Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorlesungsskript

Maß- und Integrationstheorie

Zusammenfassung

Bereits im ersten Semester haben wir das Riemann-Integral für beschränkte Funktionen einer Variablen, definiert auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall, kennengelernt. Das Ziel dieses Vorlesungsabschnitts besteht nun darin, den Integralbegriff auf Funktionen mehrerer Variablen zu verallgemeinern. Das Riemann-Integral kann auf naheliegende Weise auf höhere Dimensionen übertragen werden, allerdings erweist sich dieses Konzept für moderne Anwendungen als nicht flexibel genug. Beispielsweise hat man es häufig mit Funktionen auf unendlich ausgedehnten Definitionsbereichen zu tun, und oft ist auch der Wertebereich der Funktionen unbeschränkt.

Um einen möglichst vielseitig einsetzbaren Zugang zum Integralbegriff zu erhalten, entwickelt man zunächst eine Theorie der *Maße*, mit denen man Teilmengen einer gewissen Grundmenge, in der Regel des $\mathbb{R}^n$, ein „Volumen” zuordnen kann. Das am häufigsten verwendete Maßauf dem $\mathbb{R}^n$ ist das *Lebesgue-Maß*, mit dessen Konstruktion wir uns als erstes beschäftigen werden. Basierend auf dem Maßbegriff kann man anschließend gewissen reellwertigen Funktionen auf der Grundmenge ein Integral zuordnen. Im Fall des Lebesgue-Maßes erhält man das sogenannte *Lebesgue-Integral*, das eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals darstellt. Nachdem wir die wichtigsten grundlegenden Eigenschaften und elementare Rechenregeln für Integrale hergeleitet haben, befassen wir uns noch mit einigen fortgeschrittenen Integrationstechniken. Mit dem *Satz von Fubini* kann beispielsweise die Integration von Funktionen in hoher Dimension auf kleinere Dimension zurückgeführt werden, und die *Transformationsformel* stellt eine weitreichende Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel dar. Im einzelnen behandeln wir die folgenden Themen:

- Inhalte und Maße, Konstruktion des Lebesgue-Maßes
- messbare und integrierbare Funktionen
- Konvergenzsätze
- Produktmaße und Satz von Fubini
- Bildmaße und die Transformationsformel

Inhaltsverzeichnis

§ 1. *Die Unlösbarkeit des Maßproblems*

Im gesamten Text bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen, $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven und $\mathbb{R}_+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Ist X eine beliebige Menge, dann bezeichnet $\mathfrak{P}(X)$ ihre Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$.

Ein wichtiges Ziel der Maßtheorie besteht darin, auf einer möglichst großen Klasse $\mathcal{K}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Abbildung $\mu : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ zu definieren, so dass für jedes $A \in \mathcal{K}$ die Zahl $\mu(A)$ dem entspricht, was wir intuitiv unter dem „Volumen" von A verstehen würden. Bevor wir uns überlegen, welche Eigenschaften eine solche Abbildung haben sollte, erinnern wir zunächst an die folgende Definition.

> **Definition 1.1** Eine Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird ***Bewegung*** genannt, wenn eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}(n)$ und ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $\psi(x) = v + Ax$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Die Bewegungen der Form $\tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto v + x$ bezeichnet man als ***Translationen***. Weitere Beispiele für Bewegungen sind Spiegelungen an Hyperebenen oder Rotationen um beliebige $(n-2)$-dimensionale Drehachsen. Man kann zeigen, dass die Bewegungen genau die Abbildungen $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\|\psi(x) - \psi(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind, wobei $\|\cdot\|_2$ die gewöhnliche euklidische Norm bezeichnet. Man spricht deshalb auch von abstands-erhaltenden Abbildungen. Sei Teilmengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ werden ***kongruent*** genannt, und man schreibt $X \cong Y$, wenn eine Bewegung ψ des $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(X) = Y$ existiert.

Folgende Eigenschaften würde man nun für eine „vernünftige" Volumenfunktion μ naheliegenderweise voraussetzen. Sind A, B Elemente des Definitionsbereichs $\mathcal{K}$ von μ, dann sollte dies auch für $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ gelten. Weitere natürliche Bedingungen an μ lauten

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$ (falls $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{K}$ liegt)

(ii) *(Normierungsbedingung)*
Die n-dimensionalen abgeschlossenen Quader der Form $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \leq b_i$ sind in $\mathcal{K}$ enthalten, und es gilt $\mu(Q) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$.

(iii) *(Bewegungsinvarianz)*
Ist $A \in \mathcal{K}$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, dann liegt $\psi(A)$ in $\mathcal{K}$,
und es gilt $\mu(\psi(A)) = \mu(A)$.

(iv) *(endliche Additivität)*
Sind $A, B \in \mathcal{K}$ disjunkt (also $A \cap B = \varnothing$), dann gilt $A \cup B \in \mathcal{K}$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Bereits aus (i) und (iv) lassen sich weitere, „intuitiv naheliegende" Eigenschaften einer solchen Funktion μ herleiten.

Lemma 1.2 Seien $r \in \mathbb{N}_0$ und $A, B, A_1, ..., A_r$ Elemente aus $\mathcal{K}$, auf denen die Funktion μ endliche Werte annimmt.

(i) Unter der Voraussetzung $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \le \mu(B)$.

(ii) Es ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(iii) Sind die Mengen $A_1, ..., A_r \in \mathcal{K}$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{r} A_k \in \mathcal{K} \qquad \text{und} \qquad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\right) \quad = \quad \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k).$$

(Dabei bedeutet $r = 0$, dass die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{r} A_k$ leer ist. Die Summe auf der rechten Seiten ist dann gleich Null.)

Beweis: zu (i) Die Menge B kann disjunkt in die Teilmengen A und $B \setminus A$ zerlegt werden, also gilt $\mu(A) \le \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$.

zu (ii) Die Menge $A \cup B$ besitzt eine disjunkte Zerlegung in die Teilmengen $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$. Durch wiederholte Anwendung der endlichen Additivität erhalten wir

$$\mu(A \cup B) \quad = \quad \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \quad =$$

$$\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) - \mu(A \cap B) \quad = \quad \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

zu (iii) Auf Grund der Voraussetzung $\mu(\varnothing) = 0$ ist die Gleichung in den Fällen $r = 0, 1$ offensichtlich, und auf Grund der endlichen Additivität gilt sie auch für $r = 2$. Sei nun $r > 2$ und die Gleichung für alle kleineren Zahlen bereits bewiesen. Seien $A_1, ..., A_r \in \mathcal{K}$ paarweise disjunkte Mengen. Setzen wir $B = A_1 \cup ... \cup A_{r-1}$, dann gilt $\mu(B) = \sum_{k=1}^{r-1} \mu(A_k)$ nach Induktionsvoraussetzung. Weil B und A_r disjunkt sind, erhalten wir weiter

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\right) \quad = \quad \mu(B \cup A_r) \quad = \quad \mu(B) + \mu(A_r) \quad = \quad \sum_{k=1}^{r-1} \mu(A_k) + \mu(A_r) \quad = \quad \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k). \qquad \square$$

Die Eigenschaft (i) aus dem Lemma, die häufig als ***Monotonie*** bezeichnet wird, ist für Volumenberechnungen interessant. Bereits durch die Beschäftigung mit dem Riemann-Integral ist deutlich geworden, dass sich das Volumen vieler elementar-geometrischer Objekte (wie Kugeln, Pyramiden, Kegel, Zylinder) approximieren lässt, wenn man diese durch hinreichend kleine rechteckige Quader ausschöpft bzw. einschließt. Genauer bedeutet dies, dass man für jedes solche geometrische Objekt O endliche Vereinigungen A, B von „kleinen“ Quadern bilden kann, so dass $A \subseteq O \subseteq B$ und $\mu(A) \approx \mu(B)$ gilt. Auf Grund der Monotonie muss dann auch $\mu(O)$ ungefähr gleich $\mu(A)$ sein. Dies zeigt, dass eine Volumenfunktion μ mit den Eigenschaften (i) bis (iv) unserer anschaulichen Vorstellung von einem Volumen wirklich sehr nahe kommt. Aus Gründen, die hauptsächlich auf Anwendungen in der Analysis zurückgehen, und die erst im weiteren Verlauf der Vorlesung klar werden, verschärft man die Bedingung (iv) häufig zu

(iv)' Ist $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge von paarweise disjunkten Elementen aus $\mathcal{K}$, dann gilt

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathcal{K} \qquad \text{und} \qquad \mu\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Man spricht in diesem Fall von *abzählbarer Additivität* oder *σ-Additivität*. Diese Eigenschaft impliziert die endliche Additivität, denn sind $A_1,...,A_r$ endlich viele, paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{K}$, dann können wir $A_m = \varnothing$ für $m > r$ setzen und erhalten wegen $\mu(\varnothing) = 0$ die Gleichung unter (iv) zurück.

Unsere Hauptaufgabe in diesem Kapitel wird darin bestehen, eine Abbildung μ mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) und (iv)' auf einer möglichst großen Menge $\mathcal{K}$ zu konstruieren. Ideal wäre es natürlich, wenn man $\mathcal{K} = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ setzen, also *jeder* Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein Volumen zuordnen könnte. Das Problem, eine solche Zuordnung zu bestimmen, wird als *Maßproblem* bezeichnet. Seit langem ist jedoch bekannt, dass diese Problem nicht lösbar ist.

Satz 1.3 *(Guiseppe Vitali, 1905)*

Für keine natürliche Zahl n existiert eine Abbildung $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) und (iv)'.

Beweis: Wir definieren auf $\mathbb{R}^n$ eine Relation $\sim$ durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$. Man überprüft unmittelbar, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt. Jede Äquivalenzklasse besitzt einen Repräsentanten innerhalb des Einheitswürfels $[0,1]^n$, da für jedes $s \in \mathbb{R}^n$ sogar ein $r \in \mathbb{Z}^n$ mit $0 \le s_i - r_i < 1$ für $1 \le i \le n$ existiert. Auf Grund des Auswahlaxioms der Mengenlehre kann also innerhalb von $[0,1]^n$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von $\sim$ gewählt werden, also eine Teilmenge $A \subseteq [0,1]^n$ mit der Eigenschaft, dass jedes für jedes $s \in \mathbb{R}^n$ ein *eindeutig bestimmtes* $a \in A$ mit $s \sim a$ existiert.

