

Definition (8.16)

Sei $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ eine nicht-negative Funktion. Dann bezeichnen wir die Menge

$$A_f = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y < f(x)\}$$

als **Teilmenge unter dem Funktionsgraphen** von f .

Satz (8.17)

Eine nicht-negative Funktion $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ist genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn $A_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^1$ erfüllt ist. In diesem Fall gilt

$$(\mu \otimes \mu_1)(A_f) = \int f \, d\mu.$$

Beweiskizze zu Satz 8.17

- „ \Leftarrow “ Vorausgesetzt ist $A_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ voraus. Daraus folgt $(A_f)_y \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}_+$.
- Man überprüft nun, dass $\Lambda^+(f, y) = (A_f)_y \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}_+$ gilt. Für $y < 0$ gilt $\Lambda^+(f, y) = \Omega \in \mathcal{A}$. Insgesamt folgt daraus die Messbarkeit von f .
- „ \Rightarrow “ Ist f messbar, dann gilt $\Lambda^+(f, \alpha) \times [0, \alpha] \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ insbesondere für alle $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Außerdem gilt

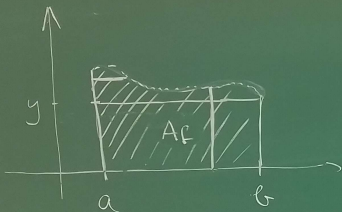
$$A_f = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}^+} (\Lambda^+(f, \alpha) \times [0, \alpha])$$

Als Vereinigung abzählbar vieler Mengen aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ ist dann auch A_f in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ enthalten.

Beweiskizze zu Satz 8.17 (Forts.)

- Wie man leicht überprüft, gilt $(A_f)_x^1 = [0, f(x)[$ für alle $x \in \Omega$. Die Gleichung zwischen Maß und Integral erhält man nun mittels [Satz 8.11](#) durch die Rechnung

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \mu_1)(A_f) &= \int \mu_1(A_f)_x^1 d\mu(x) = \\ \int \mu_1([0, f(x)[) d\mu(x) &= \int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu.\end{aligned}$$

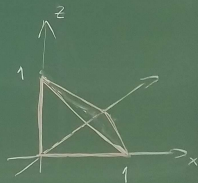


Beispiel: Volumen des Standardsimplex

$$S = \{ (x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z \leq 1 \}$$

Betrachte die Funktion $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 - x - y & x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Überprüfe: $A_f = S$ Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Dann gilt: $(x, y, z) \in A_f \iff (x, y) \in [0, 1]^2 \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)$

$$\iff (x, y) \in [0, 1]^2 \wedge 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

$$\iff 0 \leq x + y + z \leq 1 \text{ und } (x, y) \in [0, 1]^2$$

$$\iff 0 \leq x + y + z \leq 1 \text{ und } (x, y, z) \in [0, 1]^3 \iff (x, y, z) \in S$$

$$\mu_3(S) = \int_{\substack{S \\ \text{mit } z \in [0, 1]^2}} f \, d\mu_z = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



Definition (9.1)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, (Ω', \mathcal{A}') ein Messraum und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine \mathcal{A} - \mathcal{A}' -messbare Abbildung. Dann nennt man die Abbildung $f(\mu) : \mathcal{A}' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ gegeben durch

$$f(\mu)(A') = \mu(f^{-1}(A')) \quad \text{für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

das **Bildmaß** von μ unter f .

Translationsinvariante Maße

Eine bijektive Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die als Komposition einer bijektiven linearen Abbildung mit einer Translation dargestellt werden kann, bezeichnet man als **Affinität**.

Definition (9.2)

Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ wird **translationsinvariant** genannt, wenn $\tau_v(\mu) = \mu$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Ist sogar $\phi(\mu) = \mu$ für jede Bewegung ϕ erfüllt, dann spricht man von einem **bewegungs-invarianten Maß**.

