Untersuchung von Matrizen auf

negative Definitheit:

zwei Möglichkeiten:

(1) verwende die Definition:

$A \in M_{n,\mathbb{R}}$ negativ definit $\Longleftrightarrow$

(*) ${}^t v A v < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

(2) verwende das Kriterium aus der Vorlesung: $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ negativ definit

$\Longleftrightarrow (-1)^k \det(A_k) > 0$ für $1 \leq k \leq n$.

wobei A_k = linke obere $(k \times k)$-Teilmatrix von A

1.

f

df(

2. Scho

df(1,

Voraus

sind e

wie ang

- Bei einer beliebigen symmetrischen Matrix ist die Verwendung des Kriteriums (2) einfacher
- Bei Diagonalmatrizen ist es einfacher, die Definition zu verwenden. Offenbar gilt (*) für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ genau dann, wenn die Diagonaleinträge alle negativ sind. Grund:

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$^t v D v = (v_1 \cdots v_n)\, D \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (d_1 v_1 \; d_2 v_2 \cdots d_n v_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k^2$$

„$\Rightarrow$" Wenn (*) für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dann

Beis

geg

$f(1,$

Ants

$U \subseteq$

dass

Zusatz: Untersuche $df(1,2)$ auf Invertierbarkeit.

insb. für e_k $(1 \le k \le n)$ $\Rightarrow$ $d_k = {}^t e_k D e_k < 0$ für $1 \le k \le n$

„$\Leftarrow$": Sind alle d_k negativ, dann folgt ${}^t v D v = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k^2 < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beispiel zum Satz über die lokale Umkehrbarkeit

geg. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y, x - 3y)$

$f(1,2) = (3,-5)$

<u>Aufgabe</u>: Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(1,2)$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(3,-5)$ gibt, so dass $f|_U$ eine Bijektion von U auf V ist.

Sei $g: V \to U$ die Umkehrfunktion von $f|_U: U \to V$

Berechnen Sie die totale Ableitung $dg(3,-5)$.

1. Schritt: Berechnung der Jacobi-Matrix in jedem Punkt

$f = (f_1, f_2)$ $\quad f_1(x,y) = x^2 + y$, $\quad f_2(x,y) = x - 3y$

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x,y) & \partial_2 f_1(x,y) \\ \partial_1 f_2(x,y) & \partial_2 f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Untersuche $df(1,2)$ auf Invertierbarkeit.

$$df(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

Voraussetzungen des Satzes über lokale Umkehrbarkeit sind erfüllt $\Rightarrow$ Umgebungen U, V von $(1,2)$, $(3,-5)$ wie angeg. existieren, ebenso die Umkehrabb. $g: V \to U$

Umkehrregel: $f: U \to V$ Diffeomorphismus
zwischen offenen Teilmengen $U, V \in \mathbb{R}^n$, $a \in U$,
$b = f(a) \in V$, $g: V \to U$ Umkehrfkt. von f

$$\Rightarrow \quad dg(b) = df(a)^{-1}$$

hier: $dg(3,-5) = df(1,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \left(-\tfrac{1}{7}\right) \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$=$

Frage
von (
Ansatz
$\tilde{f}(y, x$

Beispiel zum Satz über implizite Funktionen

$$x^3 + y^3 + z^3 = 7 \quad (*)$$
$$xy + yz + xz = -2$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das System in einer Umg. des Punktes $(2,-1,0)$ nach (y,z) aufgelöst werden kann.

d.h. y,z sollen in Abhängigkeit von x dargestellt werden

Genaue Formulierung: Es gibt ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ von 2 und eine offene Umg. U von $(-1,0)$ und Funktionen $f,g : I \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x,y,z) \in I \times U$ folgende Äquivalenz gilt:

$$(x,y,z) \text{ löst } (*) \iff y = f(x),\ z = g(x)$$

Ansatz: Betrachte an Stelle von f die Funktion

$$(*) \iff \begin{matrix} x^3+y^3+z^3-7=0 \\ xy+yz+xz+2=0 \end{matrix}$$

Die Lösungsmenge von $(*)$ ist genau die Nullstellenmenge von $F(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3-7,\ xy+yz+xz+2)$

$$dF(x,y) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3x^2 \\ y+z \end{matrix}}_{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)} \ \underbrace{\begin{matrix} 3y^2 & 3z^2 \\ x+z & x+y \end{matrix}}_{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)} \right)$$

