

Definition (16.12)

- Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ wird **orthogonal** genannt, wenn ${}^tAA = E_n$ gilt.
- Die orthogonalen Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, die sogenannte **orthogonale Gruppe** $\mathcal{O}(n)$.
- Die Untergruppe $SO(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$ wird **spezielle orthogonale Gruppe** genannt.

Definition (16.14)

Eine **Bewegung** im $\mathbb{R}^n$ ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Ein wichtige Klasse von Beispielen für Bewegungen sind die **Translationen**, die Abbildungen der Form

$$\tau_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad v \mapsto u + v$$

mit einem festen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$.

Zwei Hilfsaussagen

Lemma (16.15)

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|w\|^2$.

Lemma (16.16)

Sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit $\langle \psi(v), \psi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Matrix $A \in \mathcal{O}(n)$ mit $\psi = \phi_A$, insbesondere ist ψ linear.

Satz (16.17)

Die Bewegungen in $\mathbb{R}^n$ sind genau die Abbildungen der Form $\tau_u \circ \phi_A$, mit $u \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{O}(n)$. Die Darstellung dieser Form ist eindeutig. Liegt A sogar in $SO(n)$, dann spricht man von einer **orientierungserhaltenden**, ansonsten von einer **orientierungsumkehrenden** Bewegung.

Beweis von Satz 16.17

geg. Bewegung $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also eine Abbildung
mit $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

Setze $u = \phi(0_{\mathbb{R}^n}) \in \mathbb{R}^n$ und $\psi = \tau_{-u} \circ \phi$.

Dann ist auch ψ eine Bewegung, mit $\psi(0_{\mathbb{R}^n}) =$
 $(\tau_{-u} \circ \phi)(0_{\mathbb{R}^n}) = \tau_{-u}(u) = u + (-u) = 0_{\mathbb{R}^n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall v \in V: \|\psi(v)\| &= \|\psi(v) - 0_{\mathbb{R}^n}\| = \|\psi(v) - \psi(0_{\mathbb{R}^n})\| \\ &= \|v - 0_{\mathbb{R}^n}\| = \|v\|. \text{ Auf Grund des Zusammenhangs zwischen} \\ \| \cdot \| \text{ und } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ folgt } \langle \psi(v), \psi(w) \rangle &= \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Lemma 16.16 $\Rightarrow \exists A \in O(n): \psi = \phi A$

$$\Rightarrow \phi = \tau_u \circ \gamma = \tau_u \circ \phi_A$$

$$\uparrow \tau_u \circ \tau_u = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

$$\text{Sei } B \in \mathcal{O}(n) \text{ und } w \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \tau_u \circ \phi_A = \phi = \tau_w \circ \phi_B \quad (*)$$

$$\Rightarrow w = \tau_w(0_{\mathbb{R}^n}) \stackrel{(*)}{=} (\tau_w \circ \phi_B)(0_{\mathbb{R}^n}) = (\tau_u \circ \phi_A)(0_{\mathbb{R}^n}) =$$

$$\tau_u(0_{\mathbb{R}^n}) = u$$

$$(*) \Rightarrow \tau_{-u} \circ \tau_u \circ \phi_A = \tau_{-u} \circ \tau_w \circ \phi_B$$

$$\Rightarrow \phi_A = \phi_B \Rightarrow A = B \quad (**) \quad \phi_B(0_{\mathbb{R}^n}) = B \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$$



Definition (16.18)

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum. Man bezeichnet einen Endomorphismus ϕ von V als

- (i) **orthogonal**, wenn $b(\phi(v), \phi(w)) = b(v, w)$ für alle $v, w \in V$ gilt, und als
- (ii) **symmetrisch** oder auch **selbstadjungiert**, wenn $b(\phi(v), w) = b(v, \phi(w))$ für alle $v, w \in V$ gilt.

Die Darstellungsmatrix orthogonaler Endomorphismen

Lemma (16.19)

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ ist symmetrisch genau dann, wenn $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Proposition (16.20)

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine ON-Basis von V , $\phi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Der Endomorphismus ϕ ist **genau dann** orthogonal, wenn A orthogonal ist und genau dann selbstadjungiert, wenn A symmetrisch ist.

