Mächtigkeit von Mengen, Unendlichkeit

Im Folgenden bezeichnet $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Außerdem setzen wir $M_0 = \varnothing$.

Definition (4.9)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Man sagt, eine Menge A besteht aus n Elementen oder hat die Mächtigkeit n, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : M_n \to A$ existiert. Wir schreiben dann $|A| = n$.

Definition (4.10)

Eine Menge A ist endlich, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|A| = n$ existiert. Ansonsten bezeichnen wir die Menge A als unendlich.

Proposition (4.11)

Zwei endliche Mengen A, B haben genau dann dieselbe Mächtigkeit, wenn eine Bijektion $A \to B$ existiert.

Rechenregeln für Mächtigkeiten

Satz (4.12)

(i) Sind A und B endliche disjunkte Mengen, ist also $A \cap B = \varnothing$, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(ii) Ist B endlich und $A \subseteq B$, dann gilt $|A| \leq |B|$ und $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

(iii) Sind A und B beliebige endliche Mengen, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ und $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(iv) Für jede endliche Menge A gilt $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Ist A eine endliche Menge, dann ist also insbesondere jede Teilmenge von A endlich, und ebenso die Potenzmenge $\mathscr{P}(A)$.

Definition der Binomialkoeffizienten

Definition (4.13)

Für jede Menge B und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathscr{P}_k(B)$ jeweils die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von B, also

$$\mathscr{P}_k(B) \quad = \quad \left\{ A \in \mathscr{P}(B) \;\middle|\; |A| = k \right\}.$$

Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{n}{k} = |\mathscr{P}_k(M_n)|$ und bezeichnen diese Zahl als den Binomialkoeffizienten von n über k.

Einige Binomialkoeffizienten lassen sich direkt angeben.

- $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{1} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k > n$

Berechnung von $\binom{5}{3}$

$$\mathcal{P}_3(M_5) = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},$$
$$\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},$$
$$\{2,4,5\},\{3,4,5\}\} \Rightarrow \binom{5}{3} = |\mathcal{P}_3(M_5)| = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{1}{2!}\,\frac{5!}{3!} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 = 10$$

Eine Formel für die Binomialkoeffizienten

Proposition (4.14)

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$, wobei $k \geq 1$ ist. Dann gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} .$$

Die Fakultätsfunktion ist definiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zum Beispiel ist

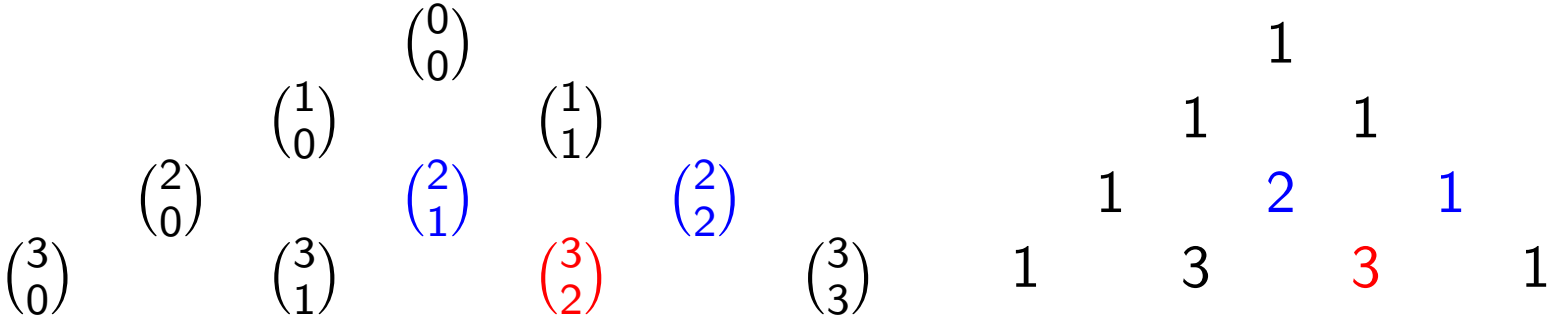
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Satz (4.15)

Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Das Pascalsche Dreieck



Jeder Binomialkoeffizient, der nicht am linken oder rechten Rand des Dreiecks liegt, ist die Summe der beiden über im stehenden Binomialkoeffizienten.

