Eigenschaften von Abbildungen

Definition (4.6)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ jeweils $x_1 = x_2$ folgt, dann nennt man die Abbildung injektiv.

(ii) Wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, dann wird f surjektiv genannt.

(iii) Eine Abbildung f, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, bezeichnet man als bijektiv.

Satz (4.7)

Die Komposition zweier injektiver (bzw. surjektiver, bijektiver) Abbildungen ist injektiv (bzw. surjektiv, bijektiv).

Charakterisierung injektiver, surjektiver und bijektiver Abbildungen

Satz (4.8)

Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Es ist f genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ existiert.

(ii) Sie ist genau dann surjektiv, wenn es ein $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

(iii) Sie ist bijektiv genau dann, wenn ein $g : Y \to X$ mit den Eigenschaften $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ existiert. Die Abbildung g mit diesen beiden Eigenschaften ist dann eindeutig bestimmt. Man nennt sie die Umkehrabbildung von f und bezeichnet sie mit f^{-1}.

Hinweis: Ist $V \subseteq Y$ eine Teilmenge, dann bezeichnet $f^{-1}(V)$ die Urbildmenge von V unter f, unabhängig davon, ob f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt oder nicht.

· NICHT RAUCHEN ·

Beweis von Satz 4.8

zu (ii) „$\Rightarrow$" Vor.: $f: X \to Y$ ist surjektiv

Da f surjektiv ist, existiert für jedes $y \in Y$ ein $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$. Definiere dann $g: Y \to X$ durch $g(y) = x_y$ für alle $y \in Y$. Beh.: $f \circ g = id_Y$. Sei $y \in Y$.

z.zg: $(f \circ g)(y) = id_Y(y)$

Tatsächlich gilt $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y = id_Y(y)$.

„$\Leftarrow$" Vor.: $\exists\, g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$

z.zg: g ist surjektiv. Sei $y \in Y$. z.zg: $\exists\, x \in X: f(x) = y$

Sei $x = g(y)$. Dann gilt $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y)$

$= id_Y(y) = y$.

zu (iii) „$\Rightarrow$" Vor.: f ist Objektiv

f injektiv $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ $\exists g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$

f surjektiv $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ $\exists h: Y \to X$ mit $f \circ h = id_Y$

Beh. $g = h$ (Daraus folgt, dass es eine Abb. $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$ gibt.)

Sei $y \in Y$. z.zg.: $g(y) = h(y)$

Es gilt: $g(y) = g(id_Y(y)) = (g \circ id_Y)(y)$

$= (g \circ f \circ h)(y) = (id_X \circ h)(y) = id_X(h(y))$

$= h(y)$

„$\Leftarrow$" Vor.: $\exists g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. (i) $\Rightarrow$ f ist inj. (iii) $\Rightarrow$ f ist surjektiv

Insgesamt ist f also bijektiv.

Zur Eindeutigkeit: Ang. $g: Y \to X$ und $h: Y \to X$ sind beides Abb. mit der unter (iii) angeg. Eigenschaft. Dann gilt insb. $g \circ f = id_X$ und $f \circ h = id_Y$. Wie oben gezeigt: folgt daraus $g = h$.

□

Mächtigkeit von Mengen, Unendlichkeit

Im Folgenden bezeichnet $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Außerdem setzen wir $M_0 = \varnothing$.

Definition (4.9)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Man sagt, eine Menge A besteht aus n Elementen oder hat die Mächtigkeit n, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : M_n \to A$ existiert. Wir schreiben dann $|A| = n$.

Definition (4.10)

Eine Menge A ist endlich, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|A| = n$ existiert. Ansonsten bezeichnen wir die Menge A als unendlich.

Frage: Ist die Mächtigkeit $|A|$ einer endlichen Menge wirklich eindeutig bestimmt?

Ang., nein. Dann gibt es für eine Menge A zwei nat. Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ und Bijektionen $\varphi: M_m \to A$ und $\psi: M_n \to A$. Dann ist auch $\psi^{-1} \circ \varphi : M_m \to M_n$ eine Bijektion.

zeige: Für bel. nat. Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ existiert niemals eine Bijektion $M_m \to M_n$.

