Definition der Vektorräume

Definition (6.1)

Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge V und Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : K \times V \to V$ genannt Vektoraddition und skalare Multplikation, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Das Paar $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gelten die Rechenregeln

- (a) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$
- (b) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$
- (c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
- (d) $1_K \cdot v = v$

Die Elemente der Menge V werden Vektoren genannt.

Definition der Untervektorräume

Definition (6.4)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ wird Untervektorraum von V genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $0_V \in U$

(ii) $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$

(iii) $\lambda \cdot v \in U$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$

Definition der affinen Unterräume

Definition (6.6)

Eine Teilmenge $A \subseteq V$ wird affiner Unterraum von V genannt, wenn entweder $A = \varnothing$ gilt oder ein Untervektorraum U und ein Vektor $v \in V$ existieren, so dass

$$A \quad = \quad v + U \quad = \quad \{v + u \mid u \in U\}$$ erfüllt ist.

Struktur der affinen Unterräume

Proposition (6.7)

Sei V ein K-Vektorraum und $\varnothing \neq A \subseteq V$ ein affiner Unterraum.

(i) Es gibt genau einen Untervektorraum U von V, so dass die Gleichung $A = v + U$ für ein $v \in V$ erfüllt ist.

(ii) Für jeden Vektor $w \in A$ erfüllt der Untervektorraum U aus Teil (i) die Gleichung $A = w + U$.

Wir nennen U den zu A gehörenden Untervektorraum und bezeichnen ihn mit $\mathscr{L}(A)$.

Beweis von Proposition 6.7 (ii)

geg.: affiner Unterraum $A \subseteq V$ der Form $A = v + U$ ($v \in V$, U Untervektorraum von V) und ein Element $w \in A$

Beh.: $A = w + U$ (gleichbed. $v + U = w + U$)

$w \in v + U \Rightarrow \exists u_0 \in U$ mit $w = v + u_0$

„$\supseteq$" Sei $x \in w + U \Rightarrow \exists u \in U$ mit $x = w + u$

$\Rightarrow x = v + u_0 + u$ U Untervektor., $u_0, u \in U$

$\Rightarrow u_0 + u \in U \Rightarrow x \in v + U$

"$\subseteq$" $\quad w = v + u_0 \Rightarrow v = w + (-u_0)$

Sei $x \in v + U \Rightarrow \exists u \in U$ mit $x = v + u \Rightarrow$

$x = w + (-u_0) + u$ $\quad U$ Untervektorraum, $u_0, u \in U$

$\Rightarrow -u_0 = (-1_K) \cdot u_0 \in U$, $(-u_0) + u \in U$

$\Rightarrow x \in w + U$.

$\square$

Definition der linearen Abbildungen

Definition (6.8)

Seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ K-Vektorräume. Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt K-lineare Abbildung oder Homomorphismus von K-Vektorräumen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $\phi(v +_V w) = \phi(v) +_W \phi(w)$ für alle $v, w \in V$

(ii) $\phi(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W \phi(v)$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$

Häufig wird (etwas ungenau) statt von einer K-linearen auch einfach von einer linearen Abbildung gesprochen.

Das Matrix-Vektor-Produkt als lineare Abbildung

Proposition (6.11)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$. Dann ist durch

$$\phi_A : K^n \to K^m \quad , \quad v \mapsto Av$$

eine lineare Abbildung gegeben.

Rechenregeln für linearen Abbildungen

Lemma (6.9)

Ist $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\phi(0_V) = 0_W$, $\phi(-v) = -\phi(v)$ und $\phi(v - w) = \phi(v) - \phi(w)$ für alle $v, w \in V$.

Lemma (6.10)

Seien V, W K-Vektorräume, $n \in \mathbb{N}$, außerdem $v_1, ..., v_n \in V$ und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \phi(v_k).$$

Beweis von Lemma 6.9

Es gilt $\phi(0_V) = \phi(0_V +_V 0_V) = \phi(0_V) +_W \phi(0_V)$.

$\Rightarrow \phi(0_V) +_W (-\phi(0_V)) = \phi(0_V) +_W \phi(0_V) +_W (-\phi(0_V))$

$\Rightarrow 0_W = \phi(0_V) +_W 0_W \Rightarrow 0_W = \phi(0_V)$

Für jedes $v \in V$ gilt $\phi(-v) = \phi((-1_K) \cdot v) = (-1_K) \cdot \phi(v)$

$= -\phi(v)$, und für bel. $v, w \in V$ gilt $\phi(v - w) =$

$\phi(v +_V (-w)) = \phi(v) +_W \phi(-w) = \phi(v) +_W (-\phi(w)) =$

$\phi(v) - \phi(w)$. □

Beweis von Lemma 6.10

durch vollst. Ind. über n.