Beweis von Prop. 16.20, nur für selbstadjungierte
Endomorphismen und symmetrische Matrizen

geg. $n \in \mathbb{N}$, V n -dim. $\mathbb{R}$ -Vektorraum,

$\phi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$, $B = (v_1, \dots, v_n)$ ON-Basis von V

Sei $A = M_B(\phi) \in M_{n, \mathbb{R}}$ zu zeigen:

ϕ ist selbstadj. $\iff A$ ist symmetrisch

Wahl B eine ON-Basis von V ist, ist

$M_B(\phi) = E$ (Einheitsmatrix). $\Rightarrow$

$$\forall r, w \in V: \phi(r, w) = {}^t \Phi_B(r) M_B(\phi) \Phi_B(w)$$

$$= {}^t \Phi_B(v) \Phi_B(w) = \langle \Phi_B(v), \Phi_B(w) \rangle$$

$$\uparrow M_B(w) = E$$

$\Rightarrow$ erhalte für $v, w \in V$ die Äquivalenz

$$\mathcal{B}(\phi(v), w) = \mathcal{B}(v, \phi(w)) \Leftrightarrow \langle \Phi_B(\phi(v)), \Phi_B(w) \rangle$$

$$= \langle \Phi_B(v), \Phi_B(\phi(w)) \rangle \Leftrightarrow \langle M_B(\phi) \Phi_B(v), \Phi_B(w) \rangle$$

$$= \langle \Phi_B(v), M_B(\phi) \Phi_B(w) \rangle = \langle A \Phi_B(v), \Phi_B(w) \rangle$$

$$= \langle \Phi_B(v), M_B(\phi) \Phi_B(w) \rangle \quad \text{Damit erhalten}$$

wir ϕ selbstadj. $\Leftrightarrow \forall v, w \in V: \mathcal{B}(\phi(v), w) = \mathcal{B}(v, \phi(w))$

$$\Leftrightarrow \forall v, w \in V: \langle A \Phi_B(v), \Phi_B(w) \rangle = \langle \Phi_B(v), A \Phi_B(w) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall v, w \in \mathbb{R}^n: \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \text{(16.19)} \quad A \text{ ist symm.}$$

$\uparrow \Phi_B$ bijektiv

Satz über die Hauptachsentransformation

Das euklidische Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ kann durch

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{v}_k w_k \quad \text{für } v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$$

zu einer Abbildung $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ **ausgedehnt** werden.

Proposition (16.21)

Jede symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ besitzt einen **reellen** Eigenwert.

Satz (16.22)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ symmetrisch. Dann gibt es eine orthogonale Matrix T , so dass $D = {}^t T A T$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis von Prop. 16.21

geg. $A \in M_n, \mathbb{R}$ symmetrisch z.zg.: A besitzt
einen reellen Eigenwert

Betrachte χ_A als Element des Polynomrings $\mathbb{C}[x]$.
Wie jedes nichtkonst. Polynom über $\mathbb{C}$ hat χ_A
eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Beh.: $\lambda \in \mathbb{R}$

Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ .
Schreibe $v = u + iw$ mit $u, w \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } \bar{\lambda} \langle v, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle \\ \langle A(u+iw), u+iw \rangle &= \langle Au, u \rangle + \langle A(iw), u \rangle \\ &+ \langle Au, iw \rangle + \langle A(iw), iw \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle Au, u \rangle + (-i) \langle Aw, u \rangle + i \langle Au, w \rangle \\
&+ 1 \cdot \langle Aw, w \rangle = \underbrace{\langle u, Au \rangle + (-i) \langle w, Au \rangle + i \langle u, Aw \rangle + \langle w, Aw \rangle}_{A \text{ symm}} = \dots = \langle v, Av \rangle \\
&= \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle \stackrel{\langle v, v \rangle \neq 0}{\Rightarrow} \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad \square
\end{aligned}$$

Item

$$) = \theta(v, \phi(v))$$

$$\langle w \rangle$$

A is symm

Beweis von Satz 16.22

geg. $A \in M_{n, \mathbb{R}}$ z.zg: $\exists T \in O(n)$, so dass $D = {}^t T A T$
eine Diagonalmatrix ist

Zeige zunächst durch vollst. Ind. über $n \in \mathbb{N}$: $\exists (v, k)$ ein n -dim. endl.
 $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ selbstadjungiert, dann existiert
eine ON-Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von ϕ .

