Definition der vollständigen Maßräume

Definition (4.7)

Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathscr{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Maß. Wir nennen $\mathscr{A}$ vollständig bezüglich μ, wenn jede Teilmenge A einer Menge $B \in \mathscr{A}$ mit $\mu(B) = 0$ ebenfalls in $\mathscr{A}$ enthalten ist. Wir bezeichnen μ in diesem Fall als vollständiges Maß und das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ als vollständigen Maßraum.

Vollständigkeit der Carathéodory-Fortsetzung

Satz (4.8)

Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $\tilde{\mu} : \mathscr{A}_{\mu^*} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das in Satz 3.14 konstruierte zugehörige Maß. Dann ist $(\Omega, \mathscr{A}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Ein Messbarkeitskriterium

Satz (4.9)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das dem Inhalt nach Satz 3.11 zugeordnete äußere Maß. Ist $A \subseteq \Omega$ eine Teilmenge und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{A}$ mit $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \to \infty} \mu^*(A \,\Delta\, A_n) \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann gilt $A \in \mathscr{A}$ und $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Folgerung (4.10)

Jede Jordan-messbare Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ist in $\mathscr{A}_d$ enthalten, und es gilt jeweils $\mu_d(E) = c_d(E)$, d.h. der Jordan-Inhalt stimmt mit dem Lebesgue-Maß von A überein.

Konstruktion der Vervollständigung (Vorbereitung)

Proposition (4.11)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist

$$\bar{\mathscr{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathscr{A}, N \in \mathfrak{P}(\Omega), \exists M \in \mathscr{A} : \mu(M) = 0 \wedge N \subseteq M\}$$

eine σ-Algebra mit $\bar{\mathscr{A}} \supseteq \mathscr{A}$.

Proposition (4.12)

Es gibt auf $\bar{\mathscr{A}}$ eine Funktion $\bar{\mu} : \bar{\mathscr{A}} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $B \in \bar{\mathscr{A}}$, und sind $A, M \in \mathscr{A}$ Mengen mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$ mit $B = A \cup N$, dann gilt $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$.

Beweis von Proposition 4.12

geg.: σ-Algebra $\mathcal{A}$ in einer Menge Ω, μ Maß auf $\mathcal{A}$

$\bar{\mathcal{A}}$ σ-Algebra definiert wie in Prop. 4.11

z.zg.: Es gibt eine Fkt. $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass

$\bar{\mu}(B) = \mu(A)$, falls $B = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$,

wobei eine Menge $M \supseteq N$ mit $M \in \mathcal{A}$ und $\mu(M) = 0$ (*)

existiert

Wähle für jedes $B \in \bar{\mathcal{A}}$ Mengen A_B, M_B, N_B, so dass

$B = A_B \cup N_B$ gilt und auch die übrigen Bed. in (*)

gelten. Definiere dann $\bar{\mu}(B) = \mu(A_B)$

gelten. Definiere dann $\bar{\mu}(B) = \mu(A_B)$

Seien nun $B \in \bar{\mathcal{A}}$ und M, N, A wie unter (*) angeg

<u>Beh</u>: $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$

Satz 3.16 $\Rightarrow$ $\mu^*(A_1) = \mu(A_1) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}$

Wir erhalten $\bar{\mu}(B) = \mu(A_B) = \mu^*(A_B) \leq \mu^*(A_B \cup N_B)$

$= \mu^*(B) = \mu^*(A \cup N) \leq \mu^*(A \cup M) = \underbrace{\mu(A \cup M)}_{A \cup M \in \mathcal{A}}$

$\leq \mu(A) + \mu(M) = \mu(A) + 0 = \mu(A)$

ebenso $\mu(A) = \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cup N) = \mu^*(B) =$

$\mu^*(A_B \cup N_B) \leq \underbrace{\mu(A_B \cup M_B)}_{A_B \cup M_B \in \mathcal{A}} \leq \mu(A_B) + \mu(M_B) =$

$\mu(A_B) + 0 = \bar{\mu}(B)$ insgesamt: $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$ $\square$

Eindeutigkeit der Vervollständigung

Proposition (4.13)

Durch die Funktion $\bar{\mu}$ ist ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathscr{A}}$ definiert.

