Definition der Dynkin-Systeme

Definition (4.1)

Eine Teilmenge $\mathscr{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt Dynkin-System in Ω, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\varnothing \in \mathscr{D}$.

(ii) Für jedes $D \in \mathscr{D}$ liegt auch $\Omega \setminus D$ in $\mathscr{D}$.

(iii) Ist $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathscr{D}$, dann ist auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ in $\mathscr{D}$ enthalten.

Durchschnittsstabile Mengensysteme

Wir bezeichnen ein Mengensystem $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ als $\cap$-stabil, wenn für alle $A, B \in \mathscr{E}$ auch $A \cap B$ in $\mathscr{E}$ liegt.

Satz (4.2)

Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist.

Satz (4.3)

Für jedes $\cap$-stabile Mengensystem $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.

Der Eindeutigkeitssatz (Vorbereitung)

Proposition (4.4)

Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in Ω, $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathscr{A}$, und sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Sind μ_1, μ_2 Maße auf $\mathscr{A}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathscr{E}$, und nehmen beide auf den Elementen der Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endliche Werte an, dann folgt $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis von Proposition 4.4

geg. Menge Ω, σ-Algebra $\mathcal{A}$, μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$

Σ $\cap$-stabiles Erz.-system von $\mathcal{A}$, $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ $\forall E \in \Sigma$

$\Sigma_e = \{ E \in \Sigma \mid \mu_1(E), \mu_2(E) < +\infty \}$

$(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in Σ_e mit $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

und $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ z.z.: $\mu_1 = \mu_2$

Vorgehensweise: Definiere für jedes $E \in \Sigma_e$

$$\mathcal{D}_E = \{ D \in \mathcal{A} \mid \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) \}$$

(1) überprüfe, dass jedes $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System ist.

(2) Zeige: $\mathcal{D}_E = \mathcal{A}$ $\forall E \in \Sigma_e$

(3) Zeige: $\mu_1 = \mu_2$ auf ganz $\mathcal{A}$

zu (1) Sei $E \in \Sigma_e$ überprüfe: (1.1) $\emptyset \in \mathcal{D}_E$

(1.2) $\forall D \in \mathcal{D}_E : \Omega \setminus D \in \mathcal{D}_E$

(1.3) Für jede Folge $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen $D_n \in \mathcal{D}_E$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_E$.

zu (1.1) $\mu_1(E \cap \emptyset) = \mu_1(\emptyset) = 0 = \mu_2(\emptyset) = \mu_2(E \cap \emptyset)$

$\implies \emptyset \in \mathcal{D}_E$

zu (1.2) Sei $D \in \mathcal{D}_E$. $\implies \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)$

$\implies \mu_1(E \cap (\Omega \setminus D)) = \mu_1(E \setminus (E \cap D)) = \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D)$

$\underset{\uparrow \text{s.o.}}{=} \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D) = \mu_2(E \setminus (E \cap D)) = \mu_2(E \cap (\Omega \setminus D))$

$\implies \Omega \setminus D \in \mathcal{D}_E$

zu (1.3) Sei $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie angeg.

$$\Rightarrow \mu_1(E\cap D_n) = \mu_2(E\cap D_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Setze $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. $\Rightarrow \mu_1(E\cap D) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-Add. von } \mu_1}}{=}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E\cap D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E\cap D_n) =$$

$$\mu_2(E\cap D) \longrightarrow D\in \mathcal{D}_E$$

zu (2) Sei $E\in\Sigma_e$. z.zg. $\mathcal{D}_E = \mathcal{A}$.

Für jedes $A\in\Sigma$ gilt $A\cap E\in\Sigma$, da Σ $\cap$-stabil $\Rightarrow \mu_1(A\cap E) = \mu_2(A\cap E) \Rightarrow A\in\mathcal{D}_E$ also: $\Sigma\subseteq\mathcal{D}_E$

Be

Die

dem

nach

auch

D_E ist Dynkin-System $\Rightarrow \delta(\mathcal{E}) \subseteq D_E$

$\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil $\xRightarrow{\text{Satz 4.3}} \sigma(\mathcal{E}) \subseteq D_E$

$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq D_E \Rightarrow \mathcal{A} = D_E$

<u>zu (3)</u> Sei $A \in \mathcal{A}$, z.zg.: $\mu_1(A) = \mu_2(A)$

$D_E = \mathcal{A}$ $\forall E \in \mathcal{E}_e \Rightarrow \mu_1(E \cap A) = \mu_2(E \cap A)$ Nach Voraussetzung liegt die Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_e$. $\Rightarrow$