Beweis von Prop. 4.14:

Es gilt $\binom{n+1}{k} = |\mathcal{P}_k([n+1])|$. Betrachte in $\mathcal{P}_k([n+1])$ die folgenden beiden Teilmengen:

$$S = \{A \in \mathcal{P}_k([n+1]) \mid n+1 \in A\}$$

$$T = \{A \in \mathcal{P}_k([n+1]) \mid n+1 \notin A\} = \mathcal{P}_k([n])$$

Es gilt $\mathcal{P}_k([n+1]) = S \cup T$ und $S \cap T = \emptyset$.

$$\Rightarrow |\mathcal{P}_k([n+1])| = |S| + |T| = |S| + \binom{n}{k}$$

Offenbar ist durch $S \to \mathcal{P}_{k-1}([n]),\ A \mapsto A \setminus \{n+1\}$ eine Bijektion gegeben (mit Umkehrabb. $B \mapsto$

$B \cup \{n+1\}$. $\Rightarrow |S| = |P_{k-1}(M_n)| = \binom{n}{k-1}$

$\Rightarrow \binom{n+1}{k} = |P_k(M_{n+1})| = |S| + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

□

Beweis von Satz 4.15:

Zeige durch vollst. Ind über $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Aussage: $\forall k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Ind.-Anf.: $\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!\,(0-0)!}$

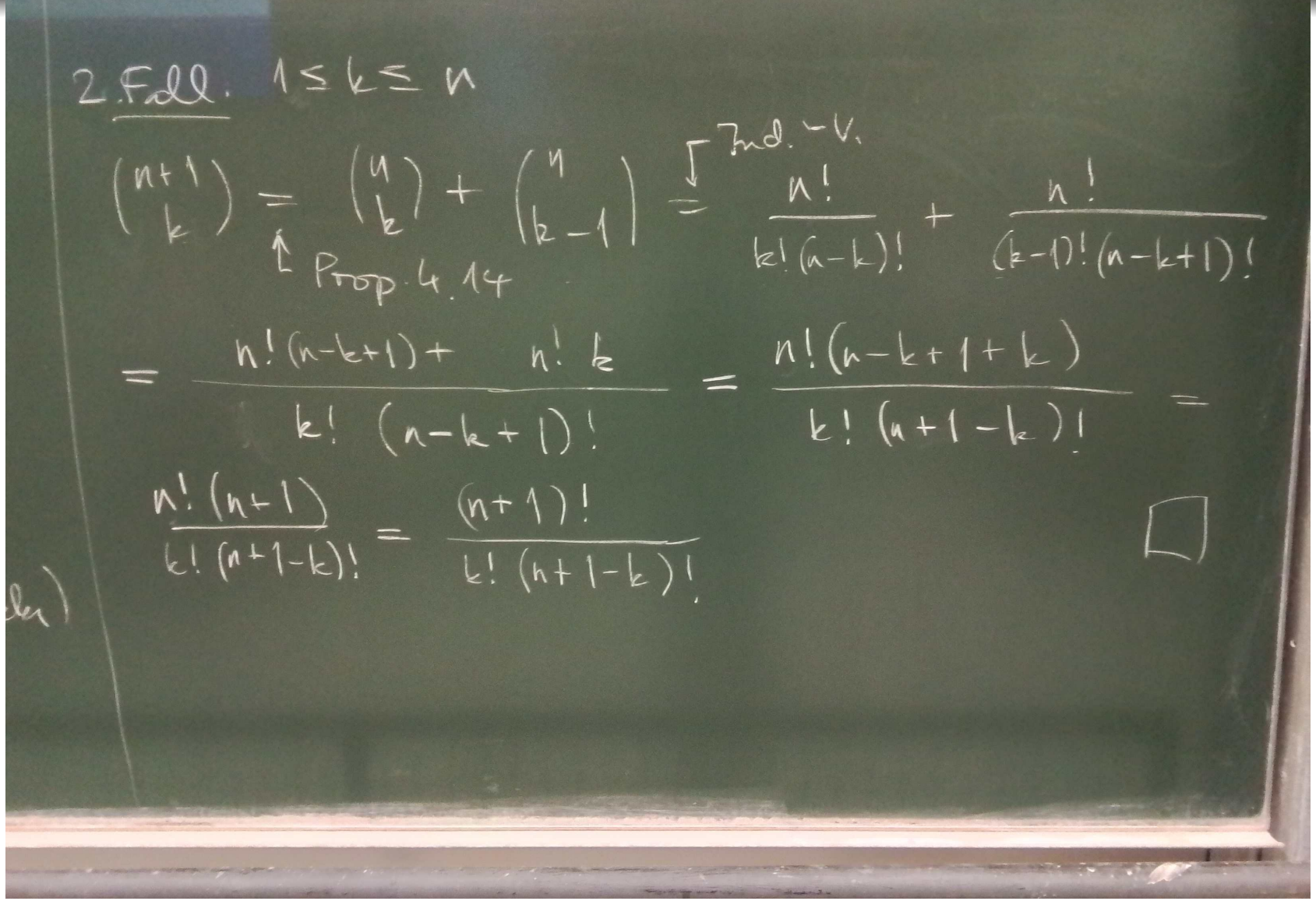
$\triangleq$ wg. $P_0(M_0) = P_0(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Ind.-schritt: Ind.V. $\Rightarrow \forall k \leq n: \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Sei nun $k \in \{0, \ldots, n+1\}$. 1. Fall: $k = n+1$

