Äquivalente Charakterisierung der σ-Algebren

Proposition (3.6)

Ein Mengensystem $\mathscr{A}$ in Ω ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\varnothing \in \mathscr{A}$ gilt, für jedes $A \in \mathscr{A}$ auch das Komplement $\Omega \setminus A$ in $\mathscr{A}$ liegt, und wenn für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathscr{A}$ enthalten ist.

Definition der Maßräume

Definition (3.9)

Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathscr{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, die den Bedingungen $\mu(\varnothing) = 0$ und

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$$

für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathscr{A}$ genügt, wird als Maß auf $\mathscr{A}$ bezeichnet. Ein Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ in Ω und einem Maß μ auf $\mathscr{A}$ wird Maßraum genannt.

Definition (3.10)

Eine Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ wird ein äußeres Maß auf Ω genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$

(ii) Für alle $A, B \subseteq \Omega$ folgt aus $A \subseteq B$ jeweils $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(iii) Für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Eigenschaft (ii) bezeichnet man als Monotonie, Eigenschaft (iii) als σ-Subadditivität.

Das äußere Maß zu einem Inhalt

Satz (3.11)

Sei $\mathscr{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring und $c : \mathscr{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt. Für jedes $A \subseteq \Omega$ definieren wir

$$\mu_c^*(A) \quad = \quad \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathscr{R}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} ,$$

wobei $\inf(\varnothing) = +\infty$ gesetzt wird. Dann ist durch μ_c^* ein äußeres Maß auf Ω definiert.

Beziehung zum äußeren Maß c^* aus § 2:

Für beliebige Teilmengen $A \subseteq \Omega$ gilt im Allgemeinen $c^*(A) \geq \mu_c^*(A)$, aber nicht Gleichheit.

Definition des äußeren Lebesgue-Maßes

Definition (3.12)

Das zum Jordan-Inhalt c_n auf dem Ring $\mathscr{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$ gehörende äußere Maß $\mu^*_{c_n}$ wird äußeres Lebesgue-Maß genannt. Wir bezeichnen es mit μ^*_n.

Definition der μ^*-messbaren Mengen

Definition (3.13)

Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß. Wir bezeichnen eine Menge $A \subseteq \Omega$ als μ^*-messbar, wenn für alle $F \subseteq \Omega$ die Ungleichung

$$\mu^*(F) \quad \geq \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen

Satz (3.14)

Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $\mathscr{A}_{\mu^*}$ die Gesamtheit der μ^*-messbaren Mengen. Dann ist $\mathscr{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra, und durch $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathscr{A}_{\mu^*}}$ ist ein Maß auf $\mathscr{A}_{\mu^*}$ definiert.

Beweis von Satz 3.14 (Fortsetzung)

geg.: äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$\mathcal{A}_{\mu^*}$ = Menge der μ^*-messbaren Teilmengen von Ω

$\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ bereits gezeigt: $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist eine Algebra

zeige nun: (1) $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist abgeschlossen unter <u>disjunkten</u> abzählbaren Vereinigungen

(2) $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist abgeschl. unter beliebigen abzählbaren Vereinigungen

(3) $\tilde{\mu}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$

<u>zu (1)</u> Für alle $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ disjunkt ~~gilt~~ und $F \subseteq \Omega$ gilt

$$\mu^*(F \cap A \cup B) = \mu^*(F \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*((F \cap (A \cup B)) \setminus A)$$

$$= \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \cap B)$$

vollständige Ind $\Rightarrow \mu^*(F \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_r)) = \sum_{k=1}^{r} \mu^*(F \cap A_k)$

für alle $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ paarweise disjunkt

Sei nun $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$

$$\Rightarrow \mu^*(F) = \mu^*\Big(F \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big)\Big) + \mu^*\Big(F \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big)\Big)$$

$$\overset{s.o.}{=} \sum_{k=1}^{m} \mu^*(F \cap A_k) + \mu^*\Big(F \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big)\Big)$$

Grenzübergang $m \to \infty$ $\Rightarrow \mu^*(F) \overset{(*)}{\geq} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(F \cap A_m) +$

$$\mu^*\Big(F \setminus \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big)\Big) \underset{\text{σ-Subadditivität von } \mu^*}{\geq} \mu^*\Big(F \cap \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big)\Big) + \mu^*\Big(F \setminus \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big)\Big)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}_{\mu^*}$$

<u>zu (2)</u> Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Definiere $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $B_1 = A_1$ und $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$ $\forall n \geq 1$

Dann besteht $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus paarweise disj. $B_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$$(1) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$$

<u>zu (3)</u> Es gilt $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$ nach Def. des äußeren Maßes. Sei wieder $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen.

B

Vo

(2

(3)

<u>zu (1</u>

Sei

B =

Satz

paarwei

$\bigcup_{k=1}^{m} B$

Wende (*) an auf $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ an.

