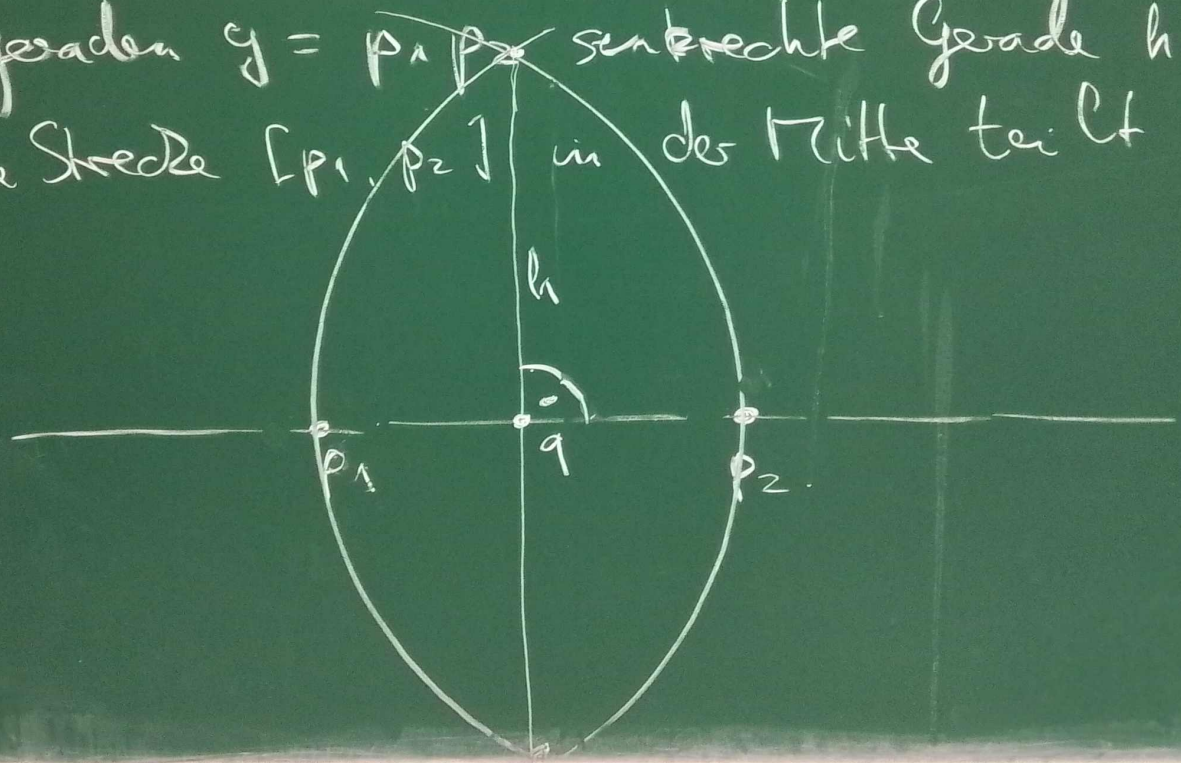
II. Konstruktion einer Parallelen
zu einer Geraden g durch einen Punkt $p_0 \notin g$

- Enthält eine Punktmenge $\mathcal{P}$ die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$, so erhält man die x-Achse, indem man die beiden Punkte verbindet.
- Die Orthogonale zur x-Achse durch den Punkt $(0,0)$ ist dann die y-Achse.

wichtige Basiskonstruktionen

(1) Konstruktion der Mittelsenkrechten

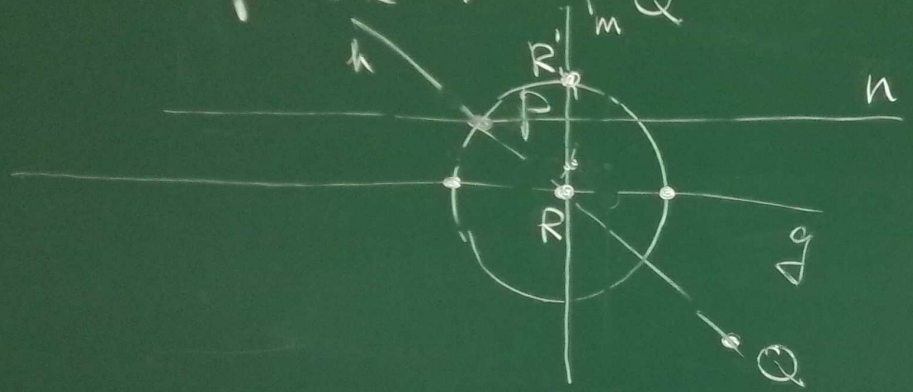
gegeben zwei Punkte $p_1 \neq p_2$. Konstruiere die zur Geraden $g = p_1 p_2$ senkrechte Gerade h, die die Strecke $[p_1, p_2]$ in der Mitte teilt