Lemma: Sei M eine Menge und $a, b \in M$ mit $a \neq b$. Definiere $\delta_{a,b} : M \to M$ durch

$$x \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } x = b \\ b & \text{falls } x = a \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\delta_{a,b}$ bijektiv.

Beweis: Überprüfe durch Fallunterscheidung.

$\forall x \in M: (\delta_{a,G} \circ \delta_{a,G})(x) = id_M(x)$

Also ist $\delta_{a,G}$ seine eigene Umkehrabb.

Satz 4.8 $\Rightarrow$ $\delta_{a,G}$ ist bijektiv $\square$

Zeige nun durch vollst. Ind. über $n \in \mathbb{N}_0$:

Für kein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ und eine Bijektion $M_m \to M_n$.

Ind.-Anf. $n = 0$: Die Aussage gilt, weil kein $m < n$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ existiert.

Ind.-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, setze die Aussage für n voraus. Ang., es existiert eine Bijektion $f: M_m \to M_{n+1}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $m < n+1$. Definiere $g: M_m \to M_{n+1}$ wie folgt: Ist $f(m) = n+1$, dann setze $g = f$. Falls nicht, setze $g = \delta_{f(m), n+1} \circ f$. Dann gilt $g(m) = n+1$ in jedem Fall. Setze $h = g|_{M_{m-1}}$. Dann gilt $h(M_{m-1}) \subseteq M_n$ und h ist eine Bijektion zwischen M_{m-1} und M_n. (denn: Sonst gäbe es ein $k \in M_{m-1}$ mit $h(k) = n+1$, also auch $g(k) = n+1 = g(m)$. $\Rightarrow$ g wäre nicht injektiv. Aber g ist sogar bij. surjektiv, als komp. bijektive Abb. Aus der Surj. von g folgt die

Surj. von h als AGR $M_{m-1} \to M_n$, und die Einschränkung eines injektiven AGR. ist injektiv)

also: $m \leq n+1 \to m-1 \leq n$ Ind.-V. $\Rightarrow$

Es gibt keine bij. AGR. $M_{m-1} \to M_n$ $\lightning$

zur Existenz von h. $\square$

Rechenregeln für Mächtigkeiten

Proposition (4.11)

Zwei endliche Mengen A, B haben genau dann dieselbe Mächtigkeit, wenn eine Bijektion $A \to B$ existiert.

Satz (4.12)

(i) Sind A und B endliche disjunkte Mengen, ist also $A \cap B = \varnothing$, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(ii) Ist B endlich und $A \subseteq B$, dann gilt $|A| \leq |B|$ und $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

(iii) Sind A und B beliebige endliche Mengen, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ und $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(iv) Für jede endliche Menge A gilt $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Ist A eine endliche Menge, dann ist also insbesondere jede Teilmenge von A endlich, und ebenso die Potenzmenge $\mathscr{P}(A)$.

Beweis von Satz 4.12:

zu i) geg: endl. Mengen A, B mit $A \cap B = \emptyset$,
$m = |A|$, $n = |B|$ zz: $|A \cup B| = m+n$

daher zz: Es gibt eine Bij. $M_{m+n} \to A \cup B$

$m = |A| \Rightarrow \exists$ Bijektion $\varphi : M_m \to A$

$n = |B| \Rightarrow \exists$ Bijektion $\psi : M_n \to B$

Definiere dann $\rho : M_{m+n} \to A \cup B$, $k \mapsto \begin{cases} \varphi(k) & \text{falls } k \leq m \\ \psi(k-m) & \text{falls } k > m \end{cases}$

Überprüfe: ρ ist eine Bijektion.

(1) Injektivität: Seien $k, l \in M_{m+n}$ mit $\rho(k) = \rho(l)$

1. Fall. $p(k) \in A$ Dann gilt auch $p(l) \in A$.

$\Rightarrow p(k) = \varphi(k)$ und $p(l) = \varphi(l) \Rightarrow \varphi(k) = \varphi(l)$

φ inj. $\Rightarrow k = l$

2. Fall: $p(k) \in B$ Dann gilt auch $p(l) \in B$.

Dann muss $k > m$ und $l > m$ gelten, und somit

$p(k) = \psi(k-m)$, $p(l) = \psi(l-m) \Rightarrow \psi(k-m) = \psi(l-m)$ $\overset{\psi \text{ inj.}}{\Rightarrow} k-m = l-m \Rightarrow k = l$.

