Weitere Rechenregeln für Matrizen

Proposition (5.15)

Sei R ein Ring, und seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}$. Weiter seien $A, A' \in \mathscr{M}_{m\times n,R}$, $B, B' \in \mathscr{M}_{n\times r,R}$ und $C \in \mathscr{M}_{r\times s,R}$.
Dann gelten die folgenden Rechenregeln.

(i) $A(B + B') = AB + AB'$, $(A + A')B = AB + A'B$

(ii) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

(iii) $E^{(m)}A = AE^{(n)} = A$

(iv) $(AB)C = A(BC)$

(v) ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$

Die Menge der Matrizen als Monoid

Folgerung (5.16)

Sei R ein Ring, und seien $n \in \mathbb{N}$. Dann bildet die Menge $\mathscr{M}_{n,R}$ bildet mit der Multiplikation von Matrizen ein Monoid, mit $E^{(n)}$ als Neutralelement.

Es handelt sich dabei aber in der Regel nicht um ein kommutatives Monoid, da zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0_R \\ 1_R & 1_R \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 0_R & 1_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix}$$

falls $n = 2$ und $0_R \neq 1_R$.

Die allgemeine lineare Gruppe

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,R}$ wird invertierbar genannt, wenn eine Matrix $B \in \mathscr{M}_{n,R}$ mit $AB = BA = E^{(n)}$ existiert. Mit Folgerung 5.6 („Die invertierbaren Elemente eines Monoids bilden eine Gruppe.“) erhalten wir

Folgerung (5.17)

Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K bildet mit der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe. Man nennt sie die allgemeine lineare Gruppe und bezeichnet sie mit $\mathrm{GL}_n(K)$.

zur Wiederholung:

Definition

- Eine abelsche Halbgruppe ist ein Paar $(A, +)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge A und einer kommutativen und assoziativen Verknüpfung $+$ auf A.
- Man bezeichnet das Paar als abelsches Monoid, wenn in der Halbgruppe ein Neutralelement existiert, also ein Element 0_A, so dass $0_A + a = a$ und $a + 0_A = a$ für alle $a \in A$ gilt.
- Ein abelsches Monoid $(A, +)$ wird abelsche Gruppe genannt, wenn jedes Element a des Monoids invertierbar ist. Das bedeutet, dass jeweils ein Element $-a \in A$ existiert, so dass $a + (-a) = 0_A$ und $(-a) + a = 0_A$ erfüllt ist.

Die komplexen Zahlen

In einem der folgenden Beispiele greifen wir auf die komplexen Zahlen zurück. Wichtig ist für uns momentan nur, dass es sich dabei um einen Körper $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften handelt:

- Es gilt $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$.
- Es existiert ein Element $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.
- Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Diese Informationen reichen aus , um in $\mathbb{C}$ rechnen zu können. Die Summe zweier komplexer Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) ist beispielsweise gegeben durch

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (c + id) = a + ib + c + d \\ &= a + c + ib + id = (a + c) + i(b + d) \quad , \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen (Forts.)

und das Produkt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+ib)\cdot(c+id) = \\ a\cdot c + (ib)\cdot c + a\cdot(id) + (ib)\cdot(id) &= \\ ac + i(bc) + i(ad) + i^2 bd &= \\ ac + i(bc+ad) + (-1)bd &= (ac-bd) + i(bc+ad). \end{aligned}$$

Den Kehrwert einer komplexen Zahl $z = a + ib \neq 0$ erhält man durch

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} \\ &= \frac{a-ib}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{(-b)}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

· NICHT RAUCHEN

Multiplikation von $z = a+ib$, $w = c+id$

$$wz = (a+ib)\cdot(c+id) = a\cdot(c+id) + ib\cdot(c+id)$$

$$= ac + iad + ibc + i^2 bd = ac + iad + ibc - bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

Negatives von z: $-z = -(a+ib) = (-a) + (-ib)$

$$= (-a) + i(-b)$$

Kehrwert: Sei $z = a+ib$ mit $z \neq 0$, d.h. $(a,b) \neq (0,0)$.

$$z = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{(-b)}{a^2+b^2}$$

Quadratwurzel aus i in $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + i + \left(-\frac{1}{2}\right) = i$$

Definition der Vektorräume

Definition (6.1)

Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge V und Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : K \times V \to V$ genannt Vektoraddition und skalare Multplikation, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Das Paar $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gelten die Rechenregeln

- (a) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$
- (b) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$
- (c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
- (d) $1_K \cdot v = v$

Die Elemente der Menge V werden Vektoren genannt.

Beispiele für K-Vektorräume

- das Tripel $(K^n, +, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

  $$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

  als Vektoraddition und

  $$\lambda \cdot (a_1, ..., a_n) = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$$

  als skalarer Multiplikation Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein K-Vektorraum.