(2) Konstruktion einer Parallelen zu einer Geraden g durch einen Punkt $P \notin g$

Sei Q ein bel. Pkt $\neq P$

Bilde die Gerade $h = PQ$



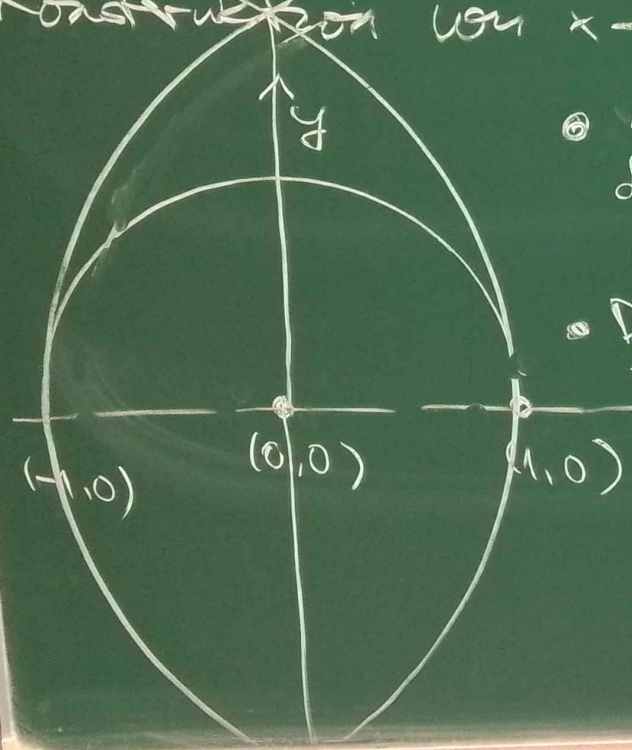
1. Fall: $g \cap h = \emptyset$ Dann ist h bereits die Parallele durch P zu g.

2. Fall: $g \cap h = \{R\}$ Für einen weiteren Pkt R

Bilde wie unter (1) die Mittelsenkrechte der Strecke, die durch die beiden Schnittpunkte des Kreises mit Mittelpunkt R durch P gegeben ist. Konstruiere dann den Kreis mit Mittelpunkt P durch R

$\Rightarrow$ erhalte weiteren Schnittpunkt R' des Kreises mit der Mittelsenkrechten. Bilde dann erneut die Mittelsenkrechte, diesmal von $[R, R']$. Dies ist eine Parallele von g, die durch P verläuft.

Konstruktion von x- und y-Achse



- erhalte $(-1, 0)$ als Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpkt. $(0,0)$ durch $(1,0)$
- Die y-Achse ist die Mittelsenkrechte von $[(0,0), (1,0)]$.

Konstruierbare reelle Zahlen

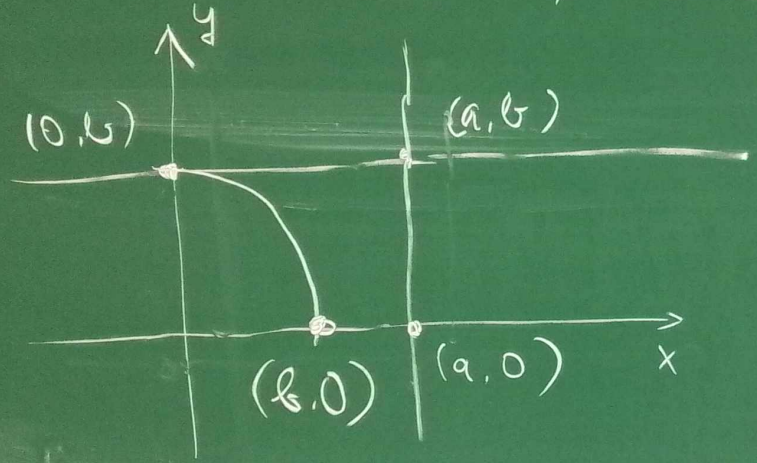
Im weiteren Verlauf sind wir vor allem an einer algebraischen Interpretation von $\mathcal{P}_{\mathrm{con}}$ interessiert. Dazu ordnen wir jeder Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Teilmenge