Sei nun $B = [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ und $C = \bigcup_{r \in B}(r + A)$. Bei C handelt es sich um eine *disjunkte*, *abzählbare* Vereinigung von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Die Abzählbarkeit ist klar, da B als Teilmenge der abzählbaren Menge $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist. Seien nun $r, r' \in B$ so gewählt, dass $r + A$ und $r' + A$ nicht disjunkt sind. Dann gibt es Elemente $a, a' \in A$ mit $r + a = r' + a'$. Nach Definition unserer Äquivalenzrelation folgt $a \sim a'$ und damit $a = a'$, weil A ein Repräsentantensystem der Relation ist. Dies wiederum bedeutet $r = r'$, also ist die Vereinigung tatsächlich disjunkt.

Nun beweisen wir die Inklusionen $[0,1]^n \subseteq C \subseteq [-1,2]^n$. Ist $s \in [0,1]^n$, dann gibt es (auf Grund der Eigenschaft von A, Repräsentantensystem zu sein) Elemente $a \in A$ und $r \in \mathbb{Q}^n$ mit $s = r + a$. Für $1 \le i \le n$ ist $r_i = s_i - a_i \in [-1,1]$ und somit $r \in [-1,1]^n$. Es folgt $s = r + a \in C$. Ist nun $s \in C$ vorausgesetzt, dann gibt es Elemente $r \in B \subseteq [-1,1]^n$ und $a \in A \subseteq [0,1]^n$ mit $s = r + a$. Aus $-1 \le r_i \le 1$ und $0 \le a_i \le 1$ folgt $-1 \le s_i \le 2$ für $1 \le i \le n$.

Nehmen wir nun an, $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ist eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) bis (iv)'. Aus der Monotonie folgt dann $1 = \mu([0,1]^n) \le \mu(C) \le \mu([-1,2]^n) = 3^n$. Die Eigenschaft (iv'), die Bewegungsinvarianz sowie die Darstellung von C als disjunkte, abzählbare Vereinigung liefern

$$\mu(C) \quad = \quad \sum_{r \in B} \mu(r + A) \quad = \quad \sum_{r \in B} \mu(A).$$

Aus $\sum_{r \in B} \mu(A) = \mu(C) \ge 1$ folgt $\mu(A) > 0$ und somit $\sum_{r \in B} \mu(A) = +\infty$. Dies aber steht im Widerspruch zur zweiten Ungleichung $\mu(C) \le 3^n$. □

Wird an Stelle von (iv)' nur die schwächere Bedingung (iv) gefordert, so spricht man vom Inhaltsproblem. Dass auch dieses Problem i.a. unlösbar ist, wird eindrucksvoll belegt durch das

Satz 1.4 *(Banach-Tarski-Paradoxon)*

Seien X und Y beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ mit einem nichtleeren Inneren. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und disjunkte Zerlegungen

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \qquad \text{und} \qquad Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n \quad ,$$

so dass $X_j \cong Y_j$ für $1 \leq j \leq n$ erfüllt ist.

Beweis: Ein elementarer Beweis wird in [Str] beschrieben. □

Beispielsweise sind $X = [0,1]^3$ und $Y = [0,2]^3$ Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ mit einem nichtleeren Inneren, auf welche folglich die Aussage des Banach-Tarski-Paradoxons angewendet werden kann. Nehmen wir nun an, dass es sich bei $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ um eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) bis (iv) handelt. Sind $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ die Mengen aus der im Banach-Tarski-Paradoxon angegebenen disjunkten Zerlegung, dann liefern diese Eigenschaften den Widerspruch

$$1 \quad = \quad \mu([0,1]^3) \quad = \quad \mu(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mu(Y_i) \quad = \quad \mu(Y) \quad = \quad \mu([0,2]^3) \quad = \quad 8.$$

Auch im $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 4$ ist das Inhaltsproblem unlösbar. Für $n = 1, 2$ gibt es überraschenderweise Lösungen, aber diese sind nicht eindeutig bestimmt (für Beweise siehe [Wa]).

§ 2. Der Jordansche Inhalt

Zusammenfassung. Um die Konstruktion des Lebesgue-Maßes vorzubereiten, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt zunächst mit den *Inhalten* auf *Mengenringen*. Bei Letzteren handelt es sich um Mengensysteme, die unter gewissen Operationen abgeschlossen sind, unter anderem bezüglich endlicher Vereinigungen. Erstere ordnen den Mengen in einem solchen System Werte zu, die man als „Volumen“ dieser Mengen interpretieren kann.

Um einen Volumenbegriff zu erhalten, der der anschaulichen Vorstellung nahekommt, betrachten wir zunächst den Mengenring der Figuren. Dies sind endliche Vereinigungen von Quadern, denen man auf naheliegende Weise ein Volumen zuordnen kann. Dieses bezeichnet man als den *Jordan-Inhalt* der Figur. Anschließend werden wir die Definition des Jordan-Inhalt auf eine möglichst große Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Wichtige Grundbegriffe

- Mengenhalbring und Mengenhalbalgebra
- Mengenring und Mengenalgebra
- Inhalt auf einem Mengenhalbring
- erzeugter Mengenring
- inneres und äußeres Maß eines Inhalts
- Intervall, Quader, Figar
- Volumen eines Quaders
- Jordan-Messbarkeit und Jordan-Inhalt

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, wird es uns nicht gelingen, beliebigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf sinnvolle Weise ein Volumen zuzuordnen. Unser erstes Ziel ist daher die Definition von Mengensystemen, auf denen eine geeignete Volumenfunktion existiert. In den folgenden Abschnitten bezeichnet Ω stets eine beliebige Menge.

Definition 2.1 Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ wird ***Mengenhalbring*** in Ω genannt, wenn $\varnothing \in \mathcal{H}$ gilt und außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Sind $A, B \in \mathcal{H}$, dann liegt auch $A \cap B$ in $\mathcal{H}$.

(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{H}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $C_1, ..., C_r \in \mathcal{H}$, so dass $A \setminus B$ als *disjunkte* Vereinigung $A \setminus B = C_1 \cup ... \cup C_r$ dargestellt werden kann.

Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathcal{H}$, dann nennt man $\mathcal{H}$ eine ***Halbalgebra***.

Im ersten Semester haben wir die ***Intervalle*** eingeführt als Teilmengen $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ auch jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ in I enthalten ist. Die Intervalle sind also genau die *konvexen*

Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es ist leicht zu sehen, dass die Intervalle einen Mengenhalbring in $\mathbb{R}$ bilden. Auch die endlichen Intervalle bilden einen Mengenhalbring.

Satz 2.2 Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ zwei Mengenhalbringe in Ω bzw. Ω'. Dann ist auch das Mengensystem

$$\{A \times A' \mid A \in \mathcal{H}, A' \in \mathcal{H}'\} \qquad \text{ein Mengenhalbring.}$$

Beweis: Wir bezeichnen das angegebene System von Teilmengen von $\Omega \times \Omega'$ mit $\mathcal{H}''$. Zunächst gilt $\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{H}''$. Seien nun $A \times A'$, $B \times B'$ zwei Elemente in $\mathcal{H}''$, mit $A, B \in \mathcal{H}$ und $A', B' \in \mathcal{H}'$. Weil $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Halbringe sind, gilt $A \cap B \in \mathcal{H}$ und $A' \cap B' \in \mathcal{H}'$. Es folgt $(A \times A') \cap (B \times B') = (A \cap B) \times (A' \cap B') \in \mathcal{H}''$. Wir haben damit Bedingung (i) der Halbring-Eigenschaft verifiziert.

Nun zeigen wir, dass $(A \times A') \setminus (B \times B')$ für $\mathcal{H}''$ die Bedingung (ii) in Definition 2.1 erfüllt. Weil $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Halbringe sind, gibt es $r, s \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{H}$, $C'_1, \ldots, C'_s \in \mathcal{H}'$, so dass $A \setminus B$ und $A' \setminus B'$ als disjunkte Vereinigungen

$$A \setminus B = C_1 \cup \ldots \cup C_r \qquad \text{und} \qquad A' \setminus B' = C'_1 \cup \ldots \cup C'_s$$

dargestellt werden können. Die Menge $(A \times A') \setminus (B \times B')$ zerfällt disjunkt in die Teilmengen $(A \cap B) \times (A' \setminus B')$, $(A \setminus B) \times (A' \cap B')$ und $(A \setminus B) \times (A' \setminus B')$. Es gilt

$$(A \cap B) \times (A' \setminus B') = \bigcup_{j=1}^{s} (A \cap B) \times C'_j \quad , \quad (A \setminus B) \times (A' \cap B') = \bigcup_{i=1}^{r} C_i \times (A' \cap B')$$

und

$$(A \setminus B) \times (A' \setminus B') = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} C_i \times C'_j.$$

Sämtliche Vereinigungen sind disjunkt, und die in den Vereinigungen vorkommenden Mengen sind alle in $\mathcal{H}''$ enthalten. Damit ist die Halbring-Eigenschaft (ii) nachgewiesen. □

Als ***Quader*** im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir im Folgenden ein kartesisches Produkt $I_1 \times \ldots \times I_n$ von endlichen Intervallen. Nach Satz 2.2 bilden die Quader einen Mengenhalbring im $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.3 Ein ***Mengenring*** ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften, dass $\varnothing \in \mathcal{R}$ gilt und mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ in $\mathcal{R}$ liegen. Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathcal{R}$, dann spricht man von einer ***Mengenalgebra***.

Sind A, B Elemente eines Mengenrings $\mathcal{R}$, dann sind auch die symmetrische Differenz gegeben durch $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ und der Durchschnitt $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B)$ in $\mathcal{R}$ enthalten. Insbesondere ist jeder Mengenring ein Mengenhalbring. Man kann leicht überprüfen, dass $\mathcal{R}$ mit $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation ein Ring im Sinne der Algebra ist, allerdings ohne Einselement. Der anderorts definierte Begriff der *Algebra* als Vektorraum mit einer zusätzlichen multiplikativen Verknüpfung steht allerdings mit unserem Begriff in keinem Zusammenhang.

Wir werden nun sehen, wie aus einem Mengenhalbring auf natürliche Weise ein Mengenring gewonnen werden kann.

Definition 2.4 Wir sagen, ein Mengenring $\mathcal{R}$ wird von einer beliebigen Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ***erzeugt***, wenn $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{E}$ gilt und für jeden Ring $\mathcal{S}$ in Ω mit $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{E}$ auch $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$ erfüllt ist.