Das Kriterium ist genau dann erfüllt, wenn $\frac{\partial F}{\partial y}(2,-1,0)$ invertierbar ist. $\det \frac{\partial F}{\partial y}(2,-1,0) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$

$\Rightarrow f, g, I, U$ existieren wie angegeben

--

Bestimmung der totalen Ableitung der implizit definierten Funktion $(f,g): I \to U$

$$d(f,g)(2) = -\partial_y f(2,-1,0)^{-1} \cdot \partial_x f(2,-1,0) =$$

$$= -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 \\ -27 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow f'(2) = -4,\ g'(2) = 9$$

$$\frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Frage: Ist das Gleichungssystem in einer Umg. von $(2,-1,0)$ auch nach (x,z) auflösbar?

Ansatz: Betrachte an Stelle von f die Funktion $\tilde{f}(y,x,z) = f(x,y,z) \Rightarrow$ erhalte für

...um

... A

... Am

...h,

...bilden

...ften.

...raum:

0 falls $A = \emptyset$

$+\infty$ falls $A \neq \emptyset$

$\tilde{F}(y,x,z) = F(x,y,z)$ entsprechend

$$d\tilde{F}(y,x,z) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3y^2 \\ x+z \end{matrix}}_{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}} \quad \underbrace{\begin{matrix} 3x^2 & 3z^2 \\ y+z & x+y \end{matrix}}_{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(-1,2,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(-1,2,0) = 12 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem ist bei $(2,-1,0)$ auch lokal nach (x,z) auflösbar.

Def.: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlicher Maßraum

$:\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_m \subseteq A_{m+1}\ \forall m\in\mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ und $\mu(A_m) < +\infty\ \forall m\in\mathbb{N}$.

Bsp.: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ ist σ-endlich, denn die Mengen $A_m = [-m, m]^n$ bilden eine Folge mit den angeg. Eigenschaften.

$$\mu_n(A_m) = (2m)^n$$

Bsp. für einen nicht σ-endlichen Maßraum:

$(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$, mit $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ +\infty & \text{falls } A \neq \emptyset \end{cases}$

Aufgabe Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge

$$B = \{(x,y) \mid x \in [0,2]\ ,\ x+1 \le y \le 3x+2\}.$$

(a) Bestimmen Sie Folgen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Figuren mit $F_n \subseteq B \subseteq G_n$ und $\lim_n c_2(F_n) = \lim_n c_2(G_n)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil (a), dass B Jordan-messbar ist, und bestimmen Sie $c_2(B)$.

zu (a) Sei $f(x) = x+1$, $g(x) = 3x+2$ für alle $x \in [0,2]$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Zunächst unterteilen wir das Intervall $[0,2]$ durch $x_k = \frac{2k}{n}$ für $0 \le k \le n$ in n gleich große Abschnitte. Damit für jedes k in diesem Bereich das Rechteck $Q_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_k, z_k]$ in B enthalten ist, muss $f(x) \le y_k$ und $z_k \le g(x)$ für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$ gelten. Weil f und g auf dem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ streng monoton wachsend ist, gilt $\max f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_k)$ und $\min g([x_{k-1}, x_k]) = g(x_{k-1})$. Deshalb definieren wir

$$Q_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [f(x_k), g(x_{k-1})] \quad \text{und} \quad F_n = \bigcup^{n} Q_{nk}.$$

Damit Rechtecke der Form $P_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_k, z_k]$ die Menge B insgesamt abdecken, muss $y_k \leq f(x)$ und $g(x) \leq z_k$ für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$ gelten. Auf Grund der Monotonie von f und g gilt $\min f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_{k-1})$ und $\max g([x_{k-1}, x_k]) = g(x_k)$. Deshalb definieren wir

$$P_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [f(x_{k-1}), g(x_k)] \quad \text{und} \quad G_n = \bigcup_{k=1}^{n} P_{nk}.$$

zu (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_2(F_n) = \sum_{k=1}^{n} c_2(Q_{kn}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot (g(x_{k-1}) - f(x_k)))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot ((3x_{k-1} + 2) - (x_k + 1))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot (3 \cdot \tfrac{2k-2}{n} + 2 - \tfrac{2k}{n} - 1) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot (3 \cdot \tfrac{2k-2}{n} + 2 - \tfrac{2k}{n} - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot (\tfrac{4k}{n} - \tfrac{6}{n} + 1) = \tfrac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (4k - 6 + n)$$

$$= \tfrac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \tfrac{2}{n^2} \cdot 6n + \tfrac{2}{n^2} \cdot n^2 = \tfrac{8}{n^2} \cdot \tfrac{1}{2} n(n+1) - \tfrac{1}{3n} + 2$$

$$= 4 \cdot (1 + \tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{3n} + 2.$$