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \quad = \quad \{x \mid (x,y) \in \mathcal{P}\} \cup \{y \mid (x,y) \in \mathcal{P}\}$$

der reellen Zahlen zu.

Wichtige Beobachtung

Ein Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ liegt genau dann in P_{con}, wenn $(a,0)$ und $(0,b)$ in P_{con} liegen.



Körpereigenschaft der konstruierbaren reellen Zahlen

Satz (25.3)

(i) Ist $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0),(1,0)\}$, dann ist $(\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}})$.

(ii) Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \in (\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$ gilt auch $\sqrt{a} \in (\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$.

$(P_{con})_{\mathbb{R}}$

Sprechweise. Ist $P \subseteq \mathbb{R}^2$, dann bezeichnen wir $(P_{con})_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in P_{con}\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in P_{con}\}$ als die Menge der aus P konstruierbaren reellen Zahlen.

Beweis von Satz 25.3

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $P \supseteq \{(0,0),(1,0)\}$

zzg.: (i) $(P_{con})_{\mathbb{R}}$ ist Zwischenkörper von $\mathbb{R} | \mathbb{Q}(P_{\mathbb{R}})$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}^+ : a \in (P_{con})_{\mathbb{R}} \Rightarrow \sqrt{a} \in (P_{con})_{\mathbb{R}}$

Für (i) und (ii) genügt es zu zeigen, dass für alle $a, b \in (P_{con})_{\mathbb{R}}$ gilt

(1) $-a \in (P_{con})_{\mathbb{R}}$ (2) $a+b \in (P_{con})_{\mathbb{R}}$

Für (i) und (ii) genügt es z.Z., dass

(3) $ab \in (P_{con})_R$ (4) falls $a \in R^+$: $\frac{1}{a} \in (P_{con})_R$

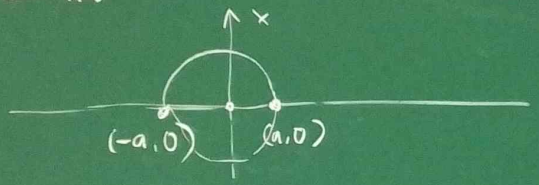
(5) falls $a \in R^+$: $\sqrt{a} \in (P_{con})_R$

dann: Aus (1) bis (5) folgt, dass $(P_{con})_R$ ein Teilkörper von R ist. Dafür zu überprüfen:
$1 \in (P_{con})_R$, und $\forall a,b \in (P_{con})_R$: $a-b \in (P_{con})_R$, $ab \in (P_{con})_R$, $\frac{1}{a} \in (P_{con})_R$ falls $a \neq 0$

Wegen $(1,0) \in P$ gilt $(1,0) \in P_{con}$ und $1 \in (P_{con})_R$.
Dass $a-b$ in $(P_{con})_R$ liegt, folgt direkt aus (1), (2).
Dass $ab \in (P_{con})_R$ gilt, folgt aus (3)
Dass a^{-1} auch im Fall $a \in R \setminus \{0\}$ in $(P_{con})_R$ liegt, und nicht nur im Fall $a \in R^+$, folgt aus (1) und (5)
Wenn $(P_{con})_R$ ein Teilkörper von R ist, gilt $\mathbb{Q} \subseteq (P_{con})_R$ (weil dies der kleinste Teilkörper von R ist).