Es gilt $F \cap A_m = A_m \ \forall m \in \mathbb{N}$

und $F \setminus F = \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N}$. $\rightarrow$

erhalte $\mu^*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \mu^*(F) \geq$

$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) + \mu^*(\emptyset) =$

$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m)$. Da μ^* außerdem

σ-subadditiv ist, gilt $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_m\right)$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_m)$, insgesamt also Gleich-

heit. $\square$

Die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen

Definition (3.15)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und μ_n^* das äußere Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann bezeichnet man die Elemente der σ-Algebra $\mathscr{A}_{\mu_n^*}$ als die Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und das entsprechende Maß als Lebesgue-Maß.

Notation:

Für die σ-Algebra $\mathscr{A}_{\mu_n^*}$ verwenden wir die einfachere Bezeichnung $\mathscr{A}_n$, und μ_n für das Lebesgue-Maß auf $\mathscr{A}_n$.

Satz (3.16)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathscr{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein σ-additiver Inhalt und $\mu_c^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das zu c gehörende äußere Maß. Mit der Notation aus Satz 3.14 gilt dann $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{A}_{\mu_c^*}$ und außerdem $\mu_c^*|_{\mathscr{R}} = c$, d.h. c wird durch μ_c^* fortgesetzt.

Beweis von Satz 3.16:

Vorgehensweise: (1) c ist σ-subadditiv

(2) $\forall A \in \mathcal{R}: c(A) = \mu_c^*(A)$

(3) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$

zu (1) bereits bekannt: c ist σ-additiv.

Sei $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in \mathcal{R}$. Bilde wie im Beweis von Satz 3.14 eine Folge $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ aus paarweise disjunkten Mengen mit $\bigcup_{k=1}^{m} C_k = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$. $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, c σ-additiv $\Rightarrow$

$A_m)$

ch-

$\square$

$$c(B) = c\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} c(C_m) \underset{C_m \subseteq B_m}{\leq} \sum_{m=1}^{\infty} c(B_m)$$

<u>zu (2)</u> geg: $A \in R$, z.zg: $c(A) = \mu_c^*(A)$

Definiere $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch $A_1 = A$, $A_m = \emptyset \; \forall m \geq 2$

$$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = A \Rightarrow \mu_c^*(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) = c(A)$$

Sei nun $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von R mit

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \supseteq A \text{ und } \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) < +\infty.$$

Aus (1) und $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A \cap A_m)$ folgt

$$c(A) = c\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (A \cap A_m)\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} c(A \cap A_m)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m)$$ Übergang zum Infimum

liefert $c(A) \leq \mu_c^*(A)$. insgesamt: $c(A) = \mu_c^*(A)$

zu (3) Für gegebenes $A \in \mathcal{R}$ und $F \subseteq \Omega$ muss gezeigt werden: $\mu_c^*(F) \geq \mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A)$

O.B.d.A. sei $\mu_c^*(F) < +\infty \Rightarrow \exists\, (A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) < +\infty$ und $F \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$

$(A_m \cap A)_{m \in \mathbb{N}}$ ist Überdeckung von $F \cap A$

$(A_m \setminus A)_{m \in \mathbb{N}}$ ist Überdeckung von $F \setminus A$.

$$\Rightarrow \mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} c(A_m \setminus A)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) < +\infty$$ Übergang zum Infimum $\Rightarrow$

$$\mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \leq \mu_c^*(F) \Rightarrow A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \qquad \square$$

Zusammenhang zwischen Lebesgue-Maß und Jordan-Inhalt

Folgerung (3.17)

Der Ring $\mathscr{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$ ist in der σ-Algebra $\mathscr{A}_n$ der Lebesgue-messbaren Mengen enthalten. Damit ist auch die Borel-Algebra $\mathscr{B}_n$ im $\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge von $\mathscr{A}_n$. Das Lebesgue-Maß μ_n stimmt auf $\mathscr{R}_n$ mit dem Jordan-Inhalt überein.

Im nächsten Kapitel wird dieses Ergebnis erweitert:

- Die Algebra $\mathscr{A}_n$ enthält den Ring der Jordan-messbaren Teilmengen.
- Auf diesem Ring stimmt das Lesbesgue-Maß mit dem Jordan-Inhalt überein.

Definition der Dynkin-Systeme

Definition (4.1)

Eine Teilmenge $\mathscr{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt Dynkin-System in Ω, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\varnothing \in \mathscr{D}$.

(ii) Für jedes $D \in \mathscr{D}$ liegt auch $\Omega \setminus D$ in $\mathscr{D}$.

(iii) Ist $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathscr{D}$, dann ist auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ in $\mathscr{D}$ enthalten.

Anmerkung zur Definition

Die Definition des Dynkin-Systems bleibt erhalten, wenn man die Bedingungen (i),(ii) durch folgende Bedingungen ersetzt:

(i)' $\Omega \in \mathscr{D}$

(ii)' $D, E \in \mathscr{D}, D \subseteq E \Rightarrow E \setminus D \in \mathscr{D}$

Durchschnittsstabile Mengensysteme

Wir bezeichnen ein Mengensystem $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ als $\cap$-stabil, wenn für alle $A, B \in \mathscr{E}$ auch $A \cap B$ in $\mathscr{E}$ liegt.