Man bezeichnet $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mu})$ als Vervollständigung von $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Satz (4.14)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ eine beliebige vollständige Erweiterung. Dann ist $(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ auch eine Erweiterung von $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mu})$.

Beweis von Proposition 4.13

z. zg: (mit den Bezeichnungen wie in Prop. 4.12)
$\bar{\mu}$ ist ein vollständiges Maß

überprüfe: (1) $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$
(2) σ-Additivität von $\bar{\mu}$ (3) Vollständigkeit

<u>zu (1)</u> Es gilt $\overset{B}{\emptyset} = \overset{A}{\emptyset} \cup \overset{N}{\emptyset}$, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und eine Menge $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $M \supseteq \emptyset$ existiert, nämlich $M = \emptyset$. Nach Def. von $\bar{\mu}$ folgt $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

<u>zu (2)</u> Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\bar{\mathcal{A}}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen.

und $B = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es

ein $A_m \in \mathcal{A}$, eine Teilmenge $N_m \subseteq \Omega$ und ein

$M_m \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M_m) = 0$, $M_m \supseteq N_m$, so dass jeweils

$B_m = A_m \cup N_m$. Nach Def. von $\bar{\mu}$ gilt $\bar{\mu}(B_m) =$

$\mu(A_m)$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Sei $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$, $M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$,

$N = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} N_m$. $\mathcal{A}$ - σ-Algebra $\Rightarrow$ $A, M \in \mathcal{A}$

außerdem: $B = A \cup N$, $N \subseteq M$ und

$$\mu(M) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(M_m) = \sum_{m=1}^{\infty} 0 = 0,$$ weil

μ ein Maß und die Vereinigung $M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$

disjunkt ist. Nach Def. von $\bar{\mu}$ folgt

$$\bar{\mu}(B) = \mu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mu}(B_m)$$

<u>zu (B)</u> Sei $B \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $\bar{\mu}(B) = 0$ und $F \subseteq B$.

zzg.: $F \in \bar{\mathcal{A}}$. Schreibe wiederum $B = A \cup N$ mit A, N und $M \supseteq N$ wie oben. $\Rightarrow \bar{\mu}(B) = \mu(A)$ nach Def. von $\bar{\mu}$. $\Rightarrow$

$$0 \leq \mu(A \cup M) \leq \mu(A) + \mu(M) = \mu(A) + 0 = \bar{\mu}(B) = 0 \Rightarrow \mu(A \cup M) = 0$$

$F \subseteq B = A \cup M$. Schreibe $F = \emptyset \cup F$.
Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$, $F \subseteq A \cup M$ mit $A \cup M \in \mathcal{A}$ und $\mu(A \cup M) = 0$. Es folgt $F \in \bar{\mathcal{A}}$. $\square$

Die Carathéodory-Fortsetzung als Vervollständigung

Ein σ-additiver Inhalt auf einem Mengenring wird auch als Prämaß bezeichnet.

Satz (4.15)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring, $\mu : \mathscr{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß und $(\Omega, A_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ der in Satz 3.14 konstruierte Maßraum. Dann ist dieser Maßraum eine Vervollständigung von $(\Omega, \sigma(\mathscr{R}), \tilde{\mu}|_{\sigma(\mathscr{R})})$, wobei $\sigma(\mathscr{R})$ die von $\mathscr{R}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.