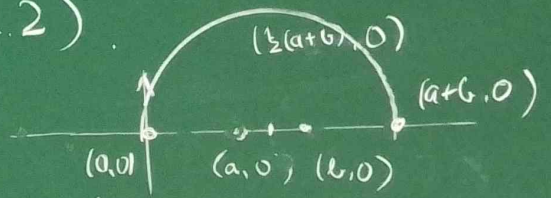
Aus $P \subseteq P_{con}$ folgt $P_{\mathbb{R}} \subseteq (P_{con})_{\mathbb{R}}$. Aus $Q \cup P_{\mathbb{R}} \subseteq (P_{con})_{\mathbb{R}}$ und der Teilkörpereigenschaft folgt $Q(P_{\mathbb{R}}) \subseteq (P_{con})_{\mathbb{R}}$.

zu (1) $a \in (P_{con})_{\mathbb{R}} \Rightarrow (a,0) \in P_{con} \overset{\text{Skizze}}{\Rightarrow} (-a,0) \in P_{con} \Rightarrow -a \in (P_{con})_{\mathbb{R}}$

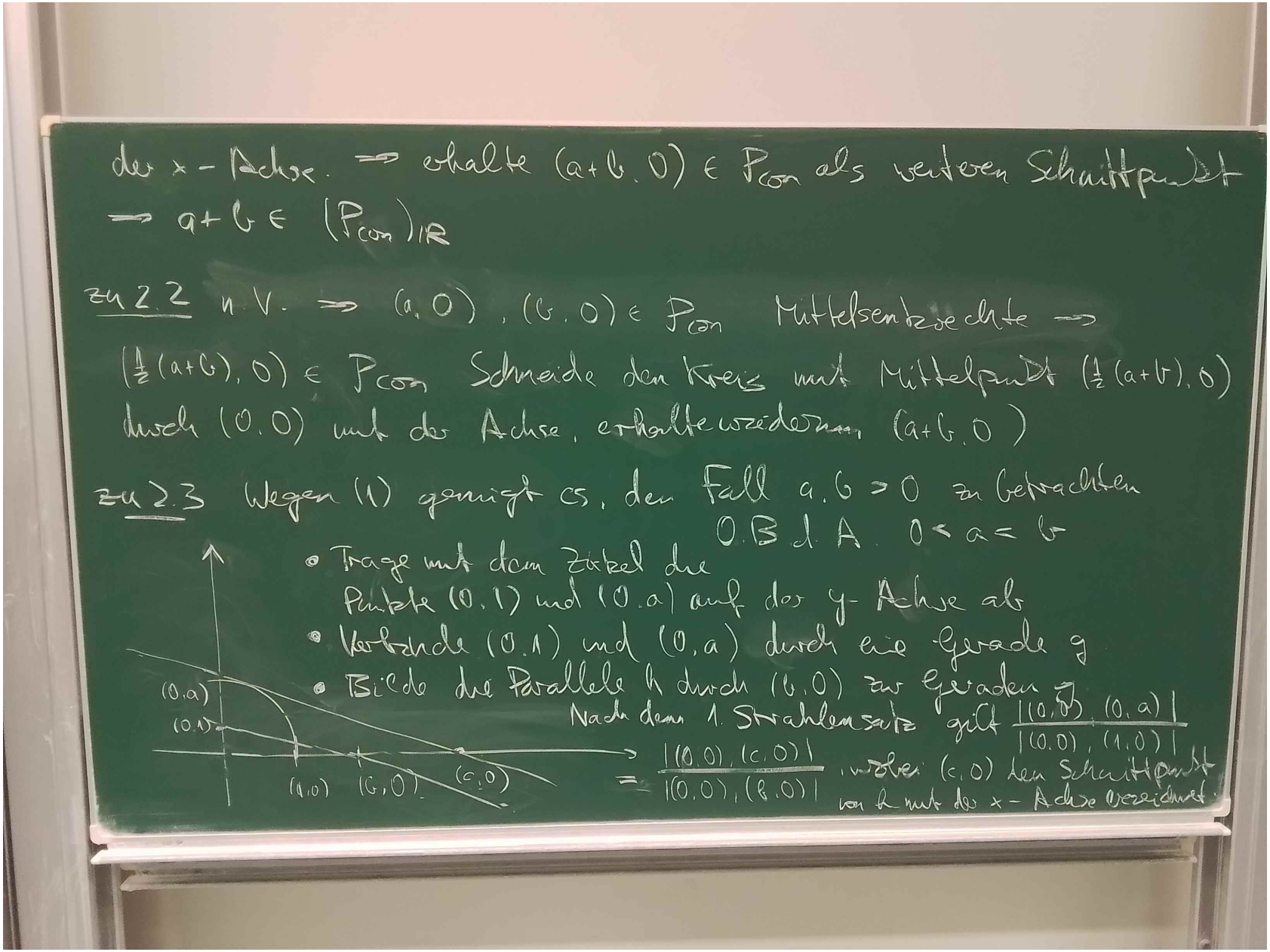


zu (2) Unterscheide die Einzelfälle (2.1) $a,b \geq 0$ (2.2) $a < 0, b \geq 0$
(2.3) $a \geq 0, b < 0$ (2.4) $a, b < 0$ Wegen (1) erhält man (2.4) direkt aus (2.1), und (2.3) aus (2.2).

zu 2.1 o.B.d.A. $0 < a < b$



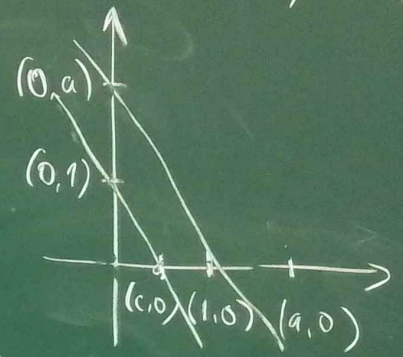
N.V. $\Rightarrow (a,0), (b,0) \in P_{con}$ Mittelsenkrechte $\Rightarrow (\frac{1}{2}(a+b), 0) \in P_{con}$
Schneide den Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}(a+b), 0)$ durch $(0,0)$ mit



Korrektur: ersetze „zu 2.3“ durch „zu (3)“

$\rightarrow \frac{a}{1} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = ab \Rightarrow (ab, 0) \in P_{con} \Rightarrow ab \in (P_{con})_R$

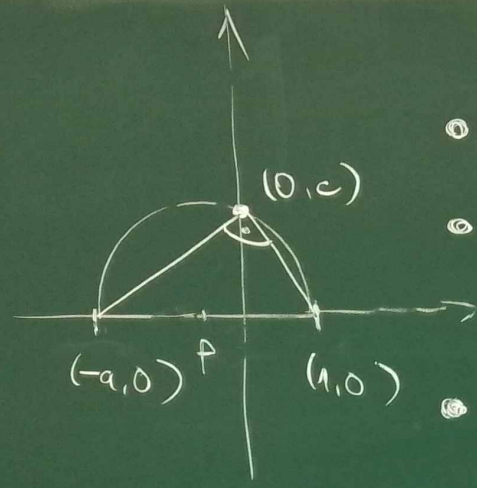