Ind.-Auf. $n=1$ nichts zu zeigen (Wähle einen beliebigen Vektor
 $v \in V$ mit $\|v\|_k = 1$, dann hat $B=(v)$ die gewünschte Eigen-
schaft.)

Ind.-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, (V, k) endl. Vektorraum mit

Ind-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, $(V, \|\cdot\|)$ endl. Vektorraum mit

$\dim V = n+1$, setze die Aussage für n -dim endl. $\mathbb{R}$ -Vektor-
räume voraus. Sei $\phi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ selbstadjungiert.

Sei B_0 eine ON-Basis von V und $A = M_{B_0}(\phi)$. Dann ist A symm.
Lemma 16.21 $\Rightarrow A$ hat einen reellen Eigenwert λ . Dies ist auch
ein Eigenwert von ϕ . Sei $v_1 \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Nach Ersetzung von v_1 durch $\|v_1\|^{-1} v_1$ können wir $\|v_1\| = 1$ annehmen.

Definiere $U = \{u \in V \mid \langle v_1, u \rangle = 0\}$. Als Kern der linearen Abb.

$\gamma: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \langle v_1, v \rangle$ ist U ein Untervektorraum.

$\gamma(v_1) = \langle v_1, v_1 \rangle = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{im}(\gamma) \neq \{0\} \Rightarrow \dim \text{im}(\gamma) = 1$

Dimensionssatz $\Rightarrow \dim U = \dim \ker(\gamma) = \dim V - \dim \text{im}(\gamma)$
 $= (n+1) - 1 = n$.

Beh.: $\phi(U) \subseteq U$ Sei $u \in U$.

Dann gilt $b(v_1, \phi(u)) = b(\phi(v_1), u) =$
 $\quad \quad \quad \uparrow \phi \text{ selbstadj.}$

$$b(\lambda v_1, u) = \lambda b(v_1, u) = \lambda \underset{\uparrow u \in U}{0} = 0.$$

$\Rightarrow \phi(u) \in U$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Aus der Beh. folgt $\phi|_U \in \text{End}_{\mathbb{R}}(U)$

Wende auf $\phi|_U$ die Ind.-voraussetzung an.

$\Rightarrow$ erhalte eine ON-Basis $(v_1, \dots, v_{n+1})$ von

Eigenvektoren von $\phi|_U \Rightarrow \mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ (2)

ist ON-Basis aus Eigenvektoren von ϕ .

Wende die soeben bewiesene Aussage an auf $V = \mathbb{R}^n$ und $\phi_A \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ A symm. $\Rightarrow$ ϕ_A ist selbstadj. $\stackrel{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \exists$ ON-Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren für ϕ_A (bzw. A). Trage $v_1, \dots, v_n$ als Spalten in eine Matrix T ein. $\Rightarrow T = T^B$, und auf Grund der ON-Eigenschaft von B ist $T \in \mathcal{O}(n)$. (3)

Der Satz vom Basiswechsel liefert

$M_B(\phi_A) = T^{-1} A T = {}^t T A T$ Weil B aus Eigenvektoren besteht, ist $D = M_B(\phi_A)$ eine Diagonalmatrix. (4) $\square$

Verfahren zur Berechnung der Transformationsmatrix

gegeben: eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$

gesucht: eine orthogonale Matrix $T \in \mathcal{O}(n)$, so dass durch

$D = {}^tTAT$ eine Diagonalmatrix gegeben ist

- Berechne das char. Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$ und alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix A .
- Berechne für jeden Eigenwert λ von A jeweils eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ des Eigenraums $\text{Eig}(A, \lambda)$.
- Berechne mit dem Gram-Schmidt-Verfahren für $\text{Eig}(A, \lambda)$ jeweils eine **ON-Basis** $\mathcal{B}'_\lambda$.
- Füge diese ON-Basen zu einer ON-Basis $\mathcal{B}'$ des $\mathbb{R}^n$ zusammen.
- Bilde die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}'}$ durch Eintragung der Vektoren aus $\mathcal{B}'$ als Spalten in T .