Beweis von Satz 4.15:

geg.: Ring R mit einem σ-endlichen Prämaß

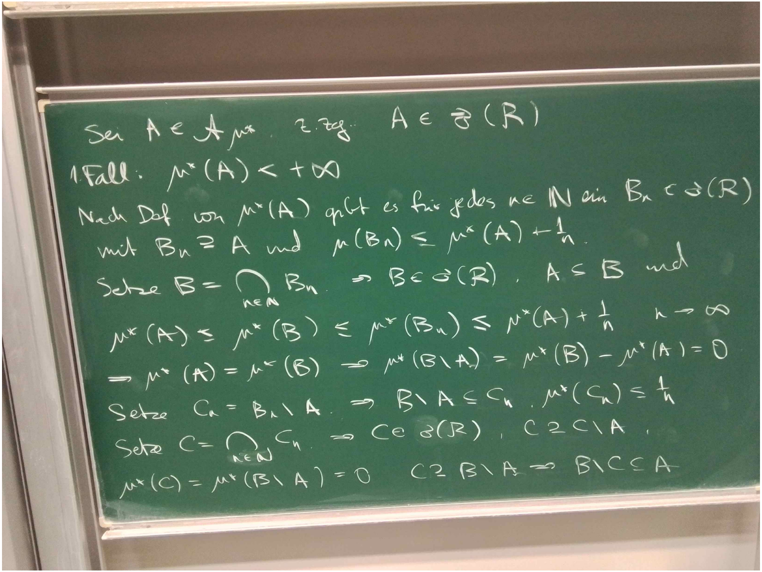
$(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ Maßraum aus Satz 3.14

z.zg.: Dieser Maßraum ist eine Vervollständigung des Maßraums $(\Omega, \sigma(R), \tilde{\mu}|_{\sigma(R)})$

bereits bekannt: $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ ist vollständiger Maßraum (Satz 4.8)

Satz 4.14 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthält die Vervollst. von $\sigma(R)$ bzgl. μ. Bezeichne diese mit $\bar{\sigma}(R)$.

noch z.zg.: $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \bar{\sigma}(R)$



Korrektur Ende vorletzte Zeile: $C \in \sigma(\mathcal{R})$, $C \supseteq B \setminus A$

$\Rightarrow A = (B \setminus C) \cup (A \cap C)$, $B \setminus C \in \sigma(\mathcal{R})$, $A \cap C \subseteq C$

mit $\mu^*(C) = 0$ Daraus folgt $A \in \bar{\sigma}(\mathcal{R})$

2. <u>Fall</u>: $\mu^*(A) = +\infty$ μ ist σ-endlich $\Rightarrow \exists$ Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

in $\mathcal{R}$ mit $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ und $\mu(S_n) < +\infty \;\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap S_n)$ $A \cap S_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, $\mu^*(A \cap S_n) < +\infty$

$\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} A \cap S_n \in \bar{\sigma}(\mathcal{R}) \underset{\sigma\text{-Algebra}}{\overset{\bar{\sigma}(\mathcal{R})}{\Longrightarrow}} A \in \bar{\sigma}(\mathcal{R})$ $\square$

Das Lebesgue-Maß als Vervollständigung

Folgerung (4.16)

Für jedes $d \in \mathbb{N}$ ist der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathscr{A}_d, \mu_d)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_d, \mu_d|_{\mathscr{B}_d})$. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Lebesgue-messbarer Mengen in $\mathbb{R}^d$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu_d^*(A \,\Delta\, A_n) = 0 \quad \text{und} \quad \mu_d(A_n) < +\infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann ist auch A Lebesgue-messbar, und man erhält das Lebesgue-Maß von A durch $\mu_d(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_d(A_n)$.

Regularität des Lebesgue-Maßes

Lemma (4.17)

Ist $A \in \mathscr{A}_d$ und $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{A}_d$ mit $A_m \subseteq A_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, dann folgt $\lim_m \mu_d(A_m) = \mu_d(A)$.

