Aufgabe F19T1A3 (12 Punkte)

Gegeben sind der Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und die multiplikative Funktion $N : R \to \mathbb{N}_0$, $N(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2$. (Die Multiplikativität von N muss nicht gezeigt werden.)

(a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$ von R.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element $a + b\sqrt{-3}$ mit $N(a + b\sqrt{-3}) = 4$ irreduzibel ist.

(c) Ist R ein faktorieller Ring? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

zu (a) Wir zeigen, dass $R^\times = \{\pm 1\}$ gilt. Offenbar sind 1 und -1 Einheiten von R, denn es gilt $1 \cdot 1 = 1$ und $(-1)(-1) = 1$; beide Elemente besitzen in R also ein multiplikatives Inverses. Sei nun $\varepsilon = a + b\sqrt{-3}$ ein beliebiges Element von $R^\times$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $\gamma \in R$ mit $\gamma\varepsilon = 1$. Weil N multiplikativ ist, folgt $N(\gamma)N(\varepsilon) = N(\gamma\varepsilon) = N(1) = 1$. Das Produkt zweier Zahlen in $\mathbb{N}_0$ kann nur dann 1 ergeben, wenn beide Faktoren gleich 1 sind. Also gilt insbesondere $N(\varepsilon) = 1$ und somit $a^2 + 3b^2 = 1$. Es folgt $b = 0$ und $a^2 = 1$, also $a \in \{\pm 1\}$ und damit auch $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

zu (b) Sei $\gamma = a + b\sqrt{-3}$ ein Element mit $N(\gamma) = 4$. Zunächst einmal ist γ dann keine Einheit, denn nach Teil (a) sind ± 1 die einzigen beiden Einheiten, und es gilt $N(1) = N(-1) = 1$. Für den Nachweis der Irreduzibilität seien nun $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha\beta = \gamma$ vorgegeben; zu zeigen ist $\alpha \in R^\times$ oder $\beta \in R^\times$. Nehmen wir an, dass weder α noch β eine Einheit ist. Dann gilt $N(\alpha) > 1$ und $N(\beta) > 1$. Zusammen mit $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) = N(\gamma) = 4$ (und der Ganzzahligkeit von $N(\alpha), N(\beta)$) folgt daraus $N(\alpha) = N(\beta) = 2$. Schreiben wir $\alpha = a + b\sqrt{-3}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, dann gilt also $a^2 + 3b^2 = 2$. Aber dies ist unmöglich, denn im Fall $b \neq 0$ wäre bereits $3b^2 > 2$, und im Fall $b = 0$ wäre $a^2 = 2$, im Widerspruch dazu, dass 2 in $\mathbb{Z}$ kein Quadrat ist. Unsere Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt; folglich ist $\alpha \in R^\times$ oder $\beta \in R^\times$ erfüllt.

zu (c) Wäre R ein faktorieller Ring, dann wäre laut Vorlesung jedes irreduzible Element in R ein Primelement. Wir zeigen, dass R nicht faktoriell sind, indem wir nachweisen, dass 2 in R irreduzibel, aber kein Primelement ist. Die Irreduzibilität folgt mit Teil (b) aus $N(2) = 4$. Nun ist 2 ein Teiler von $4 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$. Wäre 2 ein Primelement, dann müsste 2 einen der beiden Faktoren teilen, also ein Teiler von $1 + \sqrt{-3}$ oder von $1 - \sqrt{-3}$ sein. Es gäbe dann ein $\gamma \in R$ mit $2\gamma = 1 + \sqrt{-3}$ oder $2\gamma = 1 - \sqrt{-3}$. Aber beides ist unmöglich, denn im ersten Fall wäre $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, im zweiten $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Weil die Elemente $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ beide nicht in R enthalten sind (jedes Element $a + b\sqrt{-3}$ aus R besitzt einen ganzzahligen Realteil a), erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme $\gamma \in R$. Also ist 2 kein Primelement in R.