Ind.-Anf.: Für jedes $v_1 \in V$ gilt

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{1} v_k\right) = \phi(v_1) = \sum_{k=1}^{1} \phi(v_k)$$

Ind.-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze die Gleichung für n (und bel. Vektoren aus V) voraus.

Seien $v_1, \dots, v_{n+1} \in V$. Dann gilt $\phi\left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k\right) =$

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} v_k + v_{n+1}\right) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) +_W \phi(v_{n+1}) \overset{\text{Ind. V.}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \phi(v_k) +_W \phi(v_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \phi(v_k)$$

□

Komposition und Umkehrung linearer Abbildungen

Proposition (6.12)

Seien U, V, W drei K-Vektorräume und $\phi : U \to V$, $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen.

- Dann ist $\psi \circ \phi$ eine lineare Abbildung von U nach W.
- Ist ϕ bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung ϕ^{-1} eine lineare Abbildung von V nach U.

Beweis von Proposition 6.12

- gegeben: lineare Abb. $\phi: U \to V$, $\psi: V \to W$

zz: $\psi \circ \phi : U \to W$ ist eine lineare Abb.

Seien $u, u' \in U$ und $\lambda \in K$ zu überprüfen:

(1) $(\psi \circ \phi)(u +_U u') = (\psi \circ \phi)(u) +_W (\psi \circ \phi)(u')$

(2) $(\psi \circ \phi)(\lambda \cdot_U u) = \lambda \cdot_W (\psi \circ \phi)(u)$

zu (1) $(\psi \circ \phi)(u +_U u') = \psi(\phi(u +_U u')) \overset{\phi \text{ ist linear}}{=}$

$\psi(\phi(u) +_V \phi(u')) \overset{\psi \text{ linear}}{=} \psi(\phi(u)) +_W \psi(\phi(u')) =$

$(\psi \circ \phi)(u) +_W (\psi \circ \phi)(u')$

zu (2) $(\psi \circ \phi)(\lambda \cdot_U u) = \psi(\phi(\lambda \cdot_U u)) \overset{\phi \text{ linear}}{=}$

$\psi(\lambda \cdot_V \phi(u)) \overset{\psi \text{ linear}}{=} \lambda \cdot_W \psi(\phi(u)) =$

$\lambda \cdot_W (\psi \circ \phi)(u)$

- geg: bijektive lineare Abb. $\phi: U \to V$

z.Z.: Die Umkehrabb. $\phi^{-1}: V \to U$ ist linear.

Seien $v, v' \in V$ und $\lambda \in K$ zu überprüfen:

(1) $\phi^{-1}(v +_V v') = \phi^{-1}(v) +_U \phi^{-1}(v')$

(2) $\phi^{-1}(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_U \phi^{-1}(v)$

Seien $u = \phi^{-1}(v)$, $u' = \phi^{-1}(v')$ ($\Rightarrow u, u' \in U$)

ϕ ist linear. $\Rightarrow \phi(u +_U u') = \phi(u) +_V \phi(u')$ $\xrightarrow{\phi^{-1}}$

Verschiedene Typen linearer Abbildungen

Definition (6.13)

Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heißt

(i) Monomorphismus (von K-Vektorräumen), wenn ϕ injektiv ist,

(ii) Epimorphismus, wenn ϕ surjektiv ist,

(iii) Isomorphismus, wenn ϕ bijektiv ist.

(iv) Eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ bezeichnet man als Endomorphismus von V.

(v) Ein bijekiver Endomorphismus wird Automorphismus genannt.

(vi) Zwei K-Vektorräume V, W bezeichnet man als isomorph, wenn ein Isomorphismus $\phi : V \to W$ existiert.

Die allgemeine lineare Gruppe eines Vektorraums

Folgerung (6.14)

Die Menge der Automorphismen eines K-Vektorraums V ist mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe. Man bezeichnet sie mit $\mathrm{GL}(V)$ und nennt sie die allgemeine lineare Gruppe des Vektorraums V.

Beweis von Folgerung 6.14

Die Komposition von zwei Abbildungen, die bijektiv und linear sind, ist wieder bijektiv und linear (siehe Prop. 6.12). $\rightarrow \circ$ ist Verknüpfung auf der Menge der bij. lin. Abb.

Assoziativität: Sind $\phi, \psi, \varphi : V \to V$ bij. und lin. Dann gilt $(\phi \circ \psi) \circ \varphi = \phi \circ (\psi \circ \varphi)$.