Satz (4.18)

Sei $d \in \mathbb{N}$. Für alle Lebesgue-messbaren Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

(i) $\mu_d(A) = \inf \{ \mu_d(U) \mid U \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen}, \ U \supseteq A \}$

(ii) $\mu_d(A) = \sup \{ \mu_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}, \ K \subseteq A \}$

Beweis von Satz 4.18 (i)

geg.: $d \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_d$ (d.h. A Lebesgue-messbar)

<u>Beh.</u>: $\mu_d(A) = \inf S$, wobei $S = \{\mu_d(U) \mid U \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen}, U \supseteq A\}$

z.zg. (i) $\mu_d(A)$ ist untere Schranke von S

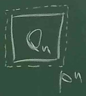
(ii) $\mu_d(A)$ ist die <u>größte</u> untere Schranke

zu <u>(i)</u> Für jedes $U \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $U \supseteq A$, U offen gilt $\mu_d(U) \geq \mu_d(A)$, auf Grund der Monotonie von μ_d

zu <u>(ii)</u> O.B.d.A. $\mu_d(A) < +\infty$ (ansonsten gilt $S = \{+\infty\}$)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach Def. des (äußeren) Lebesgue-Maßes gibt es eine Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Quadern mit

$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(Q_n) < \mu_d(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$



Durch Vergrößerung jedes Q_n und Übergang zum Inneren erhält man offene Quader P_n mit $P_n \supseteq Q_n$ und $\mu_d(P_n) \leq \mu_d(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Setze $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \Rightarrow U$ ist offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $U \supseteq A$, und $\mu_d(U) = \mu_d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(P_n)$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_d(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(Q_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$< \mu_d(A) + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \mu_d(A) + \varepsilon$$

also: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $s \in S$ mit $s < \mu_d(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Es gibt keine größere untere Schranke von S als $\mu_d(A)$. □

Definition

Ein Messraum ein Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ in Ω.

Erinnerung:
Ist $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathscr{A} \to \bar{R}_+$ eine σ-additive Funktion, dann wird das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ als Maßraum bezeichnet.

Sei $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Die Borelsche σ-Algebra wird erweitert zu einer σ-Algebra in $\bar{\mathbb{R}}$ durch $\bar{\mathscr{B}}^1 = \{\bar{A} \subseteq \bar{\mathbb{R}} \mid \bar{A} \cap \mathbb{R} \in \mathscr{B}^1\}$.

Definition messbarer Abbildungen

Definition (5.1)

Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\Omega', \mathscr{A}')$ Messräume.

- Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ wird messbar bezüglich $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}'$ genannt, wenn $f^{-1}(A') \in \mathscr{A}$ für alle $A' \in \mathscr{A}'$ erfüllt ist.
- Ist speziell $(\Omega', \mathscr{A}') = (\bar{R}, \bar{\mathscr{B}}^1)$, dann sprechen wir von einer $\mathscr{A}$-messbaren Funktion.
- Ist darüber hinaus $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\mathscr{A} = \{A \cap \Omega \mid A \in \mathscr{B}^d\}$, dann nennen wir die bezüglich $\mathscr{A}$ messbaren Funktionen auch Borel-messbar.

Jede konstante Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ zwischen Messräumen $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\Omega', \mathscr{A}')$ ist messbar.

Komposition messbarer Abbildungen

Proposition (5.2)

Die Komposition messbarer Abbildungen ist messbar. Genauer: Sind $(\Omega, \mathscr{A})$, $(\Omega', \mathscr{A}')$ und $(\Omega'', \mathscr{A}'')$ drei Messräume, ist $f : \Omega \to \Omega'$ messbar bezüglich $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ und $g : \Omega' \to \Omega''$ messbar bezüglich $\mathscr{A}', \mathscr{A}''$, dann ist $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ messbar bezüglich $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}''$.

Beweis von Proposition 5.2 :

geg: Messräume $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$, $(\Omega'', \mathcal{A}'')$

$f: \Omega \to \Omega'$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$

$g: \Omega' \to \Omega''$ messbar bzgl. $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$

Beh.: $g \circ f: \Omega \to \Omega''$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}''$

Sei $A'' \in \mathcal{A}''$. zzg: $(g \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{A}$

Es gilt $(g \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(g^{-1}(A''))$

$A'' \in \mathcal{A}''$, g messbar $\Longrightarrow g^{-1}(A'') \in \mathcal{A}'$

$g^{-1}(A'') \in \mathcal{A}'$, f messbar $\Longrightarrow f^{-1}(g^{-1}(A'')) \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow (g \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{A}$ $\square$