Proposition (9.3)

Das Lebesgue-Borelsche Maß μ_n ist translationsinvariant.

Beweiskizze zu Proposition 9.3

- Man überprüft, dass $\tau_v(\mu_n)(Q) = \mu_n(Q)$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und für jeden Quader Q im \mathbb{R}^n gilt.
- Die Quader bilden ein σ -stabiles Erzeugendensystem der Borelschen σ -Algebra, und μ_n ist σ -endlich. Nach Proposition 4.4 folgt daraus die **Übereinstimmung** von $\tau_v(\mu_n)$ und μ_n .

Lemma (9.4)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge von \mathbb{R} . Dann wird die σ -Algebra \mathcal{B}_n von den Quadern der Form $Q = [a_1, b_1[\times \dots \times [a_n, b_n[$ mit $a_i, b_i \in S$ für $1 \leq i \leq n$ erzeugt.

Satz (9.5)

Sei μ ein translationsinvariantes Maß auf \mathcal{B}_n , und sei $\alpha = \mu([0, 1[^n) \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Dann gilt $\mu = \alpha \mu_n$. Das Lebesgue-Borelsche Maß μ_n ist das **einzigste** translationsinvariante Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ mit $\mu([0, 1[^n) = 1$.

Beweiskizze zu Lemma 9.4

- Zeige, dass die Teilmengen der Form $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > a\}$ mit $a \in S$ als abzählbare Vereinigungen solcher Quader darstellbar sind.
- Zeige anschließend, dass auch für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ eine solche Darstellung existiert.
- Durch Bildung von Komplementen und Durchschnitten erhält man beliebige Quader.
- Diese wiederum erzeugen die σ -Algebra \mathcal{B}_n .

Beweiskizze zu Satz 9.5

- Aus $\mu([0, 1]^n) = \alpha$, der Translationsinvarianz und der endlichen Additivität folgt

$$\mu\left([0, \frac{1}{m}]^n\right) = m^{-n}\alpha \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

- Jeder Quader mit rationalen Koordinaten kann als disjunkte Vereinigung von Translaten von $[0, \frac{1}{m}]^n$ mit $m \in \mathbb{N}$ dargestellt werden. Daraus folgt $\mu(Q) = \alpha\mu_n(Q)$ für solche Quader.
- Nach Lemma 9.4 erzeugen diese Quader die gesamte σ -Algebra \mathcal{B}_n . Daraus folgt, dass μ und $\alpha\mu_n$ auf ganz \mathcal{B}_n übereinstimmen.

Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

Lemma (9.6)

Ist $\mu : \mathcal{B}_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ein translationsinvariantes Maß auf \mathbb{R}^n und ist $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Affinität, dann ist auch $\phi(\mu)$ translationsinvariant.

Beweisskizze:

- Nach Definition der Affinitäten gilt $\phi = \tau_v \circ \psi$ für ein $v \in \mathbb{R}^n$ und eine **invertierbare** lineare Abbildung ψ .
- Sei $w \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist $\tau_w(\phi(\mu)) = \phi(\mu)$. Dies ist gleichbedeutend mit $\mu((\tau_w \circ \phi)^{-1}(A)) = \mu(\phi^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}_n$.
- Durch Einsetzen von ϕ führt dies auf die Gleichung

$$\mu((\tau_{v+w} \circ \psi)^{-1}(A)) = \mu((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A)).$$

Beweis von Lemma 9.6 (Forts.)

- Wir man unmittelbar nachrechnet, gilt

$$\tau_{v+w} \circ \psi = \tau_v \circ \psi \circ \tau_{w'} \quad \text{für } w' = \psi^{-1}(w).$$

Zu zeigen ist also

$$\mu((\tau_v \circ \psi \circ \tau_{w'})^{-1}(A)) = \mu((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A)).$$

- Nach Definition des Bildmaßes ist dies äquivalent zu

$$\tau_{w'}(\mu)((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A)) = \mu((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A)).$$

Nun sieht man, dass die Gleichung direkt aus der Translationsinvarianz von μ folgt.