(2) surjektivität: Sei $c \in A \cup B$ z.z.: $\exists k \in M_{m+n}$ mit $p(k) = c$. 1. Fall: $c \in A$ φ surjektiv $\Rightarrow$ $\exists k \in M_n$ mit $\varphi(k) = c$. $\rightarrow p(k) = c$.

2. Fall: $c \in B$ ψ surj. $\Rightarrow \exists l \in M_n$ mit $\psi(l) = c$.

$\Rightarrow p(l+m) = c$

zu (iii) Zeige nun $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ für endl. Mengen A, B.

Zeige durch vollst. Ind. über $n \in \mathbb{N}_0$:

Ist A endliche Menge und B eine Menge mit $|B| = n$, dann gilt $|A \times B| = |A| \cdot n$.

Ind.-Anf. geg.: A endl. Menge, B Menge mit $|B| = 0$

Dann ist $B = \emptyset$ (grund.: $\nexists$ Bij. $\emptyset \to B$ weg. $\emptyset \to B$ $\emptyset$ nicht surjektiv sein.)

Wäre $B \neq \emptyset$, dann könnte $\emptyset$ nicht surjektiv sein.)

Damit ist auch $A \times B = \emptyset$ und somit $|A \times B| = 0$.

$\Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot 0$

a)

b)

Ind-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, setze die Aussage für n voraus.

o.B.d.A. A endl., B Menge mit $|B| = n+1$.

z.Zg: $|A \times B| = |A| \cdot (n+1)$

$|B| > 0 \Rightarrow B \neq \emptyset \Rightarrow \exists G \in B$ Setze $B' = B \setminus \{G\}$.

$\Rightarrow B = B' \cup \{G\}$, $B' \cap \{G\} = \emptyset$, außerdem $|\{G\}| = 1$

(denn $1 \mapsto b$ ist Bij.: $M_1 \to \{G\}$) Regel (i) $\Rightarrow$

$|B| = |B'| + 1 \Rightarrow n+1 = |B'| + 1 \Rightarrow |B'| = n$

Ind-V. $\Rightarrow |A \times B'| = |A| \cdot n$

außerdem: $A \times B = A \times B' \cup A \times \{G\}$ und $A \times B' \cap (A \times \{G\})$

$= \emptyset$ wg. $B' \cap \{G\} = \emptyset$ $\overset{\text{Regel (i)}}{\Rightarrow}$ $|A \times B| = |A \times B'| + |A \times \{G\}|$

$= |A| \cdot n + |A \times \{b\}|$

Offenbar ist $A \to A \times \{b\}$, $a \mapsto (a, b)$

eine Bijektion. $\longrightarrow |A| = |A \times \{b\}|$

$\Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot n + |A| = |A| \cdot (n+1)$

zu (iv) Zeige durch vollst. Ind. über $n \in \mathbb{N}_0$:

Ist A eine Menge mit $|A| = n$, dann ist $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Ind.-Anf.: $|A| = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$

NICHT RAUCHEN

Ind.-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, setze die Aussage für n voraus.
Sei A eine Menge mit $|A| = n+1$. z.zg.: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{n+1}$
$|A| > 0 \Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A$, setze $A' = A \setminus \{a\}$
Wie oben folgt daraus $|A'| = n$ Ind.-V. $\Rightarrow$
$|\mathcal{P}(A')| = 2^n$ Betrachte in $\mathcal{P}(A)$ die beiden
Teilmengen $S = \mathcal{P}(A') = \{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin B\}$
$T = \{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \in B\}$ Dann gilt offenbar
$\mathcal{P}(A) = S \cup T$ und $S \cap T = \emptyset$
Regel (i) $\Rightarrow$ $|\mathcal{P}(A)| = |S| + |T| = 2^n + |T|$

Betrachte die Abb. $\phi: S \to J,\ B \mapsto B \cup \{a\}$

und die Abb. $\psi: J \to S,\ B \mapsto B \setminus \{a\}$

Offenbar gilt $\psi \circ \phi = id_S$, $\phi \circ \psi = id_J$

Satz 4.8 $\Rightarrow$ ϕ ist bijektiv.

$\Rightarrow |J| = |S| = 2^n$

$\Rightarrow |P(A)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$