Nachtrag: Die unitäre Gruppe

Definition (16.23)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{C}}$ heißt unitär, wenn ${}^{\mathrm{t}}\bar{A}A = E_n$ und hermitesch, wenn ${}^{\mathrm{t}}\bar{A} = A$ gilt. Wie die orthogonalen bilden auch die unitären Matrizen bilden eine Gruppe, die sog. unitäre Gruppe, die mit $\mathscr{U}(n)$ bezeichnet wird.

<u>bekannt:</u> V, W normierte endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorräume

$f: V \to W$ totale diff'bare Abbildung

Dann ist $df(a)$ eine lineare Abb. $V \to W$, für jedes $a \in V$.

(D.h. die Ableitungsfkt. ist somit eine Abbildung

$$df: V \to \mathcal{L}(V, W) \leftarrow \begin{matrix}\text{lineare Abb.}\\ V \to W\end{matrix}$$
)

Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) wird $df(a)$ jeweils durch die Jacobi-Matrix $(\partial_j f_i(a))$ beschrieben, wobei $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Komponenten von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezeichnen.

Im Fall, dass V ein allgem. endl.-dim. normierter $\mathbb{R}$-Vektor-raum und $W = \mathbb{R}$ sind, kann $df(a) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ durch Richtungsableitungen beschrieben werden. Es gilt

$$df(a)(v) = \partial_v f(a)$$

Im Allgemeinen Fall kann $df(a)$ durch eine Darstellungs-matrix beschrieben werden. Sei $n = \dim V$, $m = \dim W$, $A = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, $B = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Ist nun $f: V \to W$ in a diff'bar (wobei $a \in V$), dann ist $\tilde{f} = \Phi_B \circ f$ eine Abb. $V \to \mathbb{R}^m$ und $d\tilde{f}(a)$ entsprechend eine lineare Abb. $V \to \mathbb{R}^m$

Seien $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m : V \to \mathbb{R}$ die Komponenten von $\tilde{f}$.

Dann gilt

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(df(a)) = \left(\partial_{v_j} \tilde{f}_i (a) \right)$$

(Dies kann mit der Kettenregel gezeigt werden, siehe Tutoriumsblatt 4, Aufg. 2 (a)*.)

<u>Beispiel</u>: Betrachte die Abb.

$$f : M_{2,\mathbb{R}} \longrightarrow M_{2,\mathbb{R}}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\left(f \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{pmatrix} \right.$$

Verwende die Basis $\mathcal{B} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$

bestehend aus den Basismatrizen B_{ij}.

Es gilt jeweils

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix} = (x+2z)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + (y+2w)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + (3x+4z)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$+ (3y+4w)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{f}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} = (\Phi_B\circ f)\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}x+2z\\y+2w\\3x+4z\\3y+4w\end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{R}}$$

Berechnung der Richtungsableitung $\partial_{B_{11}} f_1 \begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$:

$$\phi : \mathbb{R} \to M_{2,\mathbb{R}},\ t \mapsto \begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+t&y\\z&w\end{pmatrix}$$

$$(f_1\circ\phi)(t) = (x+t)+2z \Rightarrow (f_1\circ\phi)'(0) = 1$$

$\Big)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

$\Big) =$

$\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}.$

$= \begin{pmatrix}x+t&y\\z&w\end{pmatrix}$

$(0) = 1$

Ergebnis: $\partial_{B_{11}} f_1\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} = 1$

Genauso erhält man $\partial_{B_{11}} f_2\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} = 0$,

$\partial_{B_{11}} f_3\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} = 3$, $\partial_{B_{11}} f_4\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} = 0$.

Dies sind die Einträge der ersten Spalte der Darstellungsmatrix. Wiederholt man dasselbe Verfahren mit den Basisvektoren B_{12}, B_{21}, B_{22}, so kommt man insgesamt auf

$$M_B\left(df\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{pmatrix}$$

An den Spalten von $M_B\left(df\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\right)$ kann

$\tilde{f}$.

abgelesen werden: $df\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$df\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $df\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $df\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow df\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{R}}$$

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Notation: Es seien V, W endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume und $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge.