Satz (9.7)

Das Lebesgue-Borelsche Maß μ_n ist bewegungsinvariant.

Folgerung (9.8)

Jede Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Beweiskizze zu Satz 9.7

- Da die Translationsinvarianz bereits gezeigt wurde, genügt es, die Invarianz unter orthogonalen Abbildungen zu betrachten. Sei also $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung.
- Nach Lemma 9.6 und Satz 9.5 gilt $\phi(\mu_n) = \alpha\mu_n$ für ein $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}_+$.
- Aus der Orthogonalität von ϕ folgt $\phi(B) = B$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel bezeichnet.
- Durch Vergleich mit geeigneten Quadern zeigt man, dass $\mu_n(B)$ endlich und positiv ist.
- Aus $\alpha\mu_n(B) = \phi(\mu_n)(B) = \mu_n(\phi^{-1}(B)) = \mu_n(B)$ folgt deshalb $\alpha = 1$.

Beweiskizze zu Folgerung 9.8

- Die Koordinatenhyperebene gegeben durch $x_1 = 0$ ist abzählbare Vereinigung von Quadern vom **Volumen Null**, nämlich $\{0\} \times [-m, m]^{n-1}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Diese Hyperebene hat also Lebesgue-Maß null.
- Jede beliebige Hyperebene kann durch eine Bewegung in diese Koordinatenhyperebene überführt werden.
- Also folgt die Aussage aus der **Bewegungsinvarianz** des Lebesgue-Borelschen Maßes.

Proposition (9.9)

Ist $D \in GL_n(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen auf der Hauptdiagonalen, dann gilt $\phi_D(\mu_n) = (\det D)^{-1} \mu_n$.

Satz (9.10)

Ist $A \in GL_n(\mathbb{R})$, dann gilt $\phi_A(\mu_n) = |\det A|^{-1} \mu_n$.

Beweiskizze zu Proposition 9.9

- Nach Lemma 9.6 ist $\phi_D(\mu_n)$ translationsinvariant. Nach Satz 9.5 gibt es also ein $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $\phi_D(\mu_n) = \alpha\mu_n$.
- Man überprüft, dass $\alpha = (\det D)^{-1}$ ist, indem man ϕ_D^{-1} auf den Einheitsquader $Q = [0, 1]^n$ anwendet.

Beweiskizze zu Satz 9.10

- Die Matrix $B = {}^tAA$ ist positiv definit und symmetrisch.
- Nach dem [Satz über die Hauptachsentransformation](#) existiert eine ON-Basis (v_1, \dots, v_n) bestehend aus Eigenvektoren von B mit positiven Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- Die Vektoren $u_j = \lambda_j^{-1/2}Av_j$ bilden ebenfalls eine ON-Basis des \mathbb{R}^n , wie man leicht überprüft.
- Sei U die Matrix mit den Vektoren u_1, \dots, u_n als Zeilen, und V die Matrix mit v_1, \dots, v_n als Spalten. Dann gilt $UAV = D$ mit $D = \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2})$.
- Die Gleichung $A = U^{-1}DV^{-1}$ liefert $|\det A| = \det D$ und $\phi_A = \phi_{U^{-1}} \circ \phi_D \circ \phi_{V^{-1}}$ mit den orthogonalen Abbildungen $\phi_{U^{-1}}$ und $\phi_{V^{-1}}$.
- Auf Grund der Bewegungsinvarianz von μ_n folgt $\phi_A(\mu_n) = \phi_D(\mu_n) = (\det D)^{-1}\mu_n$ mit Proposition 9.9.

Würfelvolumenänderung unter Diffeomorphismen

Erinnerung:

Ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$ zwischen zwei offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass sowohl ϕ als auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} in jedem Punkt ihres Definitionsbereich stetig differenzierbar ist.