Offenbar ist der von einer Menge $\mathcal{E}$ erzeugte Ring eindeutig bestimmt. Sind nämlich $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ zwei von $\mathcal{E}$ erzeugte Ringe, dann gilt nach Definition $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$, insgesamt also $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$. Wir bezeichnen den von $\mathcal{E}$ erzeugten Ring mit $\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Ist $\mathcal{E}$ ein Halbring, dann lassen sich die Elemente von $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ folgendermaßen charakterisieren.

Satz 2.5 Sei $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Halbring. Dann gilt

(i) Die Elemente von $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ sind die endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$.

(ii) Die Elemente von $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ sind die endlichen *disjunkten* Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Eigenschaft (ii). Dass $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ alle endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$ enthält, beweist man unmittelbar durch vollständige Induktion unter Verwendung der Voraussetzungen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{H})$ und $A, B \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Es bleibt zu zeigen, dass die Menge $\mathcal{R}_1$ der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$ ein Ring ist. Zunächst gilt $\varnothing \in \mathcal{R}_1$, da auch $\varnothing$ nach unserer Konvention eine endliche Vereinigung (bestehend aus null Mengen) ist. Seien nun $A, B \in \mathcal{R}_1$ und $A = P_1 \cup \ldots \cup P_r$, $B = Q_1 \cup \ldots \cup Q_s$ von A und B als disjunkte Vereinigungen von Mengen $P_i, Q_j \in \mathcal{H}$. Für $A \cap B$ existiert die Darstellung als disjunkte Vereinigung

$$A \cap B \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} (P_i \cap Q_j) \quad ,$$

und auf Grund der Halbring-Eigenschaft von $\mathcal{H}$ gilt $P_i \cap Q_j \in \mathcal{H}$ für $1 \le i \le r$, $1 \le j \le s$. Daraus folgt $A \cap B \in \mathcal{R}_1$. Für die Differenz erhalten wir die Darstellung als disjunkte Vereinigung

$$A \setminus B \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} (P_i \setminus B) \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} \left(\bigcap_{j=1}^{s} (P_i \setminus Q_j) \right).$$

Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathcal{R}_1$ abgeschlossen unter Durchschnitten ist, deshalb genügt es zu überprüfen, dass die Mengen $P_i \setminus Q_j$ in $\mathcal{R}_1$ enthalten sind. Dies folgt aber wiederum aus der Halbring-Eigenschaft von $\mathcal{H}$, denn auf Grund dessen ist $P_i \setminus Q_j$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{H}$. Schließlich liegt auch $A \cup B$ in $\mathcal{R}_1$, denn wir können $A \cup B$ als disjunkte Vereinigung der Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$ darstellen, die (wie bereits gezeigt) in $\mathcal{R}_1$ enthalten sind. Damit ist der Beweis von Aussage (ii) abgeschlossen.

Zum Beweis von (i) bemerken wir zunächst, dass $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ auf Grund der Ringeigenschaft sämtliche endlichen Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{H}$ enthält. Umgekehrt ist jedes Element aus $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, wie wir schon gezeigt haben, sogar eine endliche *disjunkte* Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{H}$. □

Definition 2.6 Eine ***Figur*** im $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Vereinigung von Quadern, also eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $F = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, mit $r \in \mathbb{N}_0$ und Quadern $Q_1, \ldots, Q_r$ im $\mathbb{R}^n$.
(Im Fall $r = 0$ ist $F = \varnothing$.)

Aus Satz 2.5 folgt unmittelbar, dass die Figuren im $\mathbb{R}^n$ einen Ring bilden. Wir kommen nun zur Einführung eines geeigneten Volumenbegriffs.

Definition 2.7 Ein ***Inhalt*** auf einem Halbring $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ mit $c(\varnothing) = 0$ und

$$c(A_1 \cup \ldots \cup A_r) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c(A_i)$$

für $r \in \mathbb{N}_0$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft, das auch die Vereinigung $A_1 \cup \ldots \cup A_r$ in $\mathcal{H}$ enthalten ist. Man bezeichnet diese Eigenschaft als ***endliche Additivität***.

Der Begriff des Inhalts ist auf Mengenringen genauso definiert wie auf Mengenhalbringen, d.h. eine Abbildung $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ auf einem Mengenring $\mathcal{R}$ ist genau dann ein Inhalt, wenn sie die beiden in Definition 2.7 genannten Eigenschaften besitzt. Zum Nachweis der Inhaltseigenschaft genügt es bei Mengen allerdings, die Gültigkeit der Gleichung $c(A_1 \cup A_2) = c(A_1) + c(A_2)$ für zwei disjunkte $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ zu nachzuweisen. Die Aussage für beliebiges $r \in \mathbb{N}_0$ erhält man dann durch vollständige Induktion. Für Mengenhalbringen $\mathcal{H}$ ist dies in dieser Form nicht möglich: Der Induktionsschritt funktioniert nicht, denn aus der Voraussetzung, dass $A_1 \cup \ldots \cup A_{r+1}$ in $\mathcal{H}$ liegt, darf nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass auch $A_1 \cup \ldots \cup A_r$ in $\mathcal{H}$ liegt, selbst dann nicht, wenn $A_j \in \mathcal{H}$ für $1 \leq j \leq r+1$ vorausgesetzt ist.

Unser nächstes Ziel besteht darin, auf dem Mengenhalbring der Quader im $\mathbb{R}^n$ einen Inhalt einzuführen. Dazu legen wir die folgende Notation fest: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, dann bezeichnet man den Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ als *Träger* $\operatorname{supp}(f)$ von f. Ist der Träger von f in einem endlichen, abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ enthalten und f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, dann definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Man überprüft leicht, dass dieses Integral von der Wahl des Intervalls $[a, b]$ unabhängig ist. Sind die Träger von f und g in einem endlichen, abgeschlossenen Intervall enthalten, dann gilt dasselbe auch für $\operatorname{supp}(f+g)$, und es ist

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g)(x)\,dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx.$$

Für jedes endliche Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $a < b$ ist, bezeichnen wir $c_1(I) = \ell(I) = b - a$ als die ***Länge*** des Intervalls.

Wenden wir uns nun den höheren Dimensionen zu. Ist Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$ und kartesisches Produkt der Intervalle $I_1, ..., I_n$, so bezeichnen wir $c_n(Q) = \prod_{j=1}^n \ell(I_j)$ als das ***Volumen*** des Quaders. Wir verwenden von nun an $\mathcal{H}_n$ als Bezeichnung für den Halbring der Quader im $\mathbb{R}^n$, und $\mathcal{R}_n$ für den Ring der Figuren. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine beliebige Teilmenge, dann definieren wir

$$A_x \quad = \quad \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in A\} \qquad \text{für jedes} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ist X eine Menge und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge, dann bezeichnen wir die Abbildung

$$1_A : X \longrightarrow \{0,1\} \quad , \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in A \\ 0 & \text{falls} \quad x \notin A \end{cases}$$

als ***Indikatorfunktion*** der Menge A. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, dann gilt offenbar

$$\int_{\mathbb{R}} 1_I(x)\,dx \quad = \quad c_1(I) \quad = \quad \ell(I) \quad ,$$

insbesondere ist das Integral definiert. Dies überprüft man unmittelbar, indem man die möglichen Fälle für das Intervall I einzeln durchgeht.

Lemma 2.8 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{H}_{n+1}$. Dann ist der Träger der Funktion auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto c_n(A_x)$ in einem abgeschlossenen Intervall enthalten, die Funktion ist dort Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\,dx \quad = \quad c_{n+1}(A).$$

Beweis: Da A ein Quader in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, gibt es nach Definition ein endliches Intervall I und einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $A = I \times Q$ ist. Es gilt dann

$$A_x = \begin{cases} Q & \text{für} \quad x \in I \\ \varnothing & \text{für} \quad x \notin I \end{cases} \quad , \quad \text{also} \qquad c_n(A_x) = \begin{cases} c_n(Q) & \text{für} \quad x \in I \\ 0 & \text{für} \quad x \notin I. \end{cases}$$

Der Träger der Funktion $x \mapsto c_n(A_x)$ ist also im Abschluss $\bar{I}$ von I enthalten. Dabei ist $\bar{I}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall der Form $[a,b]$, und es gilt $\ell(I) = \ell(\bar{I}) = b - a$. Da die Funktion $x \mapsto c_n(A_x)$ auf I konstant ist, ist sie auf $\bar{I}$ Riemann-integrierbar. Für den Wert des Integrals erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\,dx \quad = \quad \int_a^b c_n(A_x)\,dx \quad = \quad \ell(I)c_n(Q) \quad = \quad c_{n+1}(I \times Q) \quad = \quad c_{n+1}(A). \qquad \square$$

Satz 2.9 Durch die Volumenfunktion $c_n : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt auf dem Mengenhalbring $\mathcal{H}_n$ gegeben.

Beweis: Nach Definition gilt $c_n(\emptyset)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Die zweite Eigenschaft einer Inhalts-Abbildung beweisen wir durch vollständige Induktion über n. Sei zunächst $n=1$, $r\in\mathbb{N}_0$, und seien $A_1,\dots,A_r\in\mathcal{H}_1$ paarweise disjunkt und nichtleer mit der Eigenschaft, dass auch $A=A_1\cup\dots\cup A_r$ in $\mathcal{H}_1$ liegt. Weil die Mengen $A_1,\dots,A_r$ paarweise disjunkt sind, gilt $1_A(x)=\sum_{i=1}^r 1_{A_i}(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, und es folgt

$$c_1(A) \quad=\quad \int_{\mathbb{R}} 1_A(x)\,dx \quad=\quad \int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^r 1_{A_i}(x) \quad=\quad \sum_{i=1}^r\int_{\mathbb{R}} 1_{A_i}(x)\,dx \quad=\quad \sum_{i=1}^r c_1(A_i).$$

Sei nun $n\in\mathbb{N}$ und die Inhalts-Eigenschaft für n bereits bewiesen. Seien $A_1,\dots,A_r\in\mathcal{H}_{n+1}$ paarweise disjunkt mit $A=A_1\cup\dots\cup A_r\in\mathcal{H}_{n+1}$. Mit $A_1,\dots,A_r$ sind auch die n-dimensionalen Quader $(A_i)_x$ für alle $x\in\mathbb{R}$ jeweils disjunkt. Es gilt $A_x=(A_1)_x\cup\dots\cup(A_r)_x$ für jedes $x\in\mathbb{R}$, denn für alle $y\in\mathbb{R}^n$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} y\in A_x \quad&\Leftrightarrow\quad (x,y)\in A \quad\Leftrightarrow\quad \exists i\in\{1,\dots,r\}:(x,y)\in A_i \quad\Leftrightarrow \\ &\exists i\in\{1,\dots,r\}: y\in(A_i)_x \quad\Leftrightarrow\quad y\in\bigcup_{i=1}^r (A_i)_x \end{aligned}$$

Durch Anwendung von Lemma 2.7 und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir somit

$$\begin{aligned} c_{n+1}(A) \quad&=\quad \int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\,dx \quad=\quad \int_{\mathbb{R}} c_n\left(\bigcup_{i=1}^r (A_i)_x\right)dx \quad=\quad \int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^r c((A_i)_x)\,dx \\ &=\quad \sum_{i=1}^r\int_{\mathbb{R}} c_n((A_i)_x)\,dx \quad=\quad \sum_{i=1}^r c_{n+1}(A_i). \end{aligned}$$

□

Der soeben eingeführte Inhalt soll nun auf den Ring der Figuren fortgesetzt werden.