Erinnerung:

- Eine Abbildung $f : U \to W$ wird $\mathscr{C}^1$-Abbildung oder stetig differenzierbare Abbildung genannt, wenn f auf ganz U total differenzierbar und $df : U \to \mathscr{L}(V, W)$ stetig ist.
- Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ ist Letzteres gleichbedeuted damit, dass die partiellen Ableitungen $\partial_j f_i$ der Komponenten $f_i : U \to \mathbb{R}$ von f stetig sind.
- Sind $\tilde{U} \subseteq V$ und $\tilde{W} \subseteq W$ offene Teilmengen, so bezeichnet man eine Abbildung $f : \tilde{U} \to \tilde{W}$ als $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus, wenn f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung ist.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Satz (7.5)

Sei $f : U \to W$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Ist $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass $f'(a) \in \mathscr{L}(V, W)$ bijektiv ist, dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von a und eine offene Umgebung $\tilde{W} \subseteq W$ von $b = f(a)$ mit der Eigenschaft, dass durch $f|_{\tilde{U}}$ $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$ definiert ist.

Folgerung (7.6)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar ist. Dann ist $V = f(U)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und f ist ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen U und V.

Die Umkehrregel (endgültige Fassung)

Satz (7.7)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Sei $a \in U$ ein Punkt mit $\det f'(a) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen $U_1 \subseteq U$ von a und $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $b = f(a)$, so dass durch $f_1 = f|_{U_1}$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $U_1 \to V_1$ definiert ist. Die Ableitung der Umkehrabbildung $f_1^{-1} : V_1 \to U_1$ erfüllt dabei

$$(f_1^{-1})'(y) \quad = \quad f'(f_1^{-1}(y))^{-1}$$

für alle $y \in V_1$. Insbesondere gilt also $(f_1^{-1})'(b) = f'(a)^{-1}$.

Anwendungsbeispiel: Polarkoordinaten-Abb.

$$\rho_{pol}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit $(x,y) = \rho_{pol}(r,\varphi)$. Satz 7.5 $\to$ Es gibt offene Umgebungen $\tilde{U}$ von (r,φ) und $\tilde{V}$ von (x,y), so dass $\phi = \rho_{pol}|_{\tilde{U}}$ einen C^1-Diffeomorphismus zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$ liefert. Sei $\psi: \tilde{V} \to \tilde{U}$ die Umkehrabb. von $\phi: \tilde{U} \to \tilde{V}$. Ziel: Berechnung von $d\psi(x,y)$

Berechne zunächst $d\phi(r,\varphi)$: Es gilt

Berechne zunächst $d\phi(r,\varphi)$: Es gilt

$$d\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1(r,\varphi) & \partial_2\phi_1(r,\varphi) \\ \partial_1\phi_2(r,\varphi) & \partial_2\phi_2(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

allgemein: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$

Laut Umkehrregel gilt $d\Psi(x,y) = d\phi(r,\varphi)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

$(x,y) = \phi(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$

$\Rightarrow x = r\cos(\varphi),\ y = r\sin(\varphi) \rightarrow \cos(\varphi) = \frac{x}{r},\ \sin(\varphi) = \frac{y}{r}$

$r^2 = r^2\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\varphi)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

einsetzen $\Rightarrow d\Psi(x,y) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

Implizit definierte Funktionen

Definition (7.8)

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $I', I'' \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle. Wir sagen, eine Funktion $g : I' \to I''$ werde durch f implizit definiert, wenn für alle $(x, y) \in I' \times I''$ die Äquivalenz

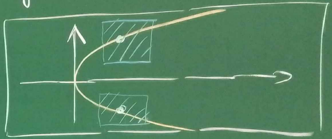
$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x) \quad \text{erfüllt ist.}$$

intuitive Formulierung:
Die Gleichung $f(x, y) = 0$ kann „nach y aufgelöst" werden.

konkretes Beispiel: Betrachte die Funktion

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) = y^2 - x$

Nullstellenmenge von f



(1) f definiert implizit die Funktion $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$, denn für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt die Äquivalenz

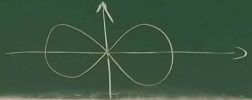
$$f(x,y) = 0 \iff y^2 - x = 0 \iff y^2 = x$$
$$\iff y = \sqrt{x} \iff y = g(x)$$

(2) Sei $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. Dann definiert f auch implizit die Funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$, $x \mapsto -\sqrt{x}$, denn für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ gilt die Äquivalenz $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - x = 0 \Leftrightarrow$

$$y^2 = x \underset{\substack{x>0 \\ y<0}}{\Leftrightarrow} y = -\sqrt{x} \Leftrightarrow y = h(x).$$

(3) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $I' \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges offenes Intervall, dann gibt es keine durch f definierte implizite Fkt.

weiteres Beispiel: Lemniskate

(siehe Skript) 

Mehrdimensionale partielle Ableitungen

Definition (7.9)