Lemma (9.11)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen von $0_{\mathbb{R}^n}$ und $\phi : U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus mit $\phi(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $\phi'(0_{\mathbb{R}^n}) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dann gibt es für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ eine Umgebung U_δ von $0_{\mathbb{R}^n}$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $W \subseteq U_\delta$ ein abgeschlossener Würfel mit $0_{\mathbb{R}^n} \in W$, dann gilt

$$\mu_n(\phi(W)) \leq (1 + \delta)\mu_n(W).$$

Beweiskizze zu Lemma 9.11

- Jeder abgeschlossene Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein abgeschlossener Ball bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm auf \mathbb{R}^n .
- Auf Grund der totalen Differenzierbarkeit von ϕ im Nullpunkt existiert eine Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\phi(x) = x + h(x)$ für alle $x \in U$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} \|x\|^{-1} h(x) = 0$.
- Verwende dies, um für vorgegebenes $\delta \in \mathbb{R}^+$ eine geeignete Umgebung U_δ des Nullpunkts zu definieren und $\|\phi(x)\|_\infty$ in Abhängigkeit von $\|x\|_\infty$ abzuschätzen.

Lemma (9.12)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und sei $\phi : U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus mit $|\det \phi'(x)| = 1$ für alle $x \in U$. Dann gilt $\mu_n(\phi(Q)) \leq \mu_n(Q)$ für jeden Quader $Q \subseteq U$.

Beweiskizze zu Lemma 9.12

- Durch Anwendung von ϕ_D für eine geeignete Diagonalmatrix $D \in GL_n(\mathbb{R})$ kann der Beweis für Quader auf Würfel zurückgeführt werden.
- Für einen abgeschlossenen Würfel W führt man den Beweis durch Widerspruch und nimmt an, es gilt $\mu_n(\phi(W)) > (1 + \delta)\mu_n(W)$.
- Durch Halbierung der Würfelkanten findet man einen Teilwürfel mit halber Kantenlänge, der die Ungleichung ebenfalls erfüllt.
- Durch Iteration erhält man erhält man eine Folge immer kleiner Teilwürfel (ähnlich wie beim Beweis des Satzes über die Kompaktheit von Quadern).
- Die topologischen Abschlüsse der Würfel schneiden sich in einem Punkt v (Intervallschachtelungsprinzip).
- Indem man hinreichend kleine Teilwürfel betrachtet, die v enthalten, erhält man einen Widerspruch zu Lemma 9.11.

Lemma (9.13)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und sei $\phi : U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus mit $|\det \phi'(x)| = 1$ für alle $x \in U$. Dann gilt

- (i) $\mu_n^*(\phi(A)) \leq \mu_n^*(A)$ für jede Teilmenge $A \subseteq U$, und
- (ii) $\mu_n(\phi(A)) = \mu_n(A)$ **Borel-messbare** $A \subseteq U$.

Beweiskizze zu Lemma 9.13

- Das äußere Maß erhält man durch Überdeckung von A durch abzählbare Vereinigungen von Figuren.
- Für Figuren ist die Abschätzung nach Lemma 9.13 erfüllt. Auf diese Weise zeigt man die Aussage (i).
- In Teil (ii) erhält man die Ungleichung $\mu_n(\phi(A)) \leq \mu_n(A)$ aus der Tatsache, dass mit A auch $\phi_n(A)$ Borel-messbar ist, und dass bei Lebesgue-messbaren (und insbesondere Borel-messbaren) Teilmengen das Lebesgue-Maß mit dem äußeren Maß übereinstimmt.
- Die Ungleichung $\mu_n(\phi(A)) \leq \mu_n(A)$ erhält man durch Anwendung der bereits bewiesenen Ungleichung auf $B = \phi(A)$ und den \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus ϕ^{-1} .