Dann hat die Matrix T die gewünschte Eigenschaft.

Verfahren zur Berechnung der Transformationsmatrix

Die Funktionsweise des Verfahrens beruht auf folgenden Beobachtungen:

- Aus Satz 16.22 folgt, dass die Matrix A über $\mathbb{R}$ **diagonalisierbar** ist. Der $\mathbb{R}^n$ kann also als direkte Summe der Eigenräume $\text{Eig}(A, \lambda)$ dargestellt werden. Daraus folgt, dass die Basen $\mathcal{B}'_\lambda$ zusammengenommen eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ergeben.
- Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ bzw. μ , dann gilt $v \perp w$. Denn aus der Rechnung

$$\begin{aligned}\lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \\ &= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

und $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle v, w \rangle = 0$. Dies bedeutet, dass $\mathcal{B}'$ nicht nur eine Basis, sondern eine **ON-Basis** des $\mathbb{R}^n$ ist.

Wiederholung Analysis

(1) Richtungsableitungen.

geg. endl.-dim. normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum V

$U \subseteq V$ offene Teilmenge, $a \in U$, $v \in V$

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktion

Dann ist die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$

definiert durch $\partial_v f(a) = (f \circ \phi_v)'(0)$

mit $\phi_v: \mathbb{R} \rightarrow V$ geg. durch $\phi_v(t) = a + tv$

(2) totale Ableitung: V, W endl.-dim. normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume, $U \subseteq V$ offen, $a \in U$

(2) totale Ableitung: V, W endl.-dim. normierte

Sei $f: U \rightarrow W$ eine Abbildung.

Man nennt f total diff'bar in a mit totaler Ableitung $df(a) \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, wenn eine Umg.

$U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $0_{\mathbb{R}^n}$ und eine Funktion $\varphi: U_0 \rightarrow W$ existieren, so dass

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \varphi(h)$$

für alle $h \in U_0$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \varphi(h) = 0_W$ gilt.

(3) Ist $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$, dann ist $df(a)$ durch eine Matrix $J \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$ geg., mit den Einträgen $\partial_j f_i(a)$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

(4) Für die totale Ableitung gelten eine Reihe von Rechenregeln: Summenregel, Produktregel, Kettenregel

Erinnerung: Umkehrsatz / lokale Umkehrbarkeit

Seien V, W normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume der endlichen Dimension n .

Sei $U \subseteq V$ offen und $f: U \rightarrow W$ stetig differenzierbar.

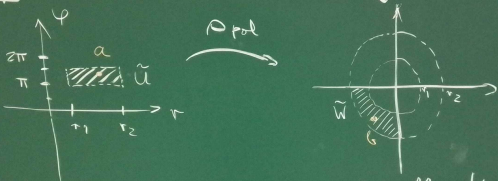
Sei $a \in U$ mit $\det df(a) \neq 0$ (d.h. $df(a) \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ ist eine invertierbare lineare Abbildung).

Dann gibt es offene Umgebungen $\tilde{U} \subseteq U$ von a und $\tilde{W} \subseteq W$ von $b = f(a)$, so dass $f|_{\tilde{U}}$ eine bijektive Abbildung $\tilde{U} \rightarrow \tilde{W}$ liefert, und außerdem gilt

$$\text{dof}(b) = df(a)^{-1} \text{ für die Umkehrabbildung}$$

$g: \tilde{W} \rightarrow \tilde{U}$ von $f|_{\tilde{U}}$.

Bsp Polarkoordinaten-Abbildung



Die Polarkoordinatenabb. bildet die offene Umgebung $\tilde{U}$ von a bijektiv auf die offene Umg. $\tilde{W}$ von b ab, und es gilt $d((\rho_{\text{pol}}|_{\tilde{U}})^{-1})(b) = d\rho_{\text{pol}}(a)^{-1}$.