Ebenso erhält man

$$c_2(G_n) = \sum_{k=1}^{n} c_2(P_{kn}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot (g(x_k) - f(x_{k-1})))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot ((3x_k + 2) - (x_{k-1} + 1)) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot (3 \cdot \tfrac{2k}{n} + 2 - \tfrac{2k-2}{n} - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot (3 \cdot \tfrac{2k}{n} + 2 - \tfrac{2k-2}{n} - 1) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2}{n} \cdot (\tfrac{4k}{n} + \tfrac{2}{n} + 1)$$

$$= \tfrac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (4k + 2 + n) \;=\; \tfrac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \tfrac{2}{n^2} \cdot 2n + \tfrac{2}{n^2} \cdot n^2$$

$$= \tfrac{8}{n^2} \cdot \tfrac{1}{2} n(n+1) + \tfrac{1}{n} + 2 \;=\; 4 \cdot (1 + \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n} + 2.$$

Aus $F_n \subseteq B \subseteq G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt für das innere und das äußere Maß von B jeweils $c_2(F_n) \leq c_{2*}(B) \leq c_2^*(B) \leq c_2(G_n)$, also

$$4 \cdot (1 + \tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{3n} + 2 \leq c_{2*}(B) \leq c_2^*(B) \leq 4 \cdot (1 + \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n} + 2.$$

Der Grenzwert der Folgen links und rechts stimmt mit 6 überein. Durch Anwendung des Sandwich-Lemmas erhalten wir die Gleichung $c_{2*}(B) = 6 = c_2^*(B)$. Daraus folgt, dass die Menge B Jordan-messbar ist und $c_2(B) = 6$ gilt.

Ergänzungen:

In Aufgabe 1 vom Globalübungsblatt 8 haben wir die Menge

$$B \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\;,\; |y| \leq (1-x)^2$$

untersucht. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird das Intervall $[-1,1]$ gleichmäßig unterteilt durch die Punkte $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$ mit $0 \leq k \leq n$. Die Ungleichung $|y| \leq (1-x)^2$ ist für alle $x \in [-1,1]$ und $y \in \mathbb{R}$ jeweils äquivalent zu $-(1-x)^2 \leq y \leq (1-x)^2$.

Damit ein Rechteck der Form $[x_{k-1}, x_k] \times [y_k, z_k]$ in B enthalten ist, muss $-(1-x)^2 \leq y_k$ und $z_k \leq (1-x)^2$ für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$ gelten. Weil die Funktion $x \mapsto -(1-x)^2$ auf dem Intervall monoton wachsend ist, nimmt sie ihr Maximum im Punkt x_k an. Weil die Funktion $x \mapsto (1-x)^2$ auf dem Intervall monoton fallend ist, wird ihr Minimum auch im Punkt x_k angenommen. Deshalb erhalten wir durch

$$Q_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [-(1-x_k)^2, (1-x_k)^2]$$

für $1 \leq k \leq n$ und $F_n = \bigcup_{k=1}^n Q_{nk}$ eine Figur mit $F_n \subseteq B$.

Entsprechend erhält man durch

$$P_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [-(1 - x_{k-1})^2, (1 - x_{k-1})^2]$$

für $1 \leq k \leq n$ und $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} P_{nk}$ eine Figur mit $G_n \supseteq B$.

Bei der Menge $C = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1], |y| \leq 1 + x^2\}$ müsste man berücksichtigen, dass das Monotonieverhalten von $x \mapsto -(1 + x^2)$ und $x \mapsto 1 + x^2$ auf den Teilintervallen $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ unterschiedlich ausfällt: Die erste Funktion ist auf $[-1, 0]$ monoton wachsend und auf $[0, 1]$ monoton fallend, bei der zweiten Funktion ist es umgekehrt. Hier könnte man beispielsweise das Intervall $[-1, 1]$ durch $x_k = -1 + \frac{k}{n}$ in $2n$ Abschnitte unterteilen. Definiert man

$$Q_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [-(1 + x_k^2), 1 + x_k^2] \text{ für } 1 \leq k \leq n$$

$$Q_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [-(1 + x_{k-1}^2), 1 + x_{k-1}^2] \text{ für } n + 1 \leq k \leq 2n$$