Neutralelement: bereits bekannt; $id_V : V \to V, v \mapsto v$ ist bijektiv. Außerdem ist sie linear: Für bel. $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt $id_V(v+w) = v+w = id_V(v) + id_V(w)$ und $id_V(\lambda v) = \lambda v = \lambda \cdot id_V(v)$. Wegen $\phi \circ id_V = \phi$ und $id_V \circ \phi = \phi$ für jede bij. lin. Abb.

besitzt id_V in der Halbgruppe $(GL(V), \circ)$ die Eigenschaft eines Neutralelements.

Inverse: Ist $\phi \in GL(V)$, dann ist auch ϕ^{-1} bijektiv und linear (vgl. Prop. 6.12), und es gilt $\phi^{-1} \circ \phi = id_V$ und $\phi \circ \phi^{-1} = id_V$. □

Affin-lineare Abbildungen

Definition (6.15)

Eine Abbildung $\psi : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen wird affin-lineare Abbildung genannt, wenn eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ und ein Vektor $w \in W$ existieren, so dass

$$\psi(v) = w + \phi(v) \quad \text{für alle} \quad v \in V$$

erfüllt ist. Eine bijektive affin-lineare Abbildung $\psi : V \to V$ wird Affinität von V genannt.

Bild- und Urbildmengen als Untervektorräume

Proposition (6.16)

Seien V, W K-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ferner seien $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ Untervektorräume.

- Dann ist die Teilmenge $\phi(V') = \{\phi(v) \mid v \in V'\}$ von W ein Untervektorraum von W.
- Die Urbildmenge $\phi^{-1}(W') = \{v \in V \mid \phi(v) \in W'\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis von Proposition 6.16:

geg.: K-Vektorräume V, W
lineare Abbildung $\phi : V \to W$

Beh.: Ist V' ein Untervektorraum von V, dann ist $\phi(V')$ ein Untervektorraum von W.

zu überprüfen: (1) $0_W \in \phi(V')$
(2) Sind $w, w' \in \phi(V')$, dann gilt auch $w + w' \in \phi(V')$
(3) Ist $\lambda \in K$ und $w \in \phi(V')$, dann gilt $\lambda \cdot w \in \phi(V')$. B

zu (1) V' Untervektorraum von $V \Rightarrow 0_V \in V'$
$\Rightarrow 0_W = \phi(0_V) \in \phi(V')$

zu (2) geg. $w, w' \in \phi(V')$ Nach Def. von $\phi(V')$ gibt es $v, v' \in V'$ mit $w = \phi(v)$ und $w' = \phi(v')$.

V' ist Untervektorraum von V, $v, v' \in V' \Rightarrow v + v' \in V'$

$\Rightarrow w + w' = \phi(v) + \phi(v') = \phi(v + v') \in \phi(V')$

zu (3) Sei $\lambda \in K$ und $w \in \phi(V') \rightarrow \exists v \in V'$ mit $\phi(v) = w$

V' ist Untervektorraum, $\lambda \in K$, $v \in V' \Rightarrow \lambda v \in V'$

$\Rightarrow \lambda w = \lambda \phi(v) = \phi(\lambda v) \in \phi(V')$

Beh. Ist W' ein Untervektorraum von W, dann ist die Urbildmenge $\phi^{-1}(W') = \{ v \in V \mid \phi(v) \in W' \}$ ein Untervektorraum von V.

zu überprüfen: (1) $0_V \in \phi^{-1}(W')$

(2) $\forall v, v' \in \phi^{-1}(W') : v + v' \in \phi^{-1}(W')$

(3) $\forall \lambda \in K, v \in \phi^{-1}(W') : \lambda v \in \phi^{-1}(W')$

zu (1) W' ist Untervektorraum $\Rightarrow 0_W \in W'$

$\phi(0_V) = 0_W \Rightarrow \phi(0_V) \in W' \Rightarrow 0_V \in \phi^{-1}(W')$

zu (2) Seien $v, v' \in \phi^{-1}(W') \rightarrow \phi(v), \phi(v') \in W'$

W' Untervektorraum

$\Rightarrow \phi(v) + \phi(v') \in W' \Rightarrow \phi(v + v') \in W'$

$\Rightarrow v + v' \in \phi^{-1}(W')$

zu (3) Sei $\lambda \in K$ und $v \in \phi^{-1}(W') \rightarrow \phi(v) \in W'$

$\lambda \phi(v) \in W' \Rightarrow \phi(\lambda v) \in W' \Rightarrow \lambda v \in \phi^{-1}(W')$

W' ist Untervektorraum

□