Satz 2.10 Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring. Dann gibt es für jeden Inhalt $c:\mathcal{H}\to\mathbb{R}_+$ einen eindeutig bestimmten Inhalt $\tilde{c}$ auf $\mathcal{R}$ mit $\tilde{c}|_{\mathcal{H}}=c$ (also eine Fortsetzung von c auf $\mathcal{R}$).

Beweis: Zunächst beweisen wir die Eindeutigkeit. Sei $\tilde{c}$ eine beliebige Fortsetzung von c zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}$ und $A\in\mathcal{R}$. Ist $A=P_1\cup\dots\cup P_r$ eine beliebige Darstellung von A als disjunkte Vereinigung von Mengen $P_i\in\mathcal{H}$, dann gilt

$$\tilde{c}(A) \quad=\quad \sum_{i=1}^r \tilde{c}(P_i) \quad=\quad \sum_{i=1}^r c(P_i). \tag{2.1}$$

Zum Nachweis der Existenz wählen wir für jedes $A\in\mathcal{R}$ eine Darstellung als disjunkte Vereinigung $P_1\cup\dots\cup P_r$ mit $P_i\in\mathcal{H}$ und definieren $\tilde{c}(A)$ durch (2.1). Nach Definition gilt dann $\tilde{c}(\emptyset)=\emptyset$. Ersetzt man in (2.1) die Mengen P_i durch eine beliebige andere Darstellung von A als disjunkte Vereinigung $Q_1\cup\dots\cup Q_s$ mit $Q_j\in\mathcal{H}$, so erhält man denselben Wert. Jedes P_i kann nämlich disjunkt in

$$P_i \quad=\quad (P_i\cap Q_1)\cup\dots\cup(P_i\cap Q_s)$$

zerlegt werden. Die Elemente $P_i\cap Q_j$ liegen in $\mathcal{H}$, und weil c ein Inhalt auf $\mathcal{H}$ ist, gilt

$$\sum_{i=1}^r c(P_i) \quad=\quad \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^s c(P_i\cap Q_j).$$

Ebenso beweist man die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{s} c(Q_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c(P_i \cap Q_j) \quad ,$$

womit die Unabhängigkeit von der Wahl der Zerlegung von A bewiesen ist. Nun zeigen wir, dass $\tilde{c}(A \cup B) = \tilde{c}(A) + \tilde{c}(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathcal{R}$ gilt. Seien $A = P_1 \cup ... \cup P_r$ und $B = Q_1 \cup ... \cup Q_s$ die zu Beginn gewählten Darstellungen von A, B als disjunkte Vereinigungen von Mengen $P_i, Q_j \in \mathcal{H}$. Dann kann (auf Grund der bewiesenen Unabhängigkeit) der Wert $\tilde{c}(A \cup B)$ mit Hilfe der disjunkten Zerlegung $P_1 \cup ... \cup P_r \cup Q_1 \cup ... \cup Q_s$ ausgerechnet werden, und wir erhalten

$$\tilde{c}(A \cup B) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c(P_i) + \sum_{j=1}^{s} c(Q_j) \quad = \quad \tilde{c}(A) + \tilde{c}(B). \qquad \square$$

Aus Satz 2.10 folgt unmittelbar die Existenz eines Inhalts $c_n : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}_+$ auf dem Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$. Als nächstes beschäftigen wir uns nun mit der Frage, wie Inhaltsfunktionen auf beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden können.

Definition 2.11 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt und $A \subseteq \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind das ***innere Maß*** $c_*(A)$ bzw. das ***äußere Maß*** $c^*(A)$ von A bezüglich c definiert durch

$$c_*(A) = \sup\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \subseteq A\} \qquad \text{und} \qquad c^*(A) = \inf\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \supseteq A\}.$$

Sowohl beim inneren als auch beim äußeren Maß ist auch der Wert $+\infty$ möglich. Beim inneren Maß $c_*(A)$ tritt dieser Fall ein, wenn die Menge $\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \subseteq A\}$ in $\mathbb{R}_+$ unbeschränkt ist, und beim äußeren Maß $c^*(A)$, wenn $\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \supseteq A\}$ die leere Menge ist.

Beim folgenden Lemma setzen wir voraus, dass (entsprechend der üblichen Konvention) für alle $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ die Abschätzung $a \leq +\infty$ und im Fall $a = +\infty$ oder $b = +\infty$ die Gleichung $a + b = +\infty$ erfüllt ist.

Lemma 2.12 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt, und seien $A, B \subseteq \Omega$ beliebig.

(i) Aus $A \subseteq B$ folgt $c_*(A) \leq c_*(B)$ und $c^*(A) \leq c^*(B)$.

(ii) Allgemein gilt $c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B)$.

(iii) Sind A und B disjunkt, dann gilt $c_*(A \cup B) \geq c_*(A) + c_*(B)$.

Beweis: zu (i) Die Menge $M_1 = \{c(C) \mid C \in \mathcal{R}, C \subseteq A\}$ ist in $M_2 = \{c(C) \mid C \in \mathcal{R}, C \subseteq B\}$ enthalten, weil für jedes $C \in \mathcal{R}$ mit $C \subseteq A$ auch $C \subseteq B$ gilt. Im Fall $c_*(B) = +\infty$ ist $c_*(A) \leq c_*(B)$ offenbar erfüllt. Ansonsten ist $c_*(B) = \sup(M_2)$ eine obere Schranke von M_1. Weil $c_*(A) = \sup(M_1)$ die kleinste obere Schranke von M_1 ist, folgt $c_*(A) \leq c_*(B)$. Der Beweis der Abschätzung $c^*(A) \leq c^*(B)$ läuft analog.

zu (ii) Wir können davon ausgehen, dass $c^*(A)$ und $c^*(B)$ beide endlich sind, denn ansonsten ist die Ungleichung offensichtlich. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition des äußeren Maßes gibt es Mengen $A_1, B_1 \in \mathcal{R}$ mit $A_1 \supseteq A$, $B_1 \supseteq B$ mit $c(A_1) \leq c^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$ und $c(B_1) \leq c^*(B) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Wegen $A \cup B \subseteq A_1 \cup B_1$ liegt $c(A_1 \cup B_1)$ in der Menge $\{c(C) \mid C \in \mathcal{R}, C \supseteq A \cup B\}$. Weil $c^*(A \cup B)$ eine untere Schranke dieser Menge ist, gilt $c^*(A \cup B) \leq c(A_1 \cup B_1) \leq c(A_1) + c(B_1) \leq c^*(A) + c^*(B) + \varepsilon$. Weil ε beliebig vorgegeben war, folgt $c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B)$.

zu (iii) Wir setzen voraus, dass $c_*(A \cup B)$ endlich ist. Nach Teil (i) und wegen $A, B \subseteq A \cup B$ sind dann auch $c_*(A)$ und $c_*(B)$ endlich. Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ finden wir $A_0, B_0 \in \mathcal{R}$ mit $A \supseteq A_0$, $B \supseteq B_0$ und $c(A_0) \geq c_*(A) - \frac{1}{2}\varepsilon$, $c(B_0) \geq c_*(B) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Mit A, B sind auch A_0, B_0 disjunkt. Zusammen mit der Inklusion $A_0 \cup B_0 \subseteq A \cup B$ folgt daraus $c_*(A \cup B) \geq c(A_0 \cup B_0) = c(A_0) + c(B_0) \geq c_*(A) + c_*(B) - \varepsilon$. Lassen wir ε gegen Null laufen, so erhalten wir $c_*(A \cup B) \geq c_*(A) + c_*(B)$. □

Lemma 2.13 Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt $c_*(A) \leq c^*(A)$.

Beweis: Zunächst betrachten wir den Fall, dass $c_*(A)$ unendlich ist. Angenommen, $c^*(A)$ ist endlich. Nach Definition des Infimums existiert dann ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A$ und $c(B) \leq c^*(A) + 1$. Wegen $c_*(A) = +\infty$ finden wir ein $C \in \mathcal{R}$ mit $C \subseteq A$ mit $c(C) > c(B)$. Wegen $C \subseteq A \subseteq B$ muss andererseits $c(C) \leq c(B)$ gelten, wir erhalten also einen Widerspruch. Also muss $c^*(A) = +\infty$ gelten.

Seien nun $c^*(A)$ und $c_*(A)$ beide endlich, aber $c_*(A) > c^*(A)$. Nach Definition des Infimums finden wir ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A$ und $c(B) < c_*(A)$. Nach Definition des Supremums gibt es andererseits ein $C \subseteq A$ und $c(C) > c(B)$. Wiederum ergibt sich wegen $C \subseteq A \subseteq B$ ein Widerspruch zur Monotonie. □

Lemma 2.14 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann gilt $c_*(A) = c^*(A) = c(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Beweis: Die Zahl $c(A)$ ist in der Menge $\{c(B) \mid B \subseteq A\}$ enthalten. Weil das Supremum eine obere Schranke dieser Menge ist, gilt $c(A) \leq c_*(A)$. Nehmen wir an, dass $c(A) < c_*(A)$ ist. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq A$ und $c_*(A) \geq c(B) > c(A)$, was aber der Monotonie der Inhaltsfunktion c widerspricht. Also muss $c(A) = c_*(A)$ gelten.