$\mu_1(E_n \cap A) = \mu_2(E_n \cap A)$ Definiere eine neue Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $F_1 = E_1$ und $F_{n+1} = E_{n+1} \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_n)$. Dann sind die F_n paarweise disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega, \text{ außerdem:}$$

$$\mu_1(F_n\cap A) \underset{F_n\subseteq E_n}{=} \mu_1(E_n\cap F_n\cap A) \underset{F_n\cap A\in\mathcal{A},\ \mathcal{A}=\mathcal{D}_{E_n}}{=} \mu_2(E_n\cap F_n\cap A) = \mu_2(F_n\cap A)$$

$$\Rightarrow \mu_1(A) \underset{\sigma\text{-Add. von } \mu_1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(F_n\cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(F_n\cap A) = \mu_2(A).$$

$\square$

σ-endliche Inhalte

Definition (4.5)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω. Einen Inhalt $\mu : \mathscr{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ bezeichnet man als σ-endlich, wenn eine monoton wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{R}$ mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Der Eindeutigkeitssatz

Satz (4.6)

Sei $\mathscr{R}$ ein Mengenring. Dann kann jeder σ-additive und σ-endliche Inhalt $c : \mathscr{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ auf einem Ring $\mathscr{R}$ auf eindeutige Weise zu einem Maß auf $\sigma(\mathscr{R})$ fortgesetzt werden.

Beweis von Satz 4.6:

geg: Menge Ω, Mengenring R, c σ-endlicher σ-additiver Inhalt auf R (alternative Bez.: c ist σ-endliches Prämaß)

<u>Beh.</u>: c kann auf eindeutige Weise zu einem Maß auf der σ-Algebra $\sigma(R)$ fortgesetzt werden

Die <u>Existenz</u> einer solchen Fortsetzung folgt aus dem Fortsetzungssatz von Carathéodory, da nach Konstruktion $A_{\mu_c^*} \supseteq R$ und somit auch $A_{\mu_c^*} \supseteq \sigma(R)$ erfüllt ist.

zur Eindeutigkeit: Angenommen, μ_1 und μ_2 sind zwei Fortsetzungen von c auf $\sigma(\mathcal{R})$. Wende Prop. 4.4 auf $\mathcal{E} = \mathcal{R}$ an. Auf Grund der σ-Endlichkeit gibt es eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\mu_1(E_n) = c(E_n) = \mu_2(E_n)$ und $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$, sowie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$.

Weil μ_1, μ_2 den Inhalt c fortsetzen, gilt $\mu_1(E) = c(E) = \mu_2(E) \ \forall E \in \mathcal{R}$.

Also liefert Prop. 4.4 die Gleichheit $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

Definition der vollständigen Maßräume

Definition (4.7)

Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathscr{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Maß. Wir nennen $\mathscr{A}$ vollständig bezüglich μ, wenn jede Teilmenge A einer Menge $B \in \mathscr{A}$ mit $\mu(B) = 0$ ebenfalls in $\mathscr{A}$ enthalten ist. Wir bezeichnen μ in diesem Fall als vollständiges Maß und das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ als vollständigen Maßraum.

Vollständigkeit der Carathéodory-Fortsetzung

Satz (4.8)

Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $\tilde{\mu} : \mathscr{A}_{\mu^*} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das in Satz 3.14 konstruierte zugehörige Maß. Dann ist $(\Omega, \mathscr{A}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Beweis von Satz 4.8:

geg: Menge Ω, μ^* äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{A}_{\mu^*}$ σ-Algebra der μ^*-messbaren Teilmengen

$\tilde{\mu} = \mu^*|\mathcal{A}_{\mu^*}$ zugeordnetes Maß

Sei $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\tilde{\mu}(B) = 0$ und $A \subseteq B$.

z.zg: $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, d.h. $\forall F \subseteq \Omega$: $\mu^*(F) \overset{(*2)}{\geq} \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$

Sei also $F \subseteq \Omega$. $B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow \mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap B) + \mu^*(F \setminus B)$ Monotonie von μ^* $\Rightarrow \mu^*(F \setminus A) \overset{(*1)}{\leq} \mu^*(F)$, $\mu^*(F \cap A) \leq \mu^*(F \cap B) \leq \mu^*(B) = \tilde{\mu}(B) = 0 \Rightarrow \mu^*(F \cap A) = 0$ Aus $(*1)$ folgt also $(*2)$. $\square$

Ein Messbarkeitskriterium

Satz (4.9)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das dem Inhalt nach Satz 3.11 zugeordnete äußere Maß. Ist $A \subseteq \Omega$ eine Teilmenge und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{A}$ mit $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A \,\Delta\, A_n) \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann gilt $A \in \mathscr{A}$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Sei $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\hat{\mu}(B) = 0$ und $A \subseteq B$.

