

Satz (16.9)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine symmetrische Matrix und A_k jeweils die linke obere $k \times k$ -Teilmatrix, für $1 \leq k \leq n$. Genau dann ist A positiv definit, wenn

$$\det(A_k) > 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n$$

erfüllt ist.

Beweis von Satz 16.9 (Fortsetzung)

geg. $A \in M_{n, \mathbb{R}}$ symmetrisch mit $\det(A_k) > 0$
für $1 \leq k \leq n$

z.z.: A ist positiv definit, d.h. $b_A(v, v) > 0$ für
alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wobei $b_A(v, w) = \text{tr } A w$

Sei $\varepsilon_k = (e_1, \dots, e_k)$, $U_k = \langle \varepsilon_k \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$

$b_k: U_k \times U_k \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch die Einschränkung von b_A
auf den Untervektorraum U_k des $\mathbb{R}^n$

Ansatz: Zeige durch vollst. Ind. über k , dass b_k für
 $1 \leq k \leq n$ positiv definit ist. (Beachte: $b_n = b_A$)

$b_k: U_k \times U_k \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch die Einschränkung von b_A
auf den Untervektorraum U_k des $\mathbb{R}^n$

Ind.-Auf Sei $v \in U_1$, $v = (v_1, 0, \dots, 0)$ mit $v_1 \neq 0$

Dann gilt $b_A(v, v) = {}^t v A v = (v_1, 0, \dots, 0) A \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = v_1^2 a_{11}$.

außerdem: $A_1 = (a_{11}) \Rightarrow a_{11} = \det(A_1) > 0 \rightarrow b_A(v, v) > 0$

Also ist b_1 positiv definit.

Ind.-schritt Sei $k \in \{1, \dots, n-1\}$, setze voraus, dass b_k positiv
definit. z.z.: b_{k+1} ist positiv definit.

Da b_k positiv definit ist, existiert eine ON-Basis $(u_1, \dots, u_k)$
von U_k bzgl. b_k (klar: $U_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \dim U_k = k$)

Sei $w = \Pi_{U_k}(e_{k+1})$, wobei $\Pi_{U_k}: \mathbb{R}^n \rightarrow U_k$ die Orthogonal-
projektion auf U_k bezeichnet und $\tilde{u} = e_{k+1} - w$. Dann gilt
 $\tilde{u} \perp U_k$ bzgl. b_{k+1} . Setze $B = (u_1, \dots, u_k, \tilde{u})$

Wegen $\tilde{U} \perp U_k$ existiert dann ein $a \in \mathbb{R}$, so dass
die Darstellungsmatrix $M_B(b_{k+1})$ durch $\left(\begin{array}{c|c} E^{(k)} & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right)$

Außerdem gilt $\det M_B(b_{k+1}) = 1 \cdot a = a$

und $A_{k+1} = M_{\varepsilon_{k+1}}(b_{k+1})$. Setze $T = T_{\varepsilon_{k+1}}^B$.

Der Satz vom Basiswechsel (für Bilinearformen)

liefert $M_B(b_{k+1}) = {}^t T M_{\varepsilon_{k+1}}(b_{k+1}) T \Rightarrow$

$\det M_B(b_{k+1}) = \det(T)^2 \det(M_{\varepsilon_{k+1}}(b_{k+1})) \Rightarrow$

$a = \det(T)^2 \det(A_{k+1})$. T ist invertierbar.

$\Rightarrow \det(T) \neq 0$ $\det(A_{k+1}) > 0 \Rightarrow a > 0$

Daraus folgt, dass b_{k+1} positiv definit ist,

$$\Rightarrow \det(T) \neq 0 \quad \det(A_{k+1}) > 0 \Rightarrow a > 0$$

denn: Sei $v \in U_{k+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Setze

$$\Phi_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} \rightarrow \ell_{k+1}(v, v) = {}^t \Phi_B(v) M_B(\ell_{k+1}) \Phi_B(v)$$

$$= (\lambda_1 \dots \lambda_{k+1}) \left(\begin{array}{c|c} E^{(k)} & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = (\lambda_1 \dots \lambda_{k+1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ a \lambda_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^k \lambda_j^2 + \lambda_{k+1}^2 a \xrightarrow{a > 0} \ell_{k+1}(v, v) > 0 \quad \square$$

$\lambda_j \neq 0$ für mind. ein j

Folgerung (16.10)

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ ist genau dann **negativ definit**, wenn $(-1)^k \det(A_k) > 0$ für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

Proposition (16.11)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V . Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$. Unter diesen Voraussetzungen ist b genau dann positiv definit, wenn A positiv definit ist.

Definition (16.12)

- Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ wird **orthogonal** genannt, wenn ${}^tAA = E_n$ gilt.
- Die orthogonalen Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, die sogenannte **orthogonale Gruppe** $\mathcal{O}(n)$.
- Die Untergruppe $SO(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$ wird **spezielle orthogonale Gruppe** genannt.

Nachweis der Gruppeneigenschaft von

$$\mathcal{O}(n) = \{ A \in M_{n, \mathbb{R}} \mid {}^t A A = E_n \}$$

- Die Gleichung ${}^t A A = E_n$ zeigt, dass jedes $A \in \mathcal{O}(n)$ invertierbar ist, wobei $A^{-1} = {}^t A$.