Für das äußere Maß verläuft der Beweis völlig analog. Die Zahl $c(A)$ ist ein Element der Menge $\{c(B) \mid B \supseteq A\}$, nach Definition des Infimums gilt also $c(A) \geq c^*(A)$. Durch die Annahme $c(A) > c^*(A)$ erhält man ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A$ und $c^*(A) \leq c(B) < c(A)$, was aber auf Grund der Monotonie von c unmöglich ist. Also gilt auch $c(A) = c^*(A)$. □

Definition 2.15 Sind die Werte $c_*(A)$ und $c^*(A)$ beide endlich und gilt $c_*(A) = c^*(A)$, dann bezeichnen wir A als ***c-messbar*** und definieren $c(A) = c^*(A)$. Die c_n-messbaren Teilmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ werden auch als ***Jordan-messbar*** bezeichnet, und man nennt $c_n(E)$ den ***Jordan-Inhalt*** der Teilmenge E.

Lemma 2.16 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $E \subseteq \Omega$ beliebig und $A \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A \Delta E) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dann gibt es Mengen $A', B' \in \mathcal{R}$ mit $A' \subseteq E \subseteq B'$, $A' \subseteq A \subseteq B'$ und der Abschätzung $c(B' \setminus A') < \varepsilon$.

Beweis: Nach Definition des äußeren Maßes existiert ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A \Delta E$ und $c(B) < \varepsilon$. Auf Grund der Ringeigenschaft liegen $B' = A \cup B$ und $A' = A \setminus B$ beide in $\mathcal{R}$, und es gilt $B' \setminus A' = B$, also $c(B' \setminus A') = c(B) < \varepsilon$. Außerdem ist $A' = A \setminus B \subseteq A \setminus (A \Delta E) \subseteq E$ und $E \subseteq A \cup (A \Delta E) \subseteq A \cup B = B'$. Die Inklusionen $A' \subseteq A \subseteq B'$ sind offensichtlich. □

Satz 2.17 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Für eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Menge E ist c-messbar.

(ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$.

(iii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $A \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A \,\Delta\, E) < \varepsilon$.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition von $c^*(E)$ existiert ein $B \in \mathcal{R}$ mit $E \subseteq B$ und $c(B) < c^*(E) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Ebenso finden wir ein $A \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E$ und $c(A) > c_*(E) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Weil E messbar bezüglich c ist, gilt $c(E) = c_*(E) = c^*(E)$, und die disjunkte Zerlegung von B in A und $B \setminus A$ liefert $c(B) = c(A) + c(B \setminus A)$. Insgesamt erhalten wir $c(B \setminus A) = c(B) - c(A) < (c(E) + \frac{1}{2}\varepsilon) - (c(E) - \frac{1}{2}\varepsilon) = \varepsilon$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung existieren Elemente $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$. Es folgt $c^*(E) - c_*(E) \le c(B) - c(A) = c(B \setminus A) < \varepsilon$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt war, bedeutet dies $c^*(E) = c_*(E)$, d.h. E ist messbar bezüglich c.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Voraussetzung finden wir Elemente $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$. Es gilt dann $A \,\Delta\, E = E \setminus A \subseteq B \setminus A$ und somit $c^*(A \,\Delta\, E) \le c^*(B \setminus A) = c(B \setminus A) < \varepsilon$.

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" Zu vorgegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wählen wir ein $A \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A \,\Delta\, E) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Nach Lemma 2.16 gibt es $A', B' \in \mathcal{R}$ mit $A' \subseteq E \subseteq B'$, $A' \subseteq A \subseteq B'$ und $c(B' \setminus A') < \varepsilon$. □

Folgerung 2.18 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ und $E \subseteq \Omega$ eine c-messbare Menge. Dann gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\lim_n c^*(A_n \,\Delta\, E) = 0$ und für jede solche Folge gilt $\lim_n c(A_n) = c(E)$.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Satz 2.17 ein $A_n \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A_n \,\Delta\, E) < \frac{1}{n}$. Dadurch ist die Existenz einer Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} c^*(A_n \,\Delta\, E) \quad = \quad 0 \qquad \text{bewiesen.}$$

Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit dieser Eigenschaft und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vorgegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $c^*(A_n \,\Delta\, E) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \ge N$ erfüllt ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge N$. Nach Lemma 2.16 gibt es Mengen $A', B' \in \mathcal{R}$ mit $A' \subseteq E \subseteq B'$ und $A' \subseteq A_n \subseteq B'$ sowie $c(B' \setminus A') < \varepsilon$. Nun gilt

$$c(A_n) - c(E) \quad = \quad c(A_n) - c^*(E) \quad \le \quad c(B') - c^*(A') \quad = \quad c(B') - c(A') \quad = \quad c(B' \setminus A') \quad < \quad \varepsilon$$

und ebenso $c(E) - c(A_n) = c^*(E) - c^*(A_n) \le c^*(B') - c^*(A') = c(B') - c(A') = c(B' \setminus A') < \varepsilon$, so dass wir insgesamt $|c(A_n) - c(E)| < \varepsilon$ erhalten. Damit ist auch die Gleichung $\lim_n c(A_n) = c(E)$ bewiesen. □

Satz 2.19 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann bilden die c-messbaren Mengen einen Ring $\mathcal{R}_c$, der $\mathcal{R}$ als Teilmenge enthält. Durch $A \mapsto c(A)$ ist ein Inhalt auf $\mathcal{R}_c$ definiert.

Beweis: Nach Lemma 2.14 gilt $\mathcal{R} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}$. Wegen $\varnothing \in \mathcal{R}$ ist $\varnothing$ nach Lemma 2.14 eine c-messbare Menge. Seien nun A, B zwei c-messbare Mengen. Zu zeigen ist, dass auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ messbar sind. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Satz 2.17 gibt es Mengen $A_0, A_1 \in \mathcal{R}$ mit $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$ und $c(A_1 \setminus A_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ebenso finden wir Mengen $B_0, B_1 \in \mathcal{R}$ mit $B_0 \subseteq B \subseteq B_1$ und $c(B_1 \setminus B_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Setzen wir $C_0 = A_0 \cup B_0$, $C_1 = A_1 \cup B_1$, dann gilt

$$C_1 \setminus C_0 \quad = \quad (A_1 \cup B_1) \setminus (A_0 \cup B_0) \quad \subseteq \quad (A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0).$$

und somit $c(C_1 \setminus C_0) \le c(A_1 \setminus A_0) + c(B_1 \setminus B_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Wegen $C_0 \subseteq A \cup B \subseteq C_1$ zeigt dies nach Satz 2.17 die c-Messbarkeit von $A \cup B$. Zum Nachweis, dass auch $A \setminus B$ eine c-messbare Menge ist, setzen wir $D_0 = A_0 \setminus B_1$ und $D_1 = A_1 \setminus B_0$. Es gilt dann $D_0 \subseteq A \setminus B \subseteq D_1$ und

$$D_1 \setminus D_0 \quad = \quad (A_1 \setminus B_0) \setminus (A_0 \setminus B_1) \quad \subseteq \quad (A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0).$$

Wie zuvor erhalten wir $c(D_1 \setminus D_0) < \varepsilon$. Die Messbarkeit von $A \setminus B$ ist damit nachgewiesen.

Nun zeigen wir noch, dass durch c ein Inhalt auf $\mathcal{R}_c$ definiert ist. Nach Lemma 2.14 gilt $c(\varnothing) = c^*(\varnothing) = 0$, denn die leere Menge ist nach Definition in $\mathcal{R}$ enthalten. Seien nun $A, B \in \mathcal{R}_c$ zwei disjunkte Mengen; dann liegt auch $A \cup B$ in $\mathcal{R}_c$. Nach Lemma 2.12 gilt die Aussagen $c(A \cup B) = c^*(A \cup B) \le c^*(A) + c^*(B) = c(A) + c(B)$ und $c(A \cup B) = c_*(A \cup B) \ge c_*(A) \cup c_*(B) = c(A) + c(B)$, insgesamt also Gleichheit. □

Speziell für den Jordan-Inhalt notieren wir an diese Stelle als wichtige Eigenschaft die Bewegungsinvarianz, die wir bereits im Einführungsabschnitt erwähnt haben. Wir werden diese Eigenschaft später unter allgemeineren Voraussetzungen herleiten.

Satz 2.20 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung. Genau dann ist A Jordan-messbar, wenn $\psi(A)$ Jordan-messbar ist, und in diesem Fall gilt $c_n(\psi(A)) = c_n(A)$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass bereits auf recht einfache Weise definierte Mengen nicht Jordan-messbar sein können.

Satz 2.21 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ nicht Jordan-messbar.

Beweis: Wir beweisen die Gleichungen $c_*(A) = 0$ und $c^*(A) = 1$. Zum Beweis der ersten Gleichung nehmen wir an, dass $c_*(A) > 0$ ist und somit eine Figur F mit $F \subseteq A$ und $c(F) > 0$ existiert. Stellen wir F als disjunkte Vereinigung $Q_1 \cup ... \cup Q_r$ von Quadern da, so gilt $c(Q_i) > 0$ für ein i mit $1 \le i \le r$. Schreiben wir Q_i als Produkt von Intervallen, $Q_i = I_1 \times ... \times I_r$, dann haben alle Intervalle positive Länge. In jedem Intervall liegt somit eine irrationale Zahl, d.h. es existiert ein Punkt $a \in Q_i \setminus \mathbb{Q}^n$. Aber dies widerspricht den Annahmen $Q_i \subseteq F \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}^n$.

Nehmen wir nun an, dass $c^*(A) < 1$ gilt. Dann existiert eine Figur $F \supseteq A$ mit $c(F) < 1$. Wir können $F \subseteq [0,1]^n$ annehmen (ansonsten ersetze F durch $F \cap [0,1]^n$). Wegen $c([0,1]^n) = 1$ ist $G = [0,1]^n \setminus F$ eine Figur mit $c(G) > 0$. Indem wir G wie im vorherigen Absatz als Vereinigung von Quadern darstellen, finden wir einen Quader $Q \subseteq G$ mit $c(Q) > 0$. Ist $Q = I_1 \times ... \times I_r$ die Darstellung von Q als kartesisches Produkt von Intervallen, so hat jedes Intervall positive Länge und enthält eine *rationale* Zahl. Somit liegt in Q ein Punkt aus $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n = A$, was der Annahme $Q \subseteq G \subseteq [0,1]^n \setminus F \subseteq [0,1]^n \setminus A$ widerspricht. □

Auch Koordinantenhyperebenen wie z.B. $\{(0, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } 2 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ sind nicht Jordan-messbar (Nachweis als Übung).