- das Tripel $(\{0_K\}, +, \cdot)$, mit den Abbildungen $+$ und $\cdot$ gegeben durch $0_K + 0_K = 0_K$ und $\lambda \cdot 0_K = 0_K$ für alle $\lambda \in K$

- das Tripel $(\mathscr{M}_{m \times n, K}, +, \cdot)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ wobei $+$ die Addition von Matrizen und $\cdot$ durch $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ gegeben ist

- Jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ besitzt auch eine Struktur als $\mathbb{R}$-Vektorraum, gegeben durch $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$, wobei die Abbildung $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times V \to V$ durch Einschränkung der Abbildung $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R} \times V$ zu Stande kommt.

Rechenregeln in einem K-Vektorraum

Lemma (6.3)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Dann gilt für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ die Äquivalenz

$$\lambda \cdot v = 0_V \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0_K \text{ oder } v = 0_V \quad ,$$

außerdem $(-1_K) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

Beweis von Lemma 6.3

λv

2. $\binom{3}{5}$

zu (i) geg. $\lambda \in K$, $v \in V$, z.zg:

$$\lambda \cdot v = 0_V \iff \lambda = 0_K \text{ oder } v = 0_V$$

„$\Leftarrow$" 1. Fall: $\lambda = 0_K$ z.zg: $0_K \cdot v = 0_V$

$$0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v = 0_K v + 0_K \cdot v \longrightarrow$$

$$0_K \cdot v + (-(0_K v)) = 0_K \cdot v + 0_K \cdot v + (-(0_K v)) \Rightarrow$$

$$0_V = \cdot 0_K v + 0_V \longrightarrow 0_V = 0_K \cdot v$$

2. Fall: $v = 0_V$ z.zg. $\lambda \cdot 0_V = 0_V$

$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V \Rightarrow$

$\lambda \cdot 0_V + (-(\lambda \cdot 0_V)) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V + (-(\lambda \cdot 0_V)) \Rightarrow$

$0_V = \lambda \cdot 0_V + 0_V \Rightarrow 0_V = \lambda \cdot 0_V$

„$\Rightarrow$" Ang. $\lambda \cdot v = 0_V$, aber $\lambda \neq 0_K$, $v \neq 0_V$.

$\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow \lambda^{-1} \cdot \lambda v = \lambda^{-1} \cdot 0_V \overset{s.o.}{\Rightarrow} 1_K v = 0_V$

$\Rightarrow v = 0_V$ ↯

zu (b) zu zeigen: $(-1_K) \cdot v$ ist das Inverse von v in $(V, +)$, d.h. $(-1_K) \cdot v + v = 0_V$, $v + (-1_K)v = 0_V$

$$(-1_K) \cdot v + v = (-1_K) \cdot v + 1_K \cdot v = ((-1_K) + 1_K) \cdot v =$$

$$0_K \cdot v = 0_V \quad , \quad v + (-1_K) \cdot v = 1_K \cdot v + (-1_K) \cdot v =$$

$$(1_K + (-1_K)) \cdot v = 0_K \cdot v = 0_V .$$

□

zu (i) Es gilt $0_K \cdot v + 0_K \cdot w = 0_V + 0_V = 0_V$.

Dies zeigt, dass 0_V in $\langle v, w \rangle_K$.

zu (ii) Seien $v', w' \in \langle v, w \rangle_K$. z.zg.: $v' + w' \in \langle v, w \rangle_K$

$v' \in \langle v, w \rangle_K \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in K$ mit $v' = \lambda v + \mu w$

$w' \in \langle v, w \rangle_K \Rightarrow \exists \lambda', \mu' \in K$ mit $w' = \lambda' v + \mu' w$

$\rightarrow v' + w' = (\lambda v + \mu w) + (\lambda' v + \mu' w) =$

$\lambda v + \lambda' v + \mu w + \mu' w = (\lambda + \lambda') v + (\mu + \mu') w$

$\Rightarrow v' + w' \in \langle v, w \rangle_K$

zu (iii) Seien $v' \in \langle v, w \rangle_K$ und $\alpha \in K$ z.zg.: $\alpha v' \in \langle v, w \rangle_K$

$v' \in \langle v, w \rangle_K \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in K$ mit $v' = \lambda v + \mu w \Rightarrow$

$\alpha v' = \alpha (\lambda v + \mu w) = (\alpha \lambda) v + (\alpha \mu) w \Rightarrow \alpha v' \in \langle v, w \rangle_K$

Definition der Untervektorräume

Definition (6.4)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ wird Untervektorraum von V genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $0_V \in U$

(ii) $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$

(iii) $\lambda \cdot v \in U$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$

Untervektorräume sind Vektorräume

Satz (6.5)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Definieren wir Abbildungen $+_U : U \times U \to V$ und $\cdot_U : K \times U \to V$ durch

$$v +_U w = v + w \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot_U v = \lambda \cdot v$$

für $v, w \in U$ und $\lambda \in K$, dann ist durch $(U, +_U, \cdot_U)$ ein K-Vektorraum gegeben.