zu (4) Setze $a \in \mathbb{R}^+$ voraus.



- Trage (0,1), (0,a) auf der y-Achse ab
- Verbinde (1,0) und (0,a) durch eine Gerade g
- Sei h die Parallele zu g durch (1,0)

Bezeichne mit (c,0) den Schnittpunkt mit der x-Achse. 1. Strahlensatz $\Rightarrow \frac{|(0,0),(0,a)|}{|(0,0),(0,1)|} = \frac{|(0,0),(1,0)|}{|(0,0),(c,0)|} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{a} \Rightarrow (\frac{1}{a}, 0) \in P_{con} \rightarrow \frac{1}{a} \in (P_{con})_R$

Zu (5)



$P = (\frac{1}{2}(1-a), 0)$

- Trage $(-a,0)$ auf x-Achse ab.
- Mittelsenkrechte $\Rightarrow$ erhalte $(\frac{1}{2}(1-a), 0) =: P$.
- Bilde den Kreis mit Mittelpunkt P durch $(1,0)$ und $(-a,0)$
- Bilde den Schnittpunkt $(0,c)$ des Kreises mit der y-Achse.
- Satz des Thales $\rightarrow$ $(-a,0)$, $(0,c)$, $(1,0)$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck

Seitenlängen: Hypothenuse $1+a$, Katheten $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+1}$ Satz des Pythagoras $\Rightarrow$

$(a^2+c^2) + c^2 + 1 = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$

$\Rightarrow 2c^2 = 2a \rightarrow c = \sqrt{a} \Rightarrow (0,\sqrt{a}) \in P_{con} \Rightarrow \sqrt{a} \in (P_{con})_R$