- Überprüfe zunächst: $A, B \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathcal{O}(n)$

$$A, B \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow {}^t A A = E_n, {}^t B B = E_n$$

$$\Rightarrow {}^t (AB) (AB) = {}^t B {}^t A A B = {}^t B E_n B$$

$$= {}^t B B = E_n \Rightarrow AB \in \mathcal{O}(n)$$

Also liefert die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $\mathcal{O}(n)$. Diese erfüllt das

Assoziativgesetz

ii) $\Phi_{\mathbb{D}}(n)$

- Neutralelement: ${}^t E_n \cdot E_n = E_n \cdot E_n = E_n$
 $\Rightarrow E_n \in O(n)$ außerdem: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$
 $\forall A \in O(n)$

□

- Inverse: Zeige zunächst, dass für alle $A \in GL_n(\mathbb{R})$ jeweils ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$ gilt.
genügt zu überprüfen: ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^t A = E_n$
Tatsächlich gilt ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^t A = {}^t(AA^{-1}) = {}^t E_n = E_n$.

Sei nun $A \in O(n)$. Beh. $A^{-1} \in O(n)$

$$\Rightarrow \text{gilt } {}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} \stackrel{\text{so}}{=} ({}^t A)^{-1} \cdot A^{-1} = (A {}^t A)^{-1}$$

$$= (AA^{-1})^{-1} = E_n^{-1} = E_n \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$$

$$\stackrel{!}{=} A = A^{-1}$$

Aus der Beh. folgt, dass A^{-1} die Inverse von A in der Gruppe $O(n)$ ist.

Beispiele für orthogonale Matrizen in $O(2)$

(1) Drehungen $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 

(Drehung um $O_{\mathbb{R}^2}$ mit Winkel α gegen den Uhrzeigersinn)

(2) Spiegelung an der x -Achse $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) Spiegelung an der y -Achse $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Es gilt $D_\alpha \in SO(2)$, $S_x, S_y \notin SO(2)$.)

(4) Spiegelung an einer beliebigen Achse s

$D_\alpha S_x D_{-\alpha}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ so gewählt wird, dass die x -Achse auf die Achse s gedreht wird.

Proposition (16.13)

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ ist genau dann orthogonal, wenn $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Beweis von Prop. 16.13

Sei $A \in M_{n, \mathbb{R}}$. Beh.: $A \in \mathcal{O}(n) \iff \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
 $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$

" $\implies$ " $A \in \mathcal{O}(n) \implies tAA^T = E_n$ (x) Für $1 \leq i, j \leq n$ ist

der Eintrag von tAA^T an der Stelle (i, j) geg. durch
 $\langle v_i, v_j \rangle$, wobei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ die Spalten von A sind.

Aus (x) folgt also $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n$

$\implies \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n$

Seien nun $v, w \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^n \mu_j e_j$

$\implies \langle Av, Aw \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i Ae_i, \sum_{j=1}^n \mu_j Ae_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle Ae_i, Ae_j \rangle$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \delta_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i = \langle v, w \rangle$$

" $\Leftarrow$ " siehe Skript.



Definition (16.14)

Eine **Bewegung** im $\mathbb{R}^n$ ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Ein wichtige Klasse von Beispielen für Bewegungen sind die **Translationen**, die Abbildungen der Form

$$\tau_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad v \mapsto u + v$$

mit einem festen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$.

Zwei Hilfsaussagen

Lemma (16.15)

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|w\|^2$.

Lemma (16.16)

Sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit $\langle \psi(v), \psi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Matrix $A \in \mathcal{O}(n)$ mit $\psi = \phi_A$, insbesondere ist ψ linear.

Beweis von Lemma 16.16

geg. $n \in \mathbb{N}$, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildung mit
der Eigenschaft $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ (*)
für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$

Beh.: Es gibt eine Matrix $A \in O(n)$ mit $\varphi = \phi_A$

Aus (*) folgt, dass mit $(e_1, \dots, e_n)$ auch
 $\langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$, und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so definiert,
dass $\varphi(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(e_j)$ gilt.

Beh.: $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, d.h. die Komponente λ_j von v stimmt

mit λ_j überein, für $1 \leq j \leq n$

$$\langle \psi(v), \psi(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(e_i), \psi(e_j) \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \psi(e_i), \psi(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \quad \psi(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \psi(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle \psi(v), \psi(e_j) \rangle \psi(e_j) = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle \cdot \psi(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^n v_j \cdot \psi(e_j) \quad \text{also } v_j = \lambda_j \text{ für } 1 \leq j \leq n \text{ auf}$$

Grund der Basis-eigenschaft.

Daraus folgt nun, dass ψ linear ist, denn:

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$

und $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \Rightarrow v+w = \sum_{j=1}^n (v_j + w_j) e_j$ und

$\lambda v = \sum_{j=1}^n \lambda v_j e_j \Rightarrow \psi(v+w) \stackrel{\text{S.O.}}{=} \sum_{j=1}^n (v_j + w_j) \psi(e_j)$

$= \sum v_j \psi(e_j) + \sum w_j \psi(e_j) = \psi(v) + \psi(w)$

und $\psi(\lambda v) = \sum_{j=1}^n \lambda v_j \psi(e_j) = \lambda \sum_{j=1}^n v_j \psi(e_j)$
 $= \lambda \psi(v)$

ψ linear $\Rightarrow \exists A \in M_{n, \mathbb{R}}$ mit $\psi = \phi_A$

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle Av, Aw \rangle = \langle \phi_A(v), \phi_A(w) \rangle$

$\Rightarrow \langle \gamma(v), \gamma(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ Daraus folgt, dass
A in $\mathcal{O}(n)$ liegt.



Satz (16.17)

Die Bewegungen in $\mathbb{R}^n$ sind genau die Abbildungen der Form $\tau_u \circ \phi_A$, mit $u \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{O}(n)$. Die Darstellung dieser Form ist eindeutig. Liegt A sogar in $SO(n)$, dann spricht man von einer **orientierungserhaltenden**, ansonsten von einer **orientierungsumkehrenden** Bewegung.