Definition der affinen Unterräume

Definition (6.6)

Eine Teilmenge $A \subseteq V$ wird affiner Unterraum von V genannt, wenn entweder $A = \varnothing$ gilt oder ein Untervektorraum U und ein Vektor $v \in V$ existieren, so dass

$$A \quad = \quad v + U \quad = \quad \{v + u \mid u \in U\}$$ erfüllt ist.

Beispiele für affine Unterräume

(i) Seien $u, v \in V$. Dann ist $u + \langle v \rangle_K = \{u + \lambda v \mid \lambda \in K\}$ ein affiner Unterraum. Im Fall $v \neq 0_V$ bezeichnet man ihn als affine Gerade.

(ii) Für beliebige $u, v, w \in V$ ist durch $u + \langle v, w \rangle_K = \{u + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in K\}$ ein affiner Unterraum gegeben. Ist $v \neq 0_V$ und w kein skalares Vielfaches von v (also $w \neq \lambda v$ für alle $\lambda \in K$), dann nennt man $u + \langle v, w \rangle_K$ eine affine Ebene.

Nachweis, dass $u + \langle v, w \rangle_K$ ein affiner Unterraum des K-Vektorraums V ist, für bel $u, v, w \in V$:

Es genügt zu zeigen, dass $\langle v, w \rangle_K$ ein Unter-vektorraum von V ist

Nach Definition ist $\langle v, w \rangle_K = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in K\}$.

zu überprüfen: (i) $0_V \in \langle v, w \rangle_K$

(ii) $\forall v', w' \in \langle v, w \rangle_K : v' + w' \in \langle v, w \rangle_K$

(iii) $\forall \alpha \in K \; \forall v' \in \langle v, w \rangle_K : \alpha v' \in \langle v, w \rangle_K$

zu (i) Es gilt $0_K \cdot v + 0_K \cdot w = 0_V + 0_V = 0_V$.

Dies zeigt, dass 0_V in $\langle v, w \rangle_K$.

zu (ii) Seien $v', w' \in \langle v, w \rangle_K$. z.zg.: $v' + w' \in \langle v, w \rangle_K$

$v' \in \langle v, w \rangle_K \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in K$ mit $v' = \lambda v + \mu w$

$w' \in \langle v, w \rangle_K \Rightarrow \exists \lambda', \mu' \in K$ mit $w' = \lambda' v + \mu' w$

$\Rightarrow v' + w' = (\lambda v + \mu w) + (\lambda' v + \mu' w) =$

$\lambda v + \lambda' v + \mu w + \mu' w = (\lambda + \lambda') v + (\mu + \mu') w$

$\Rightarrow v' + w' \in \langle v, w \rangle_K$

zu (iii) Seien $v' \in \langle v, w \rangle_K$ und $\alpha \in K$ z.zg.: $\alpha v' \in \langle v, w \rangle_K$

$v' \in \langle v, w \rangle_K \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in K$ mit $v' = \lambda v + \mu w \Rightarrow$

$\alpha v' = \alpha (\lambda v + \mu w) = (\alpha\lambda) v + (\alpha\mu) w \Rightarrow \alpha v' \in \langle v, w \rangle_K$

Struktur der affinen Unterräume

Proposition (6.7)

Sei V ein K-Vektorraum und $\varnothing \neq A \subseteq V$ ein affiner Unterraum.

(i) Es gibt genau einen Untervektorraum U von V, so dass die Gleichung $A = v + U$ für ein $v \in V$ erfüllt ist.

(ii) Für jeden Vektor $w \in A$ erfüllt der Untervektorraum U aus Teil (i) die Gleichung $A = w + U$.

Wir nennen U den zu A gehörenden Untervektorraum und bezeichnen ihn mit $\mathscr{L}(A)$.

Beweis von Proposition 6.7:

zu (i) zu zeigen: Sind $v, v' \in V$ und U, U' Unter-
vektorräume von V mit $v+U \overset{(*)}{=} v'+U'$, dann
folgt $U = U'$ zu überprüfen also:

(1) $U' \subseteq U$ (2) $U \subseteq U'$

zu (1) Sei $u \in U'$ z.zg.: $u \in U$

$u \in U' \Rightarrow v'+u \in v'+U' \overset{\text{Vor. (*)}}{\Rightarrow} v'+u \in v+U \rightarrow$

$\exists\, u_0 \in U$ mit $v'+u = v+u_0$

$v' \in v'+U' \overset{(*)}{\Rightarrow} v' \in v+U \rightarrow \exists\, u_1 \in U : v' = v+u_1$

$\rightarrow u = v+u_0-v' = v+u_0-(v+u_1) = u_0-u_1 \in U$ zu (2) analog