Es gilt $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0} = 1$ (auf Grund der bereits bekannten Regeln)

und auch $\binom{n}{n+1} + \binom{n}{(n+1)-1} = 0 + \binom{n}{n} = 0 + 1 = 1$



Ergänzung: Für $k = 0$ muss die Gleichung auch noch überprüft werden. Wir wissen bereits, dass $\binom{n}{0} = 1$ ist, und andererseits gilt auch $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.

Gleiche Mächtigkeit bei unendlichen Mengen

Proposition (4.16)

Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ existiert.

Definition (4.17)

Wir bezeichnen zwei Mengen A und B als gleichmächtig (oder als Mengen mit gleicher Mächtigkeit) und schreiben $|A| = |B|$, wenn eine Bijektion $\phi : A \to B$ existiert.

Wegen Proposition 4.11 ist dies konsistent mit der entsprechenden Beziehung zwischen endlichen Mengen.

Beweis von Prop. 4.16:

„⟸" Ang. es gibt eine inj. Abb. $\varphi: \mathbb{N} \to A$, aber A ist endlich, d.h. $n = |A|$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

$\varphi|_{M_n}: M_n \to A$ ist dann eine inj. Abb. auf eine echte Teilmenge $B \subsetneq A$ von A.

Aufgefasst als Abb. $\varphi|_{M_n}: M_n \to B$ ist $\varphi|_{M_n}$ eine Bijektion. $B \subsetneq A \overset{\text{Satz 4.12}}{\Rightarrow} |A| = |B| + |C|$ mit $C = A \setminus B$ (wg. $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$) wobei $|C| > 0$ $\overset{n=|A|}{\Rightarrow}$ $n = |B| + |C|$ $\varphi|_{M_n}: M_n \to B$ bij. $\Rightarrow |B| = n \Rightarrow n = n + |C|$ mit $|C| > 0$ ↯

„⇒" Vor: A ist unendlich

Definiere $\varphi : \mathbb{N} \to A$ folgendermaßen rekursiv:

$A \neq \emptyset$ (sonst $|A| = |\emptyset| = 0$ endlich ↯)

$\to \exists\, a_1 \in A$, setze $\varphi(1) = a_1$

Sei $n \in \mathbb{N}$, ang. $\varphi(k) = a_k$ ist für $k \leq n$ schon definiert, und $\varphi|_{M_n}$ ist injektiv. Dann gilt

$A \setminus \varphi(M_n) \neq \emptyset$ (sonst $\varphi(M_n) = A$, $\varphi : M_n \to A$ surj. $\Rightarrow |A| = n \Rightarrow A$ endlich ↯) Wähle $a_{n+1} \in A \setminus \varphi(M_n)$, setze $\varphi(n+1) = a_{n+1}$. Überprüfe: $\varphi|_{M_{n+1}}$ ist immer noch injektiv. Insgesamt erhält man eine inj. Abb auf ganz $\mathbb{N}$. □

Es gilt $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$, denn:

$\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ ist offenbar bijektiv

Es gelt auch $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, denn die Aufzählung $\underset{a_1}{0}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_3}{-1}, \underset{a_4}{2}, \underset{a_5}{-2}, \underset{a_6}{3}, \ldots$ kann genutzt werden, um eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ anzugeben. $(\mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ k \mapsto a_k)$

Definition der abzählbaren Unendlichkeit

Definition (4.18)

- Eine Menge A wird abzählbar unendlich genannt, wenn sie die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt.
- Eine Menge, die endlich oder abzählbar unendlich ist, nennen wir höchstens abzählbar.
- Eine Menge, die nicht höchstens abzählbar ist, bezeichnet man als überabzählbar.

Eigenschaften abzählbar unendlicher Mengen

Proposition (4.19)

Abzählbar unendliche Mengen sind unendlich.

Lemma (4.20)

Jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.

Eigenschaften abzählbar unendlicher Mengen (Forts.)

Proposition (4.21)

(i) Teilmengen höchstens abzählbarer Mengen sind höchstens abzählbar.

