Definition (4.1)

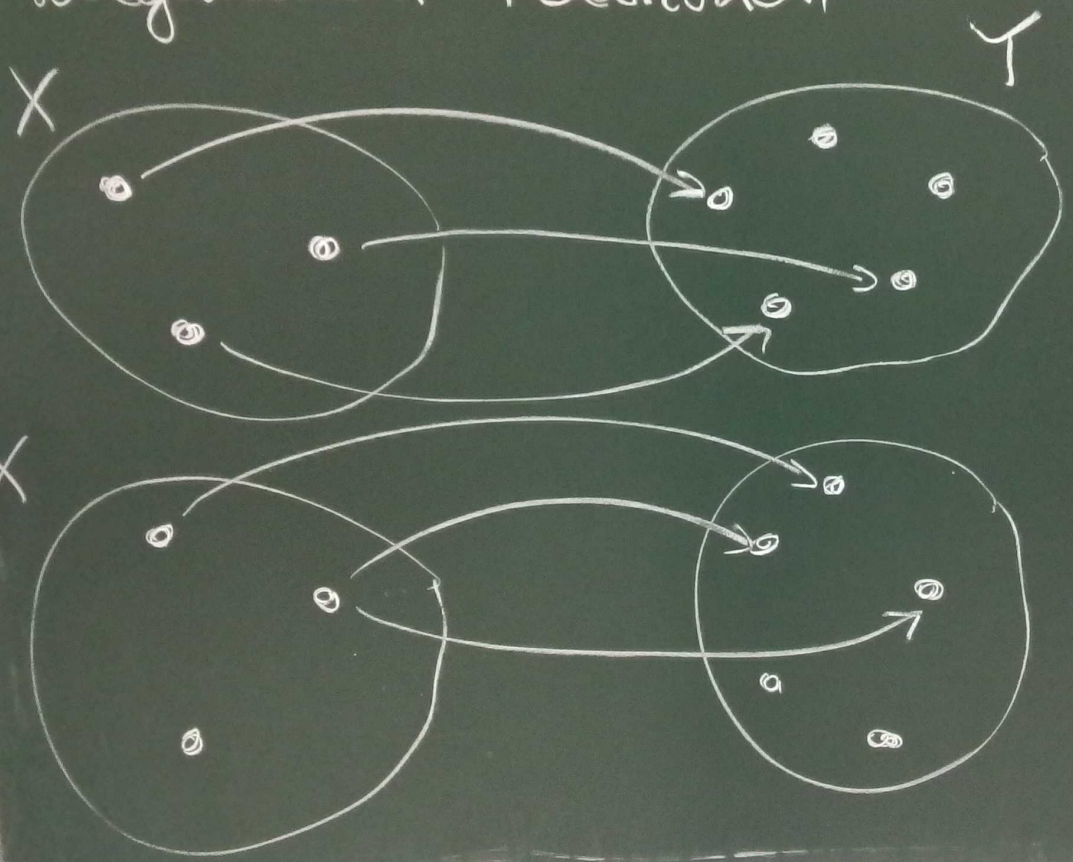
Seien X, Y Mengen. Eine Relation f zwischen X und Y wird Abbildung genannt, wenn für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert. In Formelschreibweise:

(i) $\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in f$

(ii) $\forall x \in X : \forall y, y' \in Y : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Dabei nennt man X den Definitions- und Y den Wertebereich der Abbildung.

Unterschied zwischen Abbildungen und allgemeinen Relationen



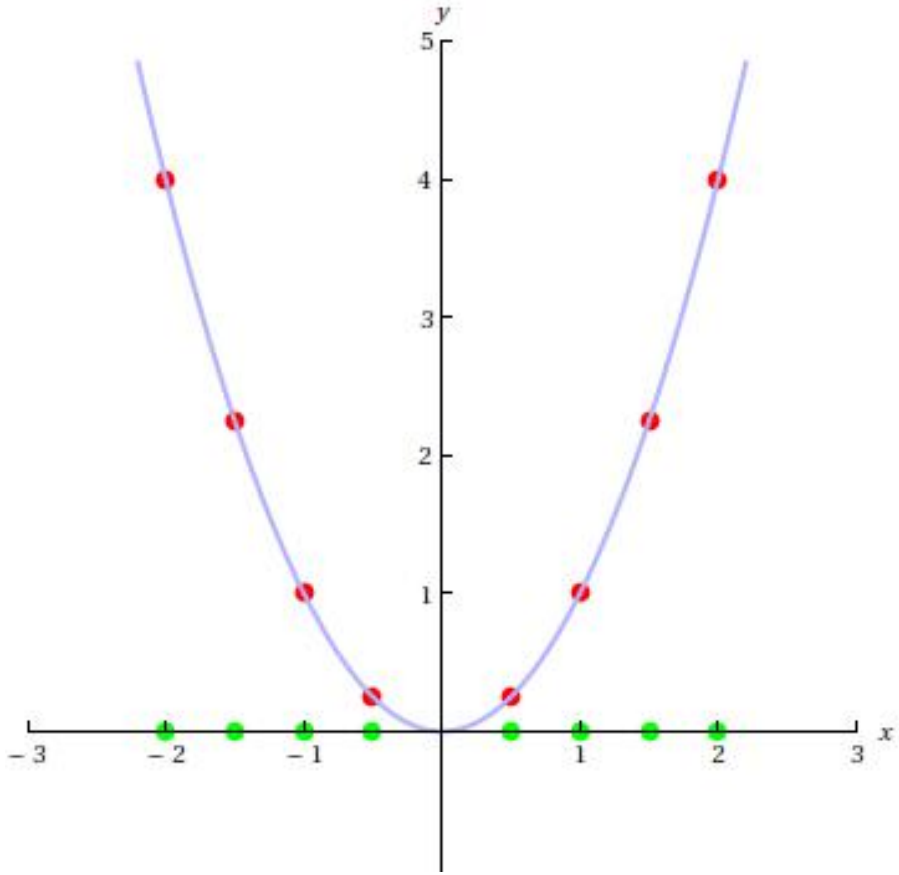
$x \to y = (x, y) \in f$

Abbildung

keine Abbildung

Beispiel für eine Abbildung

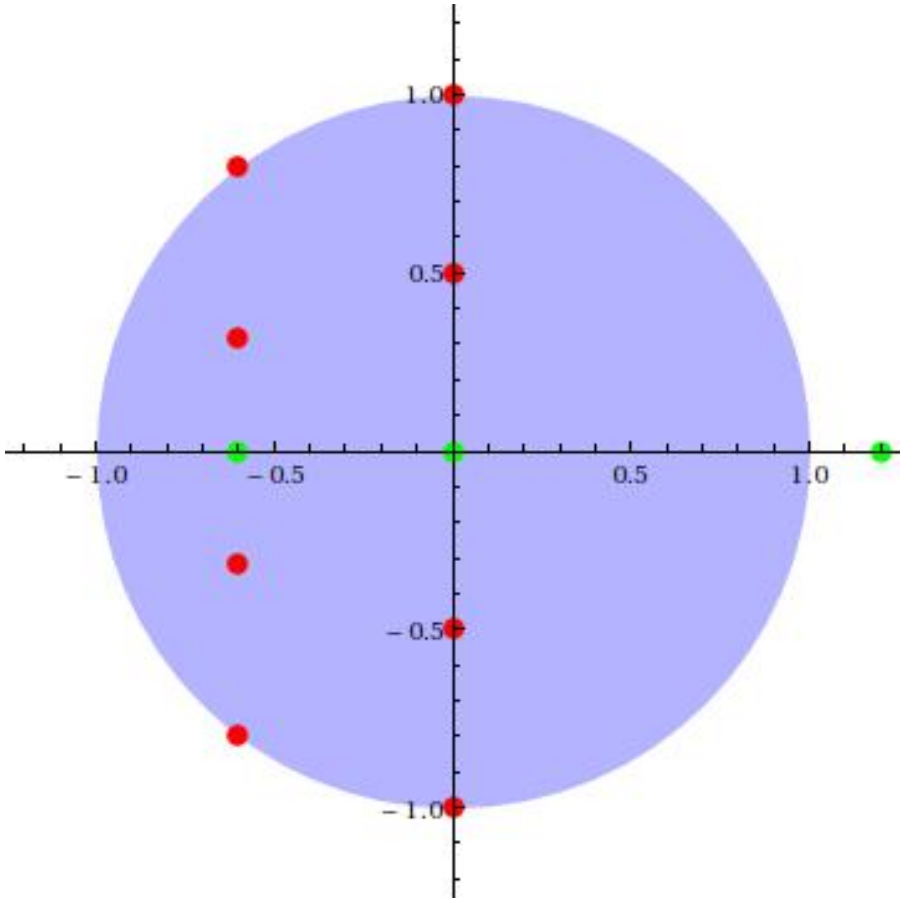
Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ist eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



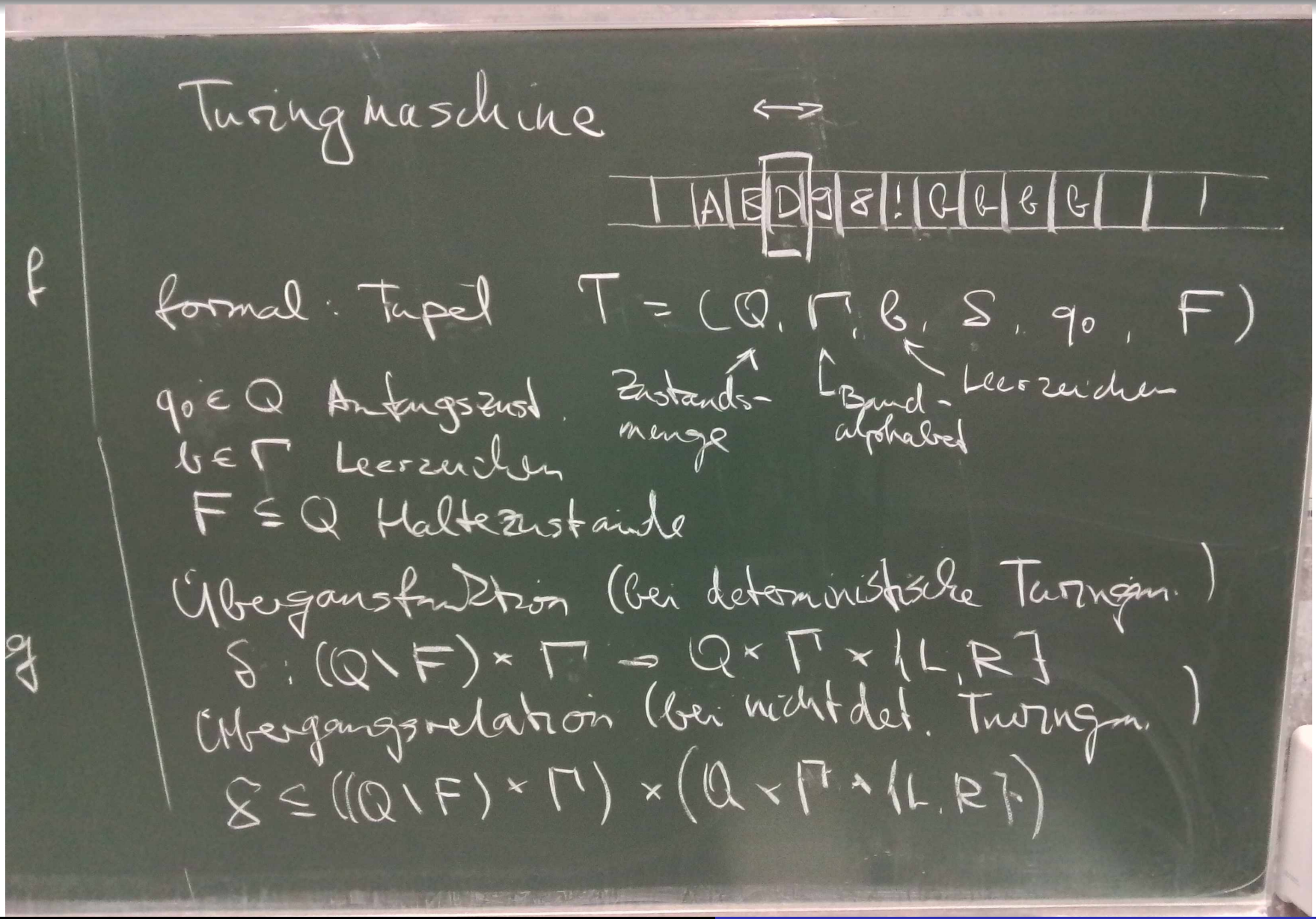
(Über jedem grünen Punkt auf der x-Achse befindet sich genau ein roter Punkt. Jedem x-Wert wird ein eindeutig bestimmter y-Wert zugeordnet.)

Ein Gegenbeispiel

Die Menge $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist keine Abbildung $X \to \mathbb{R}$, egal von welchem Definitionsbereich X mit $[0, 1] \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ man ausgeht.



Anwendung:
Übergangsfunktion vs. -relation bei Turingmaschinen



Einschränkung von Abbildungen

Proposition (4.2)

Sind X, Y Mengen, $f \subseteq X \times Y$ eine Abbildung und $U \subseteq X$. Dann ist durch

$$f|_U = \{(x, y) \in f \mid x \in U\} = f \cap (U \times Y)$$

eine Abbildung von U nach Y definiert. Wir bezeichnen sie als die Einschränkung von f auf die Teilmenge U.

(Hier wird also lediglich der Definitionsbereich der Abbildung verkleinert.)

Komposition von Abbildungen

Proposition (4.3)

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann ist

$$g \circ f = \{ (x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \}$$

eine Abbildung von X nach Z, und es gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$. Man nennt $g \circ f$ die Komposition der Abbildungen f und g.

Beispiel: Wir betrachten die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1 \text{ und } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$$

Dann sind die Abbildungen $g \circ f$ und $f \circ g$ gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 \text{ und } (f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

Bild- und Urbildmengen

Definition (4.4)

Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$.

(i) Die Teilmenge $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subseteq Y$ wird die Bildmenge von U unter der Abbildung f genannt. Es handelt sich um die Elemente von Y, die man dadurch erhält, dass man f auf ein Element aus U anwendet.

(ii) Die Teilmenge $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subseteq X$ wird die Urbildmenge von V unter f genannt. Sie besteht aus genau den Elementen von X, die nach V abgebildet werden.

Beziehung zwischen Bild- und Urbildmengen

Proposition (4.5)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$. Dann gilt

(i) $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ (ii) $U \subseteq f^{-1}(f(U))$

Beweis von Proposition 4.5

zu (i) z.zg.: $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

Sei $y \in f(f^{-1}(V))$, z.zg.: $y \in V$

$y \in f(f^{-1}(V)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(V)$ mit $y = f(x)$

↑ Def. des Bildmenge

$x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow y \in V$

zu (ii) z.zg.: $U \subseteq f^{-1}(f(U))$

Sei $x \in U$. z.zg.: $x \in f^{-1}(f(U))$.

dafür z.zg.: $f(x) \in f(U)$

dafür zzg.: $\exists u \in U$ mit $f(u) = f(x)$

Offenbar erfüllt x diese Gleichung, somit ist der Beweis abgeschlossen.

Eigenschaften von Abbildungen

Definition (4.6)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ jeweils $x_1 = x_2$ folgt, dann nennt man die Abbildung injektiv.

(ii) Wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, dann wird f surjektiv genannt.

(iii) Eine Abbildung f, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, bezeichnet man als bijektiv.

Charakterisierung einer Abbildung durch Urbilder

Die drei soeben definierten Eigenschaften von Abbildungen lassen sich auch mit Hilfe der Urbildmengen charakterisieren. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann...

- injektiv, wenn $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ höchstens ein Element enthält,
- surjektiv, wenn $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ mindestens ein Element enthält,
- bijektiv, wenn $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ genau ein Element enthält.

Erhaltung der Eigenschaften unter Komposition

Satz (4.7)

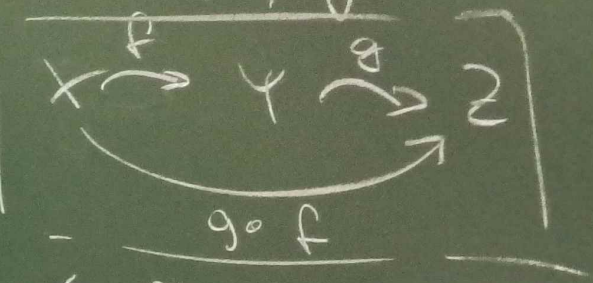
Die Komposition zweier injektiver (bzw. surjektiver, bijektiver) Abbildungen ist injektiv (bzw. surjektiv, bijektiv).

Beweis von Satz 4.7 für die Injektivität:

geg: Mengen X, Y, Z

zwei injektive Abb. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

Beh.: $g \circ f : X \to Z$ ist eine injektive Abbildung



Seien $x_1, x_2 \in X$. z.zg.: $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Seien also $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ voraus. z.zg.: $x_1 = x_2$

Vor.: $\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ $\overset{g \text{ injektiv}}{\Longrightarrow}$ $f(x_1) = f(x_2)$

$\overset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow}$ $x_1 = x_2$

Charakterisierung injektiver, surjektiver und bijektiver Abbildungen

Satz (4.8)

Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Es ist f genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ existiert.

(ii) Sie ist genau dann surjektiv, wenn es ein $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

(iii) Sie ist bijektiv genau dann, wenn ein $g : Y \to X$ mit den Eigenschaften $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ existiert. Die Abbildung g mit diesen beiden Eigenschaften ist dann eindeutig bestimmt. Man nennt sie die Umkehrabbildung von f und bezeichnet sie mit f^{-1}.

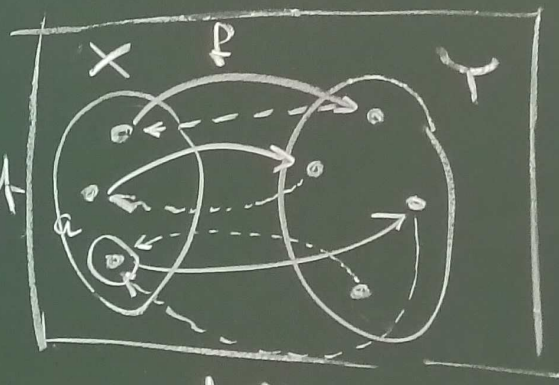
Hinweis: Ist $V \subseteq Y$ eine Teilmenge, dann bezeichnet $f^{-1}(V)$ die Urbildmenge von V unter f, unabhängig davon, ob f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt oder nicht.

Beweis von Satz 4.8

zu (i) $\Rightarrow$ "gegeben: injektive Abb. $f: X \to Y$

z.zg: $\exists\, g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$

$X \neq \emptyset \to \exists\, a \in X$



Definiere $g: Y \to X$ wie folgt:

Sei $y \in Y$. Setze

$$g(y) = \begin{cases} x_y & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset, \text{ und } g \\ & x_y \text{ das eindeutig best. Element in } f^{-1}(\{y\}) \text{ bezeichnet} \\ a & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

Beh. $g \circ f = id_X$ gleichbed.: $\forall x \in X: (g \circ f)(x) = x$

NICHT RAUCHEN

Sei also $x \in X$. z.zg. $(g \circ f)(x) = x$, d.h. $g(f(x)) = x$

Sei $y = f(x)$. Wegen $f(x) = y$ gilt $x \in f^{-1}(\{y\})$, insb gilt $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Das end. Element in $f^{-1}(\{y\})$ ist x. $\rightarrow$ $g(f(x)) = g(y) = x_y = x$.

„$\Leftarrow$" Vor. $\exists g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$

z.zg: f ist injektiv. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. z.zg.: $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$\Rightarrow id_X(x_1) = id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$