Satz (4.2)

Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist.

Satz (4.3)

Für jedes $\cap$-stabile Mengensystem $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.

Beweis von Satz 4.2

geg.: Menge Ω, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Dynkin-System

<u>Beh.</u>: $\mathcal{D}$ ist σ-Algebra $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}$ ist $\cap$-stabil

„$\Longrightarrow$" klar, da σ-Algebren $\cap$-stabil sind

„$\Longleftarrow$" Da $\mathcal{D}$ Dynkin-System ist, gilt $\emptyset \in \mathcal{D}$

und $\mathcal{D}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}$. zzg.: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n \in \mathcal{D}$

Setze $A'_0 = \emptyset$ und $A'_{n+1} = A'_n \cup A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (A'_{n+1} \setminus A'_n)$

und die Vereinigung ist disjunkt (siehe Skript)

Da $\mathcal{D}$ abg. ist unter Bildung von Differenzen gilt $A'_{m+1} \setminus A'_m \in \mathcal{D} \ \forall m \in \mathbb{N}$ und wegen Eigenschaft (iii) damit auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} (A'_{m+1} \setminus A_m) \in \mathcal{D}$. $\square$

Beweis von Satz 4.3:

geg: Menge Ω, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil

z.zg: $\delta(\Sigma) = \sigma(\Sigma)$

↑ von Σ erzeugtes Dynkin-System.

↑ von Σ erzeugte σ-Alg.

„$\subseteq$" ist offensichtlich, da jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist. Wenn wir zeigen können, dass $\delta(\Sigma)$ eine σ-Algebra ist, dann erhalten wir Gleichheit. Nach Satz 4.2 reicht es zu zeigen, dass $\delta(\Sigma)$ $\cap$-stabil ist.

Betrachte für jedes $D \in \delta(\Sigma)$ das Mengensystem $\mathcal{D}_D = \{Q \subseteq \Omega \mid Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}$

überprüfe: $\mathcal{D}_D$ ist jeweils ein Dynkin-System

Sei $D \in \delta(\mathcal{E})$. Wir kontrollieren für $\mathcal{D}_D$ die Bedingungen (i)', (ii)' und (iii).

$\Omega \cap D = D \Rightarrow \Omega \cap D \in \mathcal{D}_D \Rightarrow$ (i)' erfüllt

Seien $Q, R \in \mathcal{D}_D$ mit $Q \subseteq R \Rightarrow Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})$ und $R \cap D \in \delta(\mathcal{E})$. $Q \cap D \subseteq R \cap D \Rightarrow$

$(R \setminus Q) \cap D = (R \cap D) \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{E})$ auf Grund der Abg unter Differenzen $\Rightarrow R \setminus Q \in \mathcal{D}_D$

$\Rightarrow$ (ii)' ist erfüllt

Sei nun $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}_D$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen

$\Rightarrow D_m \cap D \in \delta(\Sigma) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Weil die Mengen $D_m \cap D$ ($m \in \mathbb{N}$) paarweise disjunkt sind, folgt $\bigcup_{m=1}^{\infty} (D_m \cap D) \in \delta(E)$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m\right) \cap D \in \delta(E) \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m \in \mathcal{D}_D$

Also erfüllt $\mathcal{D}_D$ auch Bedingung (iii)

Zeige nun die $\cap$-Stabilität von $\delta(\Sigma)$:

(1) Aus $A, B \in \Sigma$ folgt $A \cap B \in \delta(\Sigma)$
(klar, wegen $\Sigma \subseteq \delta(\Sigma)$, und da Σ $\cap$-stabil ist)

(2) zeige: Aus $A \in \delta(\Sigma)$ und $B \in \Sigma$ folgt $A \cap B \in \delta(\Sigma)$

Sei $B \in \Sigma$. Teil (1) $\Rightarrow A \cap B \in \delta(\Sigma) \ \forall A \in \Sigma$

$\Rightarrow \Sigma \subseteq \mathcal{D}_B$. Da $\mathcal{D}_B$ ein Dynkin-System ist, folgt
$\delta(\Sigma) \subseteq \mathcal{D}_B$. Nach Def. von $\mathcal{D}_B$ folgt $A \cap B \in \delta(\Sigma)$
für alle $A \in \delta(\Sigma)$.

3. Schritt: zeige: Aus $A, B \in \delta(\Sigma)$ folgt $A \cap B \in \delta(\Sigma)$.
Sei $A \in \delta(\Sigma)$. Schritt 2 $\Rightarrow \Sigma \subseteq \mathcal{D}_A$ (denn:
$B \in \Sigma \overset{(2)}{\Longrightarrow} A \cap B \in \delta(\Sigma) \Rightarrow B \in \mathcal{D}_A$)
$\Rightarrow \delta(\Sigma) \subseteq \mathcal{D}_A \Rightarrow \forall B \in \delta(A): B \in \mathcal{D}_A$.
$\mathcal{D}_A$ Dynkin-System
also $A \cap B \in \delta(\Sigma)$ $\square$