Beweis von Satz 4.9

geg: vollständiger Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ zugeh. äußeres Maß

$A \subseteq \Omega$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A}$ mit der Eig.

$$\lim_{n \to \infty} \mu^*(A \Delta A_n) = 0$$

z.zg.: $A \in \mathcal{A}$ und $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \overset{(*)}{=} \mu(A)$

Vorgehensweise: (1) zeige: Es existiert eine Menge $C \supseteq A$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu^*(C \setminus A) = 0$

(2) $A \in \mathcal{A}$ (3) Beweis von (*)

zu(1) $A \setminus A_n, A_n \setminus A \subseteq A \Delta A_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu^*(A \setminus A_n) \overset{(**)}{=} 0$ und $\lim_{n \to \infty} \mu^*(A_n \setminus A) = 0$

$(*_1) \Rightarrow$ Es gibt eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$

mit $B_n \supseteq A \setminus A_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$

Setze $C_n = A_n \cup B_n \;\forall n \in \mathbb{N}. \Rightarrow$

$A \subseteq C_n$ und $C_n \setminus A = (A_n \setminus A) \cup (B_n \setminus A)$

$\subseteq (A_n \setminus A) \cup B_n \Rightarrow \mu^*(C_n \setminus A) \leq$

$\mu^*(A_n \setminus A) + \mu^*(B_n) \;\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(C_n \setminus A) = 0$

Setze $C = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \Rightarrow A \subseteq C$ und

$0 \leq \mu^*(C \setminus A) \leq \underbrace{\mu^*(C_n \setminus A)}_{\to 0}$

$\Rightarrow \mu^*(C \setminus A) = 0$, außerdem $C \in \mathcal{A}$.

z.z.

(s

Sei

$B \in$

$N \subseteq$

$\Omega \setminus$

$= (\Omega \setminus$

zu (2) $\mu^*(C\setminus A)=0 \Rightarrow$ Es gibt eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $M_n \supseteq C\setminus A$ und $\mu(M_n) < \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Setze $M=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n \Rightarrow M\in\mathcal{A}$ und $M\supseteq C\setminus A$, $\mu(M)\le\mu(M_n)<\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu(M)=0$ Auf Grund der Vollständigkeit folgt $C\setminus A\in\mathcal{A}$ und $\mu(C\setminus A)=0$

$\Rightarrow A = C\setminus(C\setminus A)\in\mathcal{A}$

zu (3) $\forall n\in\mathbb{N}$: $A\cup(A_n\setminus A) = A\cup A_n = A_n\cup(A\setminus A_n)$ $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n\setminus A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A\setminus A_n)=0 \Rightarrow \mu(A)=\lim_{n\to\infty}(\mu(A)+\mu(A_n\setminus A))$

$= \lim_{n\to\infty}\mu(A\cup A_n) = \lim_{n\to\infty}(\mu(A_n)+\mu(A\setminus A_n)) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ $\square$

((

=

(

m

Sei

B

$\bar{\mathcal{A}}$

Es g

$\bigcup_{n=1}^{\infty}$

Als

Folgerung (4.10)

Jede Jordan-messbare Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ist in $\mathscr{A}_d$ enthalten, und es gilt jeweils $\mu_d(E) = c_d(E)$, d.h. der Jordan-Inhalt stimmt mit dem Lebesgue-Maß von A überein.

Konstruktion der Vervollständigung (Vorbereitung)

Proposition (4.11)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist

$$\bar{\mathscr{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathscr{A}\ ,\ N \in \mathfrak{P}(\Omega)\ ,\ \exists M \in \mathscr{A} : \mu(M) = 0 \wedge N \subseteq M\}$$

eine σ-Algebra mit $\bar{\mathscr{A}} \supseteq \mathscr{A}$.

Beweis von Proposition 4.11:

geg: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

$$\bar{\mathcal{A}} = \{ A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\ N \subseteq \Omega,\ \exists M \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(M) = 0,\ M \supseteq N \}$$

z.zg.: $\bar{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra. $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$ offensichtlich (setze $A = N = \emptyset$)

Sei $B \in \bar{\mathcal{A}}$. z.zg.: $\Omega \setminus B \in \bar{\mathcal{A}}$

$B \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A},\ N \subseteq \Omega$ mit $B = A \cup N$, $N \subseteq M$ für ein $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$

$$\Omega \setminus B = \Omega \setminus (A \cup N) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus N)$$
$$= (\Omega \setminus A) \cap ((M \setminus N) \cup (\Omega \setminus M)) =$$

$((\Omega\setminus A)\cap(M\setminus N))\cup((\Omega\setminus A)\cap(\Omega\setminus M))$

$= ((\Omega\setminus A)\cap(M\setminus N))\cup(\Omega\setminus(A\cup M))$

$(\Omega\setminus A)\cap(M\setminus N)\subseteq M$, $\mu(M)=0$

und $\Omega\setminus(A\cup M)\in\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\Omega\setminus B\in\bar{\mathcal{A}}$

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bar{\mathcal{A}}$. Schreibe $B_n = A_n\cup N_n$, $N_n\subseteq M_n$ wie in der Def. von $\bar{\mathcal{A}}$ angegeben. $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right)$

Es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in\mathcal{A}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(M_n) = 0$

Also folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\in\bar{\mathcal{A}}$. $\square$