Wir werden im nächsten Abschnitt den Jordanschen Inhalt zum Lebesgue-Maß verallgemeinern. Bei der Konstruktion wird die folgende Charakterisierung der c-messbaren Mengen, die ohne den Begriff des inneren Maßes auskommt, für uns hilfreich sein.

Proposition 2.22 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine beliebig vorgegebene Menge.

(i) Ist $F \in \mathcal{R}$ mit $F \supseteq A$, dann gilt $c_*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A)$.

(ii) Genau dann ist A c-messbar, wenn $c(F) \geq c^*(A) + c^*(F \setminus A)$ gilt.

Beweis: zu (i) Wir müssen die Gleichung $c(F) - c^*(F \setminus A) = \sup\{c(B) \mid B \subseteq A, B \in \mathcal{R}\}$ herleiten. Zum Nachweis, dass die Zahl auf der linken Seite eine obere Schranke für die Menge rechts ist, sei $B \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq A$ vorgegeben. Dann gilt $F \setminus B \supseteq F \setminus A$ und somit $c^*(F \setminus A) \leq c^*(F \setminus B) = c(F \setminus B)$, also $c(F) - c^*(F \setminus A) \geq c(F) - c(F \setminus B) = c(B)$. Nehmen wir nun an, dass $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $c(F) - c^*(F \setminus A) - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke der Menge ist. Nach Definition des äußeren Maßes gibt es ein B' mit $B' \supseteq F \setminus A$ und $c(B') < c^*(F \setminus A) + \varepsilon$. Es gilt $A = F \setminus (F \setminus A) \supseteq F \setminus B'$. Setzen wir $B = F \setminus B'$, dann gilt also $B \in \mathbb{R}$, $A \supseteq B$ und $c(B) = c(F) - c(B') > c(F) - c^*(F \setminus A) - \varepsilon$, was der Eigenschaft dieser Zahl, obere Schranke der Menge $\{c(B) \mid B \subseteq A, B \in \mathcal{R}\}$ zu sein, widerspricht.

zu (ii) „$\Rightarrow$“ Ist die Menge A c-messbar, dann gilt $c_*(A) = c^*(A)$, also $c(F) - c^*(F \setminus A) = c^*(A)$ und somit $c(F) = c^*(A) + c^*(F \setminus A)$. „$\Leftarrow$“ Auf Grund der Voraussetzung und der Subadditivität von c^* gilt $c(F) = c^*(A) + c^*(F \setminus A)$. Es folgt $c_*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A) = c^*(A)$, d.h. A ist c-messbar. □

§ 3. σ-Algebren und Maße

Zusammenfassung. Während wir im letzten Kapitel lediglich endliche Mengenoperationen zugelassen haben, erweitern wir die Strukturen dahingehend, dass auch abzählbar unendliche Mengenoperationen und Grenzwertprozesse zugelassen sind. Dies führt auf die beiden zentralen Begriffe der Maßtheorie, die *σ-Algebren* und die *Maße*. Unser Hauptergebnis wird der Fortsetzungssatz von Carathéodory sein, welcher besagt, dass unter gewissen Bedingungen ein Inhalt auf einem Ring zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortgesetzt werden kann. Dies ermöglicht uns die Erweiterung des Jordan-Inhalts zum bekannten *Lebesgue-Maß*.

Wichtige Grundbegriffe

- σ-Ring und σ-Algebra
- Borelsche σ-Algebra
- σ-additiver Inhalt
- Maß auf einer σ-Algebra, Maßraum
- äußeres Maß auf einer Menge
- Messbarkeit bezüglich eines äußeren Maßes (μ^*-Messbarkeit)
- Lebesgue-messbare Mengen und Lebesgue-Maß

Zentrale Sätze

- σ-Additivität des Jordan-Inhalts
- Erzeugendensysteme der Borelschen σ-Algebra
- Satz über die μ^*-Messbarkeit
- Fortsetzungssatz von Carathéodory

Definition 3.1 Ein Inhalt c auf einem Mengenring $\mathcal{R}$ wird als ***σ-additiv*** oder auch ***abzählbar additiv*** bezeichnet, wenn für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter $A_m \in \mathcal{R}$ mit $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$ jeweils $c(A) = \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m)$ erfüllt ist.

Unser erstes Ziel in diesem Kapitel besteht darin, die σ-Additivät des Jordan-Inhalts auf dem Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren nachzuweisen.

Lemma 3.2 Sei $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtleerer kompakter Teilmengen $A_m \subseteq \mathbb{R}^n$, es gelte also $A_m \supseteq A_{m+1} \supsetneq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Schnittmenge $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ nichtleer.

Beweis: Nehmen wir an, dass $A = \varnothing$ gilt. Dann ist die Folge $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $B_m = A_1 \setminus A_m$ eine bezüglich der Relativtopologie in A_1 offene Überdeckung von A_1, d.h. es gilt $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = A_1$. Weil A_1 kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, also $i_1, ..., i_p \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \le ... \le i_p$ und $\bigcup_{j=1}^{p} B_{i_j} = A_1$. Wir erhalten

$$A_{i_p} \quad = \quad \bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j} \quad = \quad \bigcap_{j=1}^{p} (A_1 \setminus B_{i_j}) \quad = \quad A_1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{p} B_{i_j} \right) \quad = \quad A_1 \setminus A_1 \quad = \quad \varnothing$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 3.3 Der Jordan-Inhalt $c_n : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}_+$ auf dem Mengenring $\mathcal{R}_n$ der Figuren ist ein σ-additiver Inhalt.

Beweis: Der Einfachheit halber setzen wir $c = c_n$. Wir zeigen zunächst: Ist $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Figuren im $\mathbb{R}^n$ mit $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \varnothing$, dann gilt $\lim_m c(A_m) = 0$. Weil die Folge $(c(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist, existiert der Grenzwert $\delta = \lim_m c_n(A_m)$ jedenfalls. Nehmen wir an, dass $\delta > 0$ ist. Dann ist jedes A_m nichtleer. Nach Satz 2.5, angewendet auf den Halbring der Quader, kann jedes A_m als endliche, disjunkte Vereinigung von Quadern dargestellt werden. Indem wir jeden Quader durch einen geringfügig kleineren Quader ersetzen, finden wir jeweils eine Figur B_m mit der Eigenschaft, dass der topologische Abschluss $\bar{B}_m$ in A_m enthalten und jeweils $c(A_m) - c(B_m) \le 2^{-m}\delta$ erfüllt ist. Definieren wir $C_m = B_1 \cap ... \cap B_m$, dann ist $(\bar{C}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge kompakter Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Nach Lemma 3.2 gilt also $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{C}_m \neq \varnothing$, sofern $\bar{C}_m \neq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Wegen $\bar{C}_m \subseteq A_m$ ist dann erst recht $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \neq \varnothing$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir beweisen $\bar{C}_m \neq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$, indem wir die Abschätzung

$$c(C_m) \quad \ge \quad c(A_m) - \delta(1-2^{-m}) \qquad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}$$

durch vollständige Induktion herleiten. Betrachten wir zunächst den Fall $m = 1$. Nach Voraussetzung gilt $c(A_1) - c(B_1) \le \frac{1}{2}\delta$, also

$$c(C_1) \quad = \quad c(B_1) \quad \ge \quad c(A_1) - \tfrac{1}{2}\delta \quad = \quad c(A_1) - \delta(1-2^{-1}).$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und die Aussage für m bereits bewiesen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt die Abschätzung $c(C_m) \ge c(A_m) - \delta(1-2^{-m})$, außerdem $c(A_{m+1}) - c(B_{m+1}) \le 2^{-(m+1)}\delta$, was zu $c(B_{m+1}) \ge c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta$ umgestellt werden kann. Zusammen mit der Gleichung $C_{m+1} = B_{m+1} \cap C_m$ und der Inklusion $B_{m+1} \cup C_m \subseteq A_{m+1} \cup A_m = A_m$ erhalten wir

$$\begin{aligned} c(C_{m+1}) \quad &= \quad c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(B_{m+1} \cup C_m) \quad \ge \quad c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(A_m) \quad \ge \\ (c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta) &+ (c(A_m) - \delta(1-2^{-m})) - c(A_m) \quad = \quad c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta - \delta + 2^{-m}\delta \\ &= \quad c(A_{m+1}) - \delta(1 + 2^{-(m+1)} - 2^{-m}) \quad = \quad c(A_{m+1}) - \delta(1 - 2^{-(m+1)}). \end{aligned}$$

Aus der soeben bewiesenen Ungleichung folgt $c(C_m) \ge c(A_m) - \delta(1-2^{-m}) \ge \delta - \delta(1-2^{-m}) = \delta 2^{-m} > 0$. Es gilt also $C_m \neq \varnothing$, damit erst recht $\bar{C}_m \neq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit ist der Beweis der zu Beginn formulierten Hilfsaussage abgeschlossen.

Für den Nachweis der σ-Additivität sei nun $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Figuren mit der Eigenschaft, dass auch $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathcal{R}_n$ enthalten ist. Definieren wir $B_m = A \setminus (A_1 \cup ... \cup A_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann ist $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Figuren, und es gilt $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \varnothing$. Auf Grund der Definition von B_m gilt jeweils $c(B_m) = c(A) - \sum_{k=1}^{m} c(A_k)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die soeben bewiesene Hilfsaussage liefert die Gleichung $\lim_n c(B_m) = 0$. Damit erhalten wir nun

$$c(A) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \left(c(B_m) + \sum_{k=1}^{m} c(A_k) \right) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} c(B_m) + \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) \quad = \quad 0 + \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m). \qquad \square$$

Definition 3.4 Sei Ω eine Menge. Ein ***σ-Ring*** in Ω ist ein Ring $\mathcal{R}$, der nicht nur unter endlichen, sondern auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Ist also $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$, dann muss auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathcal{R}$ liegen. Man nennt $\mathcal{R}$ eine ***σ-Algebra***, wenn $\mathcal{R}$ zugleich σ-Ring und Algebra ist.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar

Proposition 3.5 Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ in Ω ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\emptyset \in \mathcal{A}$ gilt, für jedes $A \in \mathcal{A}$ auch das Komplement $\Omega \setminus A$ in $\mathcal{A}$ liegt, und wenn für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist.

Jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist auch abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten. Ist nämlich $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, dann sind auch die Mengen $B_m = \Omega \setminus A_m$ in $\mathcal{A}$ enthalten, und mit ihnen auch

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \quad = \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_m) \quad = \quad \Omega \setminus \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m \right).$$

Dies zeigt, dass auch $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist.

Ebenso wie Mengenringe können auch σ-Algebren durch Angabe eines Erzeugendensystems defininiert werden. Man sagt, eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ wird durch ein System $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ***erzeugt***, wenn $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{E}$ gilt und jede σ-Algebra $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{E}$ auch $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ erfüllt. Wie bei den Ringen zeigt man, dass jede σ-Algebra durch die Angabe eines Erzeugendensystems eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.6 Die eindeutig bestimmte σ-Algebra $\mathcal{B}_n$, die von den Quadern im $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird, nennt man die ***Borelsche σ-Algebra***. Ihre Elemente bezeichnet man als ***Borelmengen***.

Für die σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ lassen sich viele weitere Erzeugendensysteme angeben.

Satz 3.7 Die Borelsche σ-Algebra wird außer von den Quadern noch von folgenden Mengensystemen erzeugt.

(i) dem Ring der Figuren im $\mathbb{R}^n$

(ii) dem System aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iii) dem System aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iv) dem System aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Beweis: zu (i) Jede σ-Algebra, welche die Menge aller Quader enthält, besitzt auch alle Figuren als Elemente, denn jede Figur ist nach Definition als Vereinigung von Quadern darstellbar. Umgekehrt enthält jede σ-Algebra mit den Figuren auch alle Quader, denn nach Definition ist jeder Quader eine Figur.

zu (ii) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält. Dann liegen auch alle abgeschlossenen Teilmengen (als Komplemente der offenen Mengen) in $\mathcal{A}$. Dies bedeutet, dass insbesondere alle abgeschlossenen Quader in $\mathcal{A}$ enthalten sind. Man überprüft unmittelbar, dass jeder Quader Q relativ-offen in seinem topologischen Abschluss $\bar{Q}$ ist. Deshalb kann Q als Durchschnitt von $\bar{Q}$ mit einer geeigneten offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dargestellt werden und ist somit ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die alle Quader enthält und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir müssen zeigen, dass U in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Dazu betrachten wir die (abzählbare) Menge $U_{\mathbb{Q}} = U \cap \mathbb{Q}^n$ und bilden für jeden Punkt $a \in U_{\mathbb{Q}}$ den Wert

$$\delta_a \quad = \quad \sup\{\delta \in \mathbb{R}^+ \mid B_\delta(a) \subseteq U\}$$

wobei $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\|_\infty < \delta\}$ den offenen Ball um a vom Radius δ bezüglich der Maximums-Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet; dabei handelt es sich um den Würfel der Kantenlänge 2δ mit a als Zentrum. Weil U offen ist, gilt $\delta_a > 0$ für alle $a \in U_{\mathbb{Q}}$. Unser Ziel $U \in \mathcal{A}$ nachzuweisen ist erreicht, sobald wir die Gleichung

$$U \quad = \quad \bigcup_{a \in U_{\mathbb{Q}}} B_{\delta_a}(a)$$

bewiesen haben. Zunächst zeigen wir die Inklusion „$\supseteq$“ und nehmen an, dass ein $a \in U_{\mathbb{Q}}$ mit $B_{\delta_a}(a) \nsubseteq U$ existiert. Sei $x \in B_{\delta_a}(a) \setminus U$. Dann gilt $\delta' = \|x-a\|_\infty < \delta_a$, und bereits die Zahl δ' erfüllt die Bedingung $B_{\delta'}(a) \subseteq U$ nicht mehr. Dies widerspricht aber der Definition von δ_a. Zum Nachweis von „$\subseteq$“ sei $x_0 \in U$ vorgegeben. Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $B_\delta(x_0)$ in U enthalten ist und $a \in U_{\mathbb{Q}}$ mit $\|a - x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\delta$. Auf Grund der Dreiecksungleichung gilt dann $B_{\frac{1}{2}\delta}(a) \subseteq B_\delta(x_0) \subseteq U$ (denn aus $\|x-a\|_\infty < \frac{1}{2}\delta$ folgt $\|x-x_0\|_\infty \leq \|x-a\|_\infty + \|a-x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$) und somit $\frac{1}{2}\delta \leq \delta_a$ nach Definition von δ_a. Daraus wiederum folgt $x_0 \in B_{\delta_a}(a)$, d.h. x_0 ist in der Menge auf der rechten Seite unserer Gleichung enthalten.

zu (iii) Dies folgt direkt aus (ii), weil die abgeschlossenen Teilmengen die Komplemente der offenen sind.

zu (iv) Jede σ-Algebra, die alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält, enthält auch alle kompakten, denn die kompakten Teilmengen sind gerade die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sei nun umgekehrt $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die alle kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält, und sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann ist $V_m = [-m,m]^n \cap V$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ kompakt, also in $\mathcal{A}$ enthalten. Damit liegt dann aber auch die abzählbare Vereinigung

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m \quad = \quad \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [-m,m]^n\right) \cap V \quad = \quad \mathbb{R}^n \cap V \quad = \quad V \qquad \text{in der } \sigma\text{-Algebra } \mathcal{A}. \qquad \square$$

Für den weiteren Verlauf definieren wir die Bezeichnung $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, wobei $-\infty$ und $+\infty$ zwei nicht in der Menge $\mathbb{R}$ enthaltene Elemente bezeichnen und die Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ durch die Festlegung $-\infty \leq a \leq +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$ definiert ist. Außerdem setzen wir $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Definition 3.8 Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, die den Bedingungen $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$ für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ genügt, wird als ***Maß*** auf $\mathcal{A}$ bezeichnet. Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω und einem Maß μ auf $\mathcal{A}$ wird ***Maßraum*** genannt.

Insbesondere ist jeder σ-additive Inhalt auf einer σ-Algebra ein Maß. Der einzige Unterschied besteht darin, dass der Inhalt seine Werte nur in $\mathbb{R}_+$ annimmt, der Wert $\{+\infty\}$ also ausgeschlossen ist. Wir betrachten einige Beispiele für Maße.

(i) Sei Ω eine Menge. Dann bezeichnet man die Abbildung $\nu : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ gegeben durch $\nu(A) = |A|$ als ***Zählmaß*** auf Ω. (Wie im ersten Semester definiert wurde, ist $|A| = n \in \mathbb{N}_0$, falls eine Bijektion zwischen $M_n = \{1,2,...,n\}$ und A existiert, und $|A| = +\infty$, falls kein $n \in \mathbb{N}_0$ mit einer solchen Bijektion existiert.)

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine Menge mit n Elementen. Dann ist durch $\mu : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$, $A \mapsto \frac{1}{n}|A|$ ein Maß auf Ω definiert, für das $\mu(\Omega) = 1$ gilt. Allgemein bezeichnet man ein Maß μ in einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit der Eigenschaft $\mu(\Omega) = 1$ als ***Wahrscheinlichkeitsmaß***. In dem hier vorliegenden Fall kann $\mu(A)$ jeweils als Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert werden, dass ein zufällig gewähltes Element $x \in \Omega$ in A enthalten ist.

(iii) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Existiert ein $x \in \Omega$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ jeweils

$$\mu(A) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

erfüllt ist, dann bezeichnet man μ als das ***Dirac-Maß*** δ_x im Punkt x.

Im weiteren Verlauf beschäftigen wir uns nun mit der Konstruktion von Maßen und insbesondere mit der Frage, wie man Maße aus Inhalten gewinnen kann.

Definition 3.9 Eine Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ wird ein ***äußeres Maß*** auf Ω genannt, wenn $\mu^*(\varnothing) = 0$ gilt, die Abbildung monoton ist (aus $A \subseteq B$ also $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ folgt) und für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Die zuletzt angegebene Eigenschaft des äußeren Maßes bezeichnet man als ***abzählbare Subadditivität***. Man sagt auch, das äußere Maß ist σ***-subadditiv***.

Satz 3.10 Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring und $c : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt. Für jedes $A \subseteq \Omega$ definieren wir

$$\mu_c^*(A) \quad = \quad \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \quad ,$$

wobei $\inf(\varnothing) = +\infty$ gesetzt wird. Dann ist durch μ_c^* ein äußeres Maß auf Ω definiert.

Beweis: Zunächst gilt $\varnothing \in \mathcal{R}$ und offenbar $\mu_c^*(\varnothing) = c(\varnothing) = 0$. Für jedes $A \subseteq \Omega$ bezeichnen wir mit $s(A)$ die Menge aller Summen $\sum_{n=1}^{\infty} c(A_n)$, die durch Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \supseteq A$ zu Stande kommen. Sind $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $A \subseteq B$ vorgegeben, dann gilt $s(B) \subseteq s(A)$, denn eine Folge, die B überdeckt, überdeckt auch die Menge A. Die untere Schranke $\mu^*(A) = \inf s(A)$ ist somit auch eine untere Schranke von B, und nach Definition des Infimums folgt $\mu_c^*(B) = \inf s(B) \geq \mu_c^*(A)$. Damit haben wir die Monotonie nachgewiesen.

Zum Nachweis der dritten Bedingung sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Wir können $\mu_c^*(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, da ansonsten die Ungleichung

$$\mu_c^*(A) \quad \leq \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) \tag{3.1}$$

offensichtlich erfüllt ist. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben, so finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c(A_{nk}) < \mu_c^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. Es folgt

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mu_c^*(A) \quad &\le \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c(A_{nk})\right) \quad \le \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\mu_c^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) \quad \le \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\mu_c^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon \quad \le \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu_c^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt war, erhalten wir die Abschätzung (3.1). □

Definition 3.11 Das zum Jordan-Inhalt c_n auf dem Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$ gehörende äußere Maß $\mu_{c_n}^*$ wird ***äußeres Lebesgue-Maß*** genannt. Wir bezeichnen es mit μ_n^*.