Satz (9.14)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, und sei $\phi : U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus. Sei $A \subseteq U$ und $B = \phi(A)$. Sei außerdem $f : B \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

- (i) Die Teilmenge A ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn B Lebesgue-messbar ist, und in diesem Fall gilt die Gleichung $\mu_n(B) = \int_A |\det \phi'| d\mu_n(x)$. Genau dann ist A eine (Lebesguesche) Nullmenge, wenn B eine Nullmenge ist.
- (ii) Ist A Lebesgue-messbar, und ist $f \geq 0$ und Lebesgue-messbar, dann gilt

$$\int_B f d\mu_n = \int_A (f \circ \phi) |\det \phi'| d\mu_n. \quad (*)$$

- (iii) Sei A Lebesgue-messbar. Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion f auf B genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \phi) |\det \phi'|$ auf A Lebesgue-integrierbar ist, und es gilt dann ebenfalls die Gleichung (*).

Beweiskizze zu Satz 9.14

- Zunächst beweist man (ii) für Borel-messbares A mit Hilfe von Lemma 9.13 und Satz 8.17 (der die Beziehung zwischen dem Lebesgue-Integral einer Funktion und dem Lebesgue-Maß der Menge unter dem Funktionsgraphen herstellt).
- Durch Anwendung auf die Indikatorfunktion von B erhält man die Aussage (i) für Borel-messbare Mengen.
- Daraus folgt insbesondere, dass für jede Nullmenge N auch $\phi(N)$ eine Nullmenge ist. Damit können (i) und (ii) auf Lebesgue-messbare Mengen ausgedehnt werden.
- Beim Beweis von (iii) ergibt sich die „genau dann“-Aussage zur Integrierbarkeit unmittelbar aus (ii). Die Gleichung (*) erhält man durch Anwendung von (ii) auf f^+ und f^- .

Folgerung (9.15)

- (i) Sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ die **Polarkoordinaten-Abbildung**. Ist $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge und $f : \rho(A) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_{\rho(A)} f \, d\mu_2 = \int_A (f \circ \rho)(r, \varphi) \cdot r \, d\mu_2(r, \varphi).$$

- (ii) Sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, h) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), h)$ die **Zylinderkoordinaten-Abbildung**. Ist $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge und $f : \rho(A) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_{\rho(A)} f \, d\mu_3 = \int_A (f \circ \rho)(r, \varphi, h) \cdot r \, d\mu_3(r, \varphi, h).$$

Folgerung (9.15)

(iii) Sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta))$ die
Kugelkoordinaten-Abbildung. Ist $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$
eine Lebesgue-messbare Teilmenge und $f : \rho(A) \rightarrow \mathbb{R}$ eine
Lebesgue-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_{\rho(A)} f \, d\mu_3 = \int_A (f \circ \rho)(r, \vartheta, \varphi) \cdot r^2 \sin(\vartheta) \, d\mu_3(r, \vartheta, \varphi).$$

Anwendungsbeispiel: Berechnung des Integrals
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

durch Verwendung der Polarkoordinatenabb. ρ

Für $r \in \mathbb{R}^+$ sei $\bar{B}_r \subseteq \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe von Radius r . Es gilt $\rho([0, r] \times [0, 2\pi]) = \bar{B}_r$.

$$\Rightarrow \int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \int_{\rho([0, r] \times [0, 2\pi])} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \quad \quad \quad \uparrow \text{Transf. formel}$$

$$\int_{[0, r] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r d(r, \varphi) = 2\pi \int_0^r r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^r (2r) e^{-r^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} d(r, \varphi) = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{\infty} (2r) e^{-r^2}$$

$$= -\pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -\pi [e^{-t}]_0^{\infty} = \pi(1 - e^{-\infty})$$

Substitutionsregel

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-r}^r e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-r, r]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)$$

$$= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{B}_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y) \stackrel{\text{s.o.}}{=} \lim_{r \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-r^2}) = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$