Definition (3.1)

Seien X und Y Mengen.

(i) Eine Relation auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$.

(ii) Eine Relation zwischen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$.

intuitiv:

„Relation“ = Beziehung zwischen den Elementen von X und denen von Y

Eigenschaften von Relationen

Definition (3.2)

Sei X eine Menge. Eine Relation R auf X heißt

(i) **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$,

(ii) **symmetrisch**, falls $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in X$,

(iii) **anti-symmetrisch**, falls $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in X$,

(iv) **transitiv**, falls $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in X$ gilt.

Ordnungsrelationen

Definition (3.3)

Sei X eine Menge.

(i) Eine **Halbordnung** auf X ist eine reflexive, anti-symmetrische und transitive Relation.

(ii) Bezeichnet $\leq$ eine Halbordnung auf X, so nennt man zwei Elemente $x, y \in X$ **vergleichbar** bezüglich $\leq$, wenn die Bedingung $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ erfüllt ist.

(iii) Eine Halbordnung auf X wird **Totalordnung** genannt, wenn je zwei Elemente aus X miteinander vergleichbar sind.

Beispiele für Halb- und Totalordnungen

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen $\leq$-Relation
  (Dies sind Totalordnungen.)
- Teilerrelation auf den natürlichen Zahlen
  (Halbordnung, aber keine Totalordnung)
- Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ einer Menge X
  (Halbordnung, aber für $|X| \geq 2$ keine Totalordnung)

Äquivalenzrelationen

Definition (3.4)

Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X wird **Äquivalenzrelation** genannt, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

(i) $X =$ Menge der Schüler einer Schule
$x \sim y \Leftrightarrow$ „x geht in dieselbe Klasse wie y“

(ii) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ a hat dieselbe Parität wie b
(d.h. a, b sind entweder beide gerade oder ungerade)

(iii) A endliche Menge, $X = \mathscr{P}(A)$, $P \sim Q \Leftrightarrow |P| = |Q|$
(wobei $|P|$ die Elementezahl von P bezeichnet)

Die Kongruenzrelationen

Notation: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$m \mid n \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} : n = km \;\Leftrightarrow\; „m \text{ ist Teiler von } n“$$

Definition (3.5)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Relation $\equiv_n$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch die Festlegung

$$a \equiv_n b \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (a - b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}.$$

Die Relation $\equiv_n$ wird als **Kongruenzrelation modulo** n bezeichnet. Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$ werden auch **kongruent** modulo n genannt.

Beispiele für die Kongruenzrelation $\equiv_n$

$3 \equiv_4 11$, da $4 \mid (3-11)$ $\quad 3-11 = -8$

$-7 \equiv_4 1$, da $4 \mid ((-7)-1)$ $\quad -7-1 = -8$

$a \equiv_2 b \iff a$ und b haben dieselbe Parität

(für alle $a, b \in \mathbb{Z}$)

$a \equiv b \equiv c \equiv d \mod n$ bedeutet:

$a \equiv b \mod n \wedge b \equiv c \mod n \wedge c \equiv d \mod n$

(1)

(2)

(3)

Die Kongruenzrelation als Äquivalenzrelation

An Stelle von $a \equiv_n b$ sind auch die Schreibweisen

$$a \equiv b \bmod n \qquad \text{und} \qquad a \equiv b\,(n)$$

gebräuchlich.

Satz (3.6)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Beweis von Satz 3.6

(1) Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$. z.zg. $a \equiv_n a$

$a - a = 0$, $n \mid 0$ (da $0 = 0 \cdot n$) $\Rightarrow n \mid (a-a)$

$\Rightarrow a \equiv_n a$

(2) Symmetrie: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$.

z.zg. $b \equiv_n a$ $\quad a \equiv_n b \Rightarrow n \mid (a-b) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a - b = kn$

$\Rightarrow b - a = (-k)n \Rightarrow n \mid (b-a) \Rightarrow b \equiv_n a$

(3) Transitivität: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$ und $b \equiv_n c$.

z.zg: $a \equiv_n c$. $\quad a \equiv_n b \Rightarrow n \mid (a-b) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a - b = kn$

$b \equiv_n c \Rightarrow n \mid (b-c) \Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z}: b - c = ln$

$\Rightarrow a - c = (a-b) + (b-c) = kn + \ell n = (k+\ell)\, n$

$\Rightarrow n \mid (a-c) \Rightarrow a \equiv_n c$ $\square$

Beispiel für eine Zerlegung von $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$

$Z = \{\{1,2\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}$

bzw. $Z' = \{\{1,3,5\}, \{2\}, \{4,6\}\}$

keine Zerlegung: $Z'' = \{\{1,\underline{3},5\}, \{2,\underline{3}\}, \{4,6\}\}$

Zerlegungen einer Menge

Definition (3.7)

Als **Zerlegung** einer Menge X bezeichnen wir eine Teilmenge $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit den Eigenschaften

(i) $A \neq \varnothing$ für alle $A \in \mathscr{Z}$

(ii) Für jedes $x \in X$ existiert ein $A \in \mathscr{Z}$ mit $x \in A$.