Seien X, Y, Z endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $U \subseteq X \times Y$ eine offene Teilmenge und $f : U \to Z$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $(x, y) \in U$, dann definieren wir die partielle Ableitung von f in X- bzw. Y-Richtung durch

$$\partial_X f(x,y) : X \to Z \, , \, v \mapsto f'(x,y)(v,0) \quad \text{bzw.}$$

$$\partial_Y f(x,y) : Y \to Z \, , \, w \mapsto f'(x,y)(0,w).$$

Ein Hilfslemma

Lemma (7.10)

Seien X, Y, Z endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\dim Y = \dim Z$, und seien $\phi : X \to Z$ und $\psi : Y \to Z$ lineare Abbildungen, wobei ψ invertierbar ist. Dann ist auch die lineare Abbildung

$$\Phi : X \times Y \to X \times Z,\ (u, v) \mapsto (u, \phi(u) + \psi(v))$$

invertierbar, mit der Zuordnung $X \times Z \to X \times Y$, $(u, w) \mapsto (u, \psi^{-1}(w) - (\psi^{-1} \circ \phi)(u))$ als Umkehrabbildung.

Satz (7.11)

Sei $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq X \times Y$ offen. Sei außerdem $f : U \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $(a, b) \in U$ eine Nullstelle von f mit der Eigenschaft, dass $\partial_Y f(a, b)$ invertierbar ist. Dann gibt es Umgebungen $U' \subseteq X$ von a und $U'' \subseteq Y$ von b mit $U' \times U'' \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$, so dass die Äquivalenz

$$f(x, y) = 0_Y \;\Leftrightarrow\; y = g(x) \qquad \text{für alle } (x, y) \in U' \times U'' \quad \text{erfüllt ist.}$$

Beweisskizze zu Satz 7.11

- Grundidee:
  Rückführung auf den Satz über die lokale Umkehrbarkeit
- Definiere $\Phi : U \to X \times Y$, $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$.
- Wir überprüfen weiter unten, dass Φ die Voraussetzungen des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt und somit ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus

$$\Phi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{V}$$

  zwischen einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von (a, b) und einer offenen Teilmenge $\tilde{V} \subseteq X \times Y$ existiert.
- Sei $\Psi : \tilde{V} \to \tilde{U}$ die Umkehrabbildung von $\Phi|_{\tilde{U}}$. Für alle $(w, z) \in \tilde{V}$ und $(x, y) = \Psi(w, z) \in \tilde{U}$ gilt jeweils

$$(w, z) = \Phi(x, y) = (x, f(x, y))$$

  und somit $x = w$ und $\Psi(w, z) = (w, f(x, y))$.

Beweisskizze zu Satz 7.11 (Forts.)

- Dies zeigt, dass eine Funktion $h : \tilde{V} \to Y$ mit der Eigenschaft $\Psi(w, z) = (w, h(w, z))$ für alle $(w, z) \in \tilde{V}$ existiert.
- Nach Verkleinerung von $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$ können wir $\tilde{U} = U' \times U''$ annehmen, mit offenen Teilmengen $U' \subseteq X$ und $U'' \subseteq Y$ wobei $a \in U'$ und $b \in U''$ gilt.
- Offenbar gilt nun für alle $x \in U'$, $y \in U''$, $z \in Y$ die Äquivalenz

$$f(x, y) = z \;\Leftrightarrow\; (x, z) = \Phi(x, y) \;\Leftrightarrow\; \Psi(x, z) = (x, y) \;\Leftrightarrow\; (x, h(x, z)) = (x, y) \;\Leftrightarrow\; y = h(x, z).$$

- Ersetze U' durch $\{x \in U' \mid (x, 0_Y) \in \tilde{V}\}$ und definiere $g(x) = h(x, 0_Y)$. Es gilt dann die Äquivalenz

$$f(x, y) = 0_Y \;\Leftrightarrow\; y = h(x, 0_Y) \;\Leftrightarrow\; y = g(x).$$

- Überprüfe, dass U' offen und die Funktionen h und g beides $\mathscr{C}^1$-Abbildungen sind.

Beweisskizze zu Satz 7.11 (Forts.)

- Zu zeigen bleibt die lokale Umkehrbarkeit von Φ.
- Voraussetzungen: $(a, b) \in U$, $\partial_Y f(a, b)$ ist invertierbar
- Zerlege Φ in die Komponenten $\Phi_X : U \to X$, $(x, y) \mapsto x$ und $\Phi_Y : U \to Y$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$.
- Überprüfe: Dann gilt

$$\Phi'(a, b)(u, v) = (u, \partial_X f(a, b)(u) + \partial_Y f(a, b)(v)).$$

- Mit Lemma 7.10 folgt die Invertierbarkeit von $\Phi'(a, b)$. Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit ist also anwendbar.