Für die Bestimmung des äußeren Maßes genügt es, abzählbare Vereinigungen von Quadern (an Stelle von Figuren) zu betrachten, da jede Figur nach Definition endliche Vereinigung von Quadern ist.

In Definition 2.11 hatten wir bereits jedem Inhalt c auf einem Ring ein äußeres Maß c^* zugeordnet. Für beliebige Teilmengen $A \subseteq \Omega$ gilt im Allgemeinen $c^*(A) \ge \mu_c^*(A)$, aber nicht Gleichheit. Der Grund dafür ist, dass für jede solche Teilmenge jeweils

$$\left\{c(B) \;\middle|\; B \in \mathcal{R}\,,\ B \supseteq A\right\} \quad \supseteq \quad \left\{\sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \quad \text{gilt,}$$

die Mengen aber nicht übereinzustimmen brauchen. Bezogen auf den Jordan-Inhalt und das äußere Lebesgue-Maß gilt für $A = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ beispielsweise $\mu_n^*(A) = 0$ im Gegensatz zu $c_n^*(A) = 1$. Ist H die erste Koordinatenhyperebene, also $H = \{(0, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } 2 \le i \le n\}$, dann gilt $\mu_n^*(H) = 0$ und $c_n^*(H) = +\infty$.

Im allgemeinen braucht ein äußeres Maß aber nicht wie in Satz 3.10 durch einen Inhalt auf einem Ring induziert zu sein; es gibt auch andere Möglichkeiten, ein äußeres Maß auf einer Menge zu definieren. Die folgende Definition ist durch Proposition 2.22 motiviert.

Definition 3.12 Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß. Wir bezeichnen eine Menge $A \subseteq \Omega$ als μ^****-messbar***, wenn für alle $F \subseteq \Omega$ die Ungleichung

$$\mu^*(F) \quad \ge \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Man beachte, dass die angegebene Ungleichung auf Grund der Subadditivität von äußeren Maßen äquivalent zur Gleichheit ist.

Satz 3.13 Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die Gesamtheit der μ^*-messbaren Mengen. Dann ist $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra, und durch $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ definiert.

Beweis: Offenbar ist $\varnothing$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten, denn es gilt $\mu^*(F \cap \varnothing) = \mu^*(\varnothing) = 0$ und $\mu^*(F \setminus \varnothing) = \mu^*(F)$. Mit A ist auch $A_1 = \Omega \setminus A$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten. Denn für jede Teilmenge $F \subseteq \Omega$ gilt dann $\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$, und wegen $F \cap A_1 = F \cap (\Omega \setminus A) = F \setminus A$ und $F \setminus A_1 = F \setminus (\Omega \setminus A) = F \cap A$ gilt auch $\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A_1) + \mu^*(F \setminus A_1)$.

Seien nun $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ vorgegeben. Um zu zeigen, dass auch $A \cup B$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ liegt, müssen wir die Messbarkeits-Bedingung für ein beliebiges $F \subseteq \Omega$ verifizieren. Weil die Menge A μ^*-messbar ist, gilt $\mu^*(F) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$, und die μ^*-Messbarkeit von B liefert

$$\mu^*(F \setminus A) \quad = \quad \mu^*((F \setminus A) \cap B) + \mu^*(F \setminus (A \cup B)).$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \mu^*(F) \quad &= \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \quad = \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*((F \setminus A) \cap B) + \mu^*(F \setminus (A \cup B)) \quad \geq \\ &\mu^*((F \cap A) \cup ((F \setminus A) \cap B)) + \mu^*(F \cap \setminus (A \cup B)) \quad = \quad \mu^*(F \cap (A \cup B)) + \mu^*(F \cap \setminus (A \cup B)) \quad , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Mengengleichung

$$(F \cap A) \cup ((F \setminus A) \cap B) \quad = \quad (F \cap A) \cup (F \cap A \cap B) \cup ((F \setminus A) \cap B) \quad = \quad (F \cap A) \cup (F \cap B) \quad = \quad F \cap (A \cup B)$$

verwendet wurde. Wir haben somit gezeigt, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine Algebra ist.

Im zweiten Teil beweisen wir nun, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra, und dass durch $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ definiert ist. Nach Definition eines äußeren Maßes gilt $\tilde{\mu}(\varnothing) = \mu^*(\varnothing) = 0$. Seien nun $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ disjunkt. Für alle $F \subseteq \Omega$ gilt auf Grund der Messbarkeit von A die Gleichung

$$\mu^*(F \cap (A \cup B)) \quad = \quad \mu^*(F \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*((F \cap (A \cup B)) \setminus A) \quad = \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \cap B).$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir

$$\mu^*(F \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_r)) \quad = \quad \sum_{k=1}^{r} \mu^*(F \cap A_k) \tag{3.2}$$

für alle $r \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Wegen $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ und auf Grund der soeben bewiesenen Gleichung gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(F) \quad &= \quad \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) + \mu^*\left(F \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} \mu^*(F \cap A_k) + \mu^*\left(F \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right). \end{aligned}$$

Lassen wir n gegen unendlich laufen, dann erhalten wir auf Grund der Monotonie von μ^* und der Inklusionsbeziehung $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ die Ungleichung

$$\mu^*(F) \quad \geq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(F \cap A_n) + \mu^*\left(F \cap \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \tag{3.3}$$

$$\geq \quad \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) + \mu^*\left(F \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \quad , \tag{3.4}$$

wobei wir im zweiten Schritt die σ-Subadditivität des äußeren Maßes μ^* verwendet haben. Also ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige (nicht notwendig disjunkte) Folge in $\mathcal{A}_{\mu^*}$, dann definieren wir eine disjunkte Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $B_1 = A_1$ und $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$. Es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, also ist mit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten.

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun wiederum eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}_{\mu^*}$, dann können wir in die Ungleichung (3.3) die Menge $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ einsetzen. Wegen $A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = A_n$ und $A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \geq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \mu^*(\varnothing) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Zusammen mit der abzählbaren Subadditivität von μ^* erhalten wir Gleichheit. Dies zeigt, dass die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ tatsächlich ein Maß liefert. □

Definition 3.14 Sei $n \in \mathbb{N}$ und μ_n^* das äußere Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann bezeichnet man die Elemente der σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu_n^*}$ als die ***Lebesgue-messbaren*** Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und das entsprechende Maß als ***Lebesgue-Maß***.

Für die σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu_n^*}$ verwenden wir die einfachere Bezeichnung $\mathcal{A}_n$, und μ_n für das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{A}_n$.

Unsere nächste Aufgabe besteht in dem Nachweis, dass es sich beim Lebesgue-Maß μ_n um eine Fortsetzung des Jordan-Inhalts $c_n : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}_+$ handelt. Ausschlaggebend ist hierbei die in Satz 3.3 festgestellte σ-Additivität von c_n.

Satz 3.15 *(Fortsetzungssatz von Carathéodory)*

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein σ-additiver Inhalt und $\mu_c^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das zu c gehörende äußere Maß. Mit der Notation aus Satz 3.13 gilt dann $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_{\mu_c^*}$ und außerdem $\mu_c^*|_{\mathcal{R}} = c$, d.h. c wird durch μ_c^* fortgesetzt.

Beweis: Wir bemerken vorweg, dass aus der σ-Additivität von c die abzählbare Subadditivität folgt. Sei nämlich $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit der Eigenschaft, dass auch $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ in $\mathcal{R}$ enthalten ist. Dann können wir dieser Folge wie im Beweis von Satz 3.13 eine Folge paarweise disjunkter Mengen $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $C_m \subseteq B_m$ und $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$ zuordnen, und wegen $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ gilt dann

$$c(B) \quad = \quad c\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} c(C_m) \quad \leq \quad \sum_{m=1}^{\infty} c(B_m).$$

Für ein beliebig vorgegebenes $A \in \mathcal{R}$ beweisen wir nun zunächst die Gleichung $c(A) = \mu_c^*(A)$. Definieren wir die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ durch $A_1 = A$ und $A_n = \varnothing$ für $n \geq 2$, dann gilt wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A$ nach Definition des äußeren Maßes die Ungleichung $\mu_c^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n)$, und die Summe ist offenbar gleich $c(A)$; insbesondere ist $\mu_c^*(A)$ also endlich. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{R}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) < +\infty \ ;$$

dass es mindestens eine solche Folge gibt, haben wir soeben nachgewiesen. Die abzählbare Subadditivität von c und die Gleichung $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)$ liefern

$$c(A) \quad = \quad c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)\right) \quad \le \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A \cap A_n) \quad \le \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n).$$

Bilden wir das Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dann erhalten wir $c(A) \le \mu_c^*(A)$, insgesamt also Gleichheit.

Nun beweisen wir die Inklusion $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_{\mu_c^*}$. Für gegebene $A \in \mathcal{R}$ und $F \subseteq \Omega$ müssen wir die Ungleichung

$$\mu_c^*(F) \quad \ge \quad \mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \qquad \text{nachweisen.}$$

Im Fall $\mu_c^*(F) = +\infty$ ist nichts zu zeigen; wir können also davon ausgehen, dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) < +\infty$ existiert. Die Mengen $A_n \cap A$ bilden eine Überdeckung von $F \cap A$, und die Mengen $A_n \setminus A$ eine Überdeckung von $F \setminus A$ durch Elemente aus $\mathcal{R}$. Wir erhalten somit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \quad &\le \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n \setminus A) \\ = \quad \sum_{n=1}^{\infty}(c(A_n \cap A) + c(A_n \cap \setminus A)) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) < +\infty. \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ erhalten wir die gewünschte Abschätzung $\mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \le \mu_c^*(F)$. Also ist A in $\mathcal{A}_{\mu_c^*}$ enthalten. □

Folgerung 3.16 Der Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$ ist in der σ-Algebra $\mathcal{A}_n$ der Lebesgue-messbaren Mengen enthalten. Damit ist auch die Borel-Algebra $\mathcal{B}_n$ im $\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge von $\mathcal{A}_n$ (denn dies ist nach Definition die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält). Das Lebesgue-Maß μ_n stimmt auf $\mathcal{R}_n$ mit dem Jordan-Inhalt überein.

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, dass auch der in § 2 definierte Ring der Jordan-messbaren Teilmengen in $\mathcal{A}_n$ enthalten ist, und dass der Jordan-Inhalt c_n auf diesem Ring mit dem Lebesgue-Maß μ_n übereinstimmt.