(ii) Sind A, B Mengen, ist A höchstens abzählbar und $\phi : A \to B$ eine surjektive Abbildung, dann ist auch B höchstens abzählbar.

Beweis von Prop. 4.21:

zu (i) Seien A, B Mengen, wobei $B \subseteq A$ und A höchstens abzählbar.

1. Fall: A ist endlich

Prop. 4.12 $\Rightarrow$ B ist endlich $\Rightarrow$
B ist höchstens abzählbar

2. Fall: A ist abzählbar unendlich

$\Rightarrow \exists$ Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to A$

Ang. B ist unendlich. z.zg. B ist abzählbar unendlich. Betrachte $B_0 = \varphi^{-1}(B)$.

Dann ist $B_0 \subseteq \mathbb{N}$. und B_0 ist unendlich, weil $\psi|_{B_0}$ eine Bijektion zwischen B_0 und B liefert. $B_0 \subseteq \mathbb{N}$, B_0 unendlich

Lemma 4.20 $\Rightarrow$ B_0 ist abzählbar unendl. Auf Grund der Bij. $B_0 \to B$ ist auch B abzählbar unendlich.

zu (ii) $\phi: A \to B$ surj. $\overset{\text{Satz 4.8}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \psi: B \to A$ mit $\phi \circ \psi = id_B$

$\overset{\text{Satz 4.8}}{\Rightarrow}$ ψ ist injektiv. Teil (a) $\Rightarrow$ $\psi(B) \subseteq A$ ist höchstens abzählbar ψ injektiv $\Rightarrow$ $\psi|_B$ ist Bij. zwischen B und $\psi(B)$

$\Rightarrow$ B ist höchstens abzählbar. $\square$

Eigenschaften abzählbar unendlicher Mengen (Forts.)

Sprechweise:
Seien I und A Mengen. Eine Abbildung $\varphi : I \to A$ nennt man auch eine Familie von Elementen der Mengen A und verwendet für diese dann die Schreibweise $(a_i)_{i \in I}$. Für das Element $\varphi(i)$ wird dann jeweils die Notation a_i verwendet, und man bezeichnet i als den Index (so etwas wie ein „Label“) des Elements $a_i \in A$.

Satz (4.22)

(i) Sind A und B abzählbar unendliche Mengen, dann ist auch $A \times B$ abzählbar unendlich.

(ii) Ist I höchstens abzählbar, und ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie bestehend aus lauter höchstens abzählbaren Mengen A_i, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i$ höchstens abzählbar.

Beweis von Satz 4.22:

zu ii) Führe die Aussage zurück auf den Fall

$A = B = \mathbb{N}$ A, B abzählbar unendlich

sind $\Rightarrow \exists$ Bij. $\varphi: \mathbb{N} \to A$, $\psi: \mathbb{N} \to B$

Laut Annahme ist bereits gezeigt, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist. $\Rightarrow \exists$ Bij $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

zzg: $\exists$ Bijektion von $\mathbb{N} \to A \times B$

Überprüfe: $\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, $(m,n) \mapsto (\varphi(m), \psi(n))$

ist Bijektiv. $\Rightarrow \phi \circ \alpha$ ist Bij $\mathbb{N} \to A \times B$

noch zu zeigen: $\exists$ Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Idee. Zähle die Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach folgendem Schema auf:

$(1,1)_1$ $(1,2)_3$ $(1,3)_6$ $(1,4)_{10}$

$(2,1)_2$ $(2,2)_5$ $(2,3)_9$

$(3,1)_4$ $(3,2)_8$

$(4,1)_7$

Verwende diese Nummerierung, um eine Bij. $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ anzugeben.

Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit der Zahlbereiche

Satz (4.23)

(i) Die Menge $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar unendlich.

(ii) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich.

(iii) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.

(iv) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis von Satz 4.23 (iv):

Ang. $\mathbb{R}_+$ ist abzählbar unendlich,

d.h. $\exists$ Bij. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $n \mapsto a_n$

Betrachte für jedes a_n die Dezimal-

bruchentwicklung $a_n = a_{n,0}, a_{n,1} a_{n,2} a_{n,3} \ldots$

mit $a_{n,0} \in \mathbb{N}_0$, $a_{n,k} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

Bedingung: Es gibt jeweils kein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_{n,k} = 9 \; \forall k \geq N$

($\Rightarrow$ Darst. ist eindeutig).

Definiere eine neue reelle Zahl r

$= 0, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots$

wobei $r_k = \begin{cases} 5 & \text{falls } a_{n,n} = 4 \\ 4 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ r und a_n unterscheiden sich in der n-ten Nachkommastelle.

$\rightarrow r \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\lightning$ zur Bijektivität!