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{2n} Q_{nk}$$

und entsprechend

$$P_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [-(1 + x_{k-1}^2), 1 + x_{k-1}^2] \text{ für } 1 \leq k \leq n$$
$$P_{nk} = [x_{k-1}, x_k] \times [-(1 + x_k^2), 1 + x_k^2] \text{ für } n+1 \leq k \leq 2n$$
$$G_n = \bigcup_{k=1}^{2n} P_{nk}$$

dann gilt $F_n \subseteq C \subseteq G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 6 & 13 \\ -12 & 9 & 10 & 19 \\ -5 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 & -9 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie Matrizen J, J' in JNF an, so dass A ähnlich zu J und B ähnlich zu J' ist.

(b) Bestimmen Sie $T, U \in GL_4(\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT$ und $U^{-1}BU$ in JNF vorliegen.

<u>zu (a)</u> Rechnung $\Rightarrow \chi_A = \chi_B = (x-2)^4$

weitere Rechnung $\Rightarrow$ Für $N = A - 2E$ gilt

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \ker(N) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad N^2 = 0$$

2) zu

Aus $(A-2E)^2 = N^2 = 0$ (und $N \neq 0$) folgt $\mu_A = (x-2)^2$

$\Rightarrow$ Größe des größten Jordanblocks 2

$\mu_g(A,2) = \dim \mathrm{Eig}(A,2) = 2 \Rightarrow$ zwei Jordanblöcke

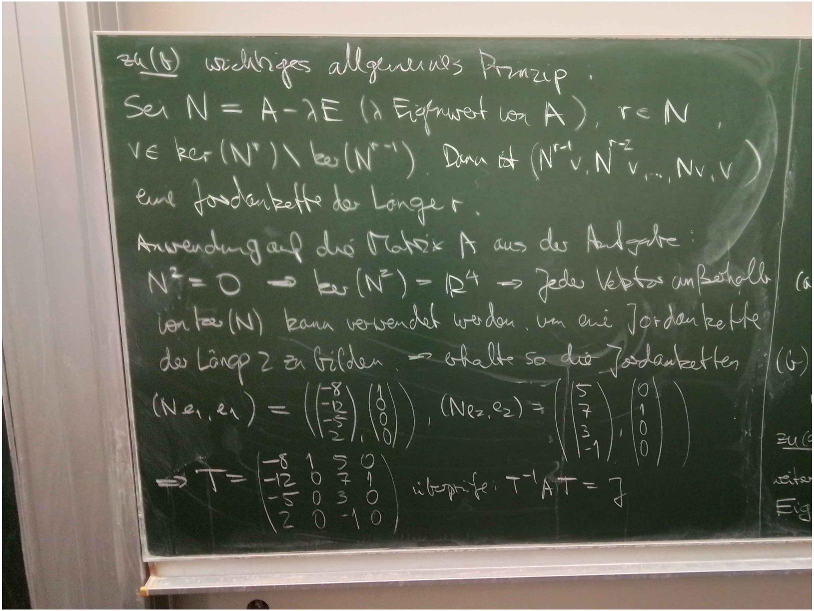
$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $M = B - 2E$ gilt $\ker M = \mathrm{Eig}(B,2)$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \ker M^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und $M^3 = 0$. $\Rightarrow \mu_B = (x-2)^3$

Größe des größten Jordanblocks 3, zwei Jordanblöcke $\Rightarrow$ $J' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



Bitte beachten Sie den Hinweis auf der nächsten Seite.

Die Methode, einfach mehrere Jordanketten zu bilden und diese zu einer Basis zusammenzusetzen, so wie wir es gerade gesehen haben, funktioniert in der Praxis meistens, und ist deutlich einfacher zu handhaben als das allgemeine Verfahren, das im Skript auf Seite 200 beschrieben wurde.

Der Nachteil der Methode besteht darin, dass sie fehlschlagen kann: Es kann passieren, dass die Jordanketten zusammengenommen keine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. In diesem Fall muss man die Jordanketten mit anderen Startvektoren bilden (bei der Matrix A von oben beispielsweise mit e_1, e_3 statt mit e_1, e_2) und einen neuen Versuch starten. Wenn man sichergehen will, dass man auf Anhieb eine Jordanbasis erhält, dann führt an dem allgemeinen Verfahren kein Weg vorbei.