(iii) Für alle $A, B \in \mathscr{Z}$ folgt aus $A \cap B \neq \varnothing$ jeweils $A = B$.

Die Äquivalenzklasse eines Elements

Definition (3.8)

Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Dann nennt man die Teilmenge

$$[x]_\sim \quad = \quad \{y \in X \mid x \sim y\}$$

die **Äquivalenzklasse** des Elements x bezüglich $\sim$.

Proposition (3.9)

Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für alle $x, y \in X$ folgt aus $y \in [x]_\sim$ stets $[x]_\sim = [y]_\sim$. Die Äquivalenzklassen von $\sim$ bilden also eine Zerlegung der Menge X.

Beweis von Proposition 3.9

geg.: Menge X, $\sim$ Äquivalenzrel. auf X

$x, y \in X$ mit $y \in [x]_\sim$ z.zg.: $[x]_\sim = [y]_\sim$

$y \in [x]_\sim \Rightarrow x \sim y$

„$\subseteq$" Sei $z \in [y]_\sim$, z.zg. $z \in [x]_\sim$

$z \in [y]_\sim \Rightarrow y \sim z$ $\quad x \sim y, y \sim z \overset{\sim \text{ transitiv}}{\Rightarrow} x \sim z$

$\Rightarrow z \in [x]_\sim$

„$\supseteq$" $x \sim y$, $\sim$ symmetrisch $\Rightarrow y \sim x$

Sei nun $z \in [x]_\sim$, z.zg.: $z \in [y]_\sim$

$z \in [x]_\sim \Rightarrow x \sim z$ $\quad y \sim x, x \sim z \overset{\sim \text{ transitiv}}{\Rightarrow} y \sim z \Rightarrow z \in [y]_\sim$

Sei nun $Z = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$. Überprüfe, dass Z eine Zerlegung von X ist, d.h.

(1) $\forall A \in Z : A \neq \emptyset$ (2) $\forall x \in X . \exists A \in Z : x \in A$

(3) $\forall A, B \in Z : A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A = B$

zu (1) Sei $A \in Z$ z.zg.: $A \neq \emptyset$ $A \in Z \Rightarrow \exists x \in X$:

$A = [x]_\sim$ ~ reflexiv $\Rightarrow x \sim x \Rightarrow x \in [x]_\sim \Rightarrow$

$x \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

zu (2) Sei $x \in X$. Setze $A = [x]_\sim$. s.o. $\Rightarrow x \in [x]_\sim$,

also $x \in A$.

zu (3) Seien $A, B \in Z$ mit $A \cap B \neq \emptyset$, z.zg. $A = B$

$A, B \in Z \rightarrow \exists x, y \in Z : A = [x]_\sim, B = [y]_\sim$

$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in X : z \in A \text{ und } z \in B$

$z \in [x]_\sim \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} [x]_\sim = [z]_\sim$

$z \in [y]_\sim \Rightarrow [y]_\sim = [z]_\sim$

$\Rightarrow [x]_\sim = [y]_\sim$

$\Rightarrow A = B$

□

Die Äquivalenzrelation geg. durch eine Zerlegung

Proposition (3.10)

Sei X eine Menge und $\mathscr{Z}$ eine Zerlegung von X. Dann ist durch die Festlegung

$$x \sim_{\mathscr{Z}} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, A \in \mathscr{Z} : (x \in A) \wedge (y \in A) \quad \forall\, x, y \in X$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Beweis von Proposition 3.10

(1) $\sim_Z$ ist reflexiv, denn:

Sei $x \in X$, z.zg.: $x \sim_Z x$. Z Zerlegung

$\Rightarrow \exists A \in Z$ mit $x \in A \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A)$

$\Rightarrow \exists A \in Z : (x \in A) \wedge (x \in A) \Rightarrow x \sim_Z x$

(2) $\sim_Z$ ist symmetrisch, denn:

Seien $x, y \in X$ mit $x \sim_Z y$. z.zg.: $y \sim_Z x$

$x \sim_Z y \Rightarrow \exists A \in Z : (x \in A) \wedge (y \in A)$

$\Rightarrow \exists A \in Z : (y \in A) \wedge (x \in A) \Rightarrow y \sim_Z x$

(3) Transitivität: Seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim_Z y$ und $y \sim_Z z$. Zzg: $x \sim_Z z$

$x \sim_Z y \Rightarrow \exists A \in Z : (x \in A) \wedge (y \in A)$

$y \sim_Z z \Rightarrow \exists B \in Z : (y \in B) \wedge (z \in B)$

$y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ Z Zerlegung $\Rightarrow$

$A = B \Rightarrow x, y, z \in A \Rightarrow (x \in A) \wedge (z \in A)$

$\Rightarrow \exists A \in Z : (x \in A) \wedge (z \in A) \Rightarrow x \sim_Z z$

□

Definition der Kongruenzklassen

Proposition (3.11)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Äquivalenzklasse $[a]_n$ von a bezüglich der Relation $\equiv_n$ gegeben durch die Menge

$$a + n\mathbb{Z} \quad = \quad \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Man nennt $[a]_n$ auch die **Kongruenz-** oder **Restklasse** der Zahl a modulo n.

Beweis von Proposition 3.11:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. Beh.: $[a]_n = a + n\mathbb{Z}$

Sei $b \in \mathbb{Z}$ zeige: $b \in [a]_n \iff b \in a + n\mathbb{Z}$

Es gilt: $b \in [a]_n \iff a \equiv_n b \iff n \mid (a-b)$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k \cdot n \iff \exists k \in \mathbb{Z} :$

$a = b + k \cdot n \iff \exists k \in \mathbb{Z} ; b = a + (-k) \cdot n$

$\iff \exists l \in \mathbb{Z} : b = a + l \cdot n \iff b \in a + n\mathbb{Z}$ $\square$

Anmerkung zum Beweis von Proposition 3.11

Die mit dem Ausrufezeichen (!) markierte Stelle ist die einzige, an der man eventuell kurz überlegen muss, ob hier wirklich eine Äquivalenz vorliegt. Die Richtung „$\Rightarrow$“ hat folgende Begründung: Ist $k \in \mathbb{Z}$ ein Element mit $b = a + (-k)n$, dann erfüllt $\ell = -k$ die Gleichung $b = a + \ell n$.

Genauso erhält man die Richtung „$\Leftarrow$“: Ist $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $b = a + \ell n$, dann erfüllt $k = -\ell$ die Gleichung $b = a + (-k)n$, denn für dieses k gilt $a + (-k)n = a + (-(-\ell))n = a + \ell n = b$.

Übereinstimmung von Kongruenzklassen

Durch die Anwendung von Proposition (3.11) auf die Relation $\equiv_n$ und die Zerlegungseigenschaft der Äquivalenzklassen kommt man zu dem Schluss

Folgerung (3.12)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt die Äquivalenz

$$a \equiv_n b \quad \Leftrightarrow \quad b \in a + n\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}.$$

Beispiel: In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gelten die Gleichungen

$$\ldots = -8 + 5\mathbb{Z} = -3 + 5\mathbb{Z} = 2 + 5\mathbb{Z} = 7 + 5\mathbb{Z} = \ldots$$

Die Menge der Kongruenzklassen

Proposition (3.13)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Menge der Kongruenzklassen modulo n. Dann besitzt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau n verschiedene Elemente, nämlich $r + n\mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < n$.

Statt mit $[a]_n$ oder $a + n\mathbb{Z}$ bezeichnet man die Restklasse von a auch mit $\bar{a}$, sofern n aus dem Kontext heraus bekannt ist. Nach Proposition (3.13) ist die Menge $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ beispielsweise gegeben durch

$$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad = \quad \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}.$$

Beweis von Prop 3.13:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beh.: (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[a]_n \mid 0 \leq a < n\}$

(2) $\forall r, s \in \mathbb{N}_0 \; 0 \leq r < s < n : [r]_n \neq [s]_n$

zu (1) „$\supseteq$" klar nach Def.

„$\subseteq$" Sei $A \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : A = [c]_n$

Die Division von c durch n mit Rest liefert $q, r \in \mathbb{Z}$

mit $c = qn + r$ und $0 \leq r < n$. $\Rightarrow c = r + nq$

$\Rightarrow c \in r + n\mathbb{Z} \Rightarrow c \in [r]_n \Rightarrow [c]_n = [r]_n$

Aus $[r]_n \in \{[a]_n \mid 0 \leq a < n\}$ folgt, dass auch $[c]_n$ in dieser Menge liegt. □

Definition (4.1)

Seien X, Y Mengen. Eine Relation f zwischen X und Y wird **Abbildung** genannt, wenn für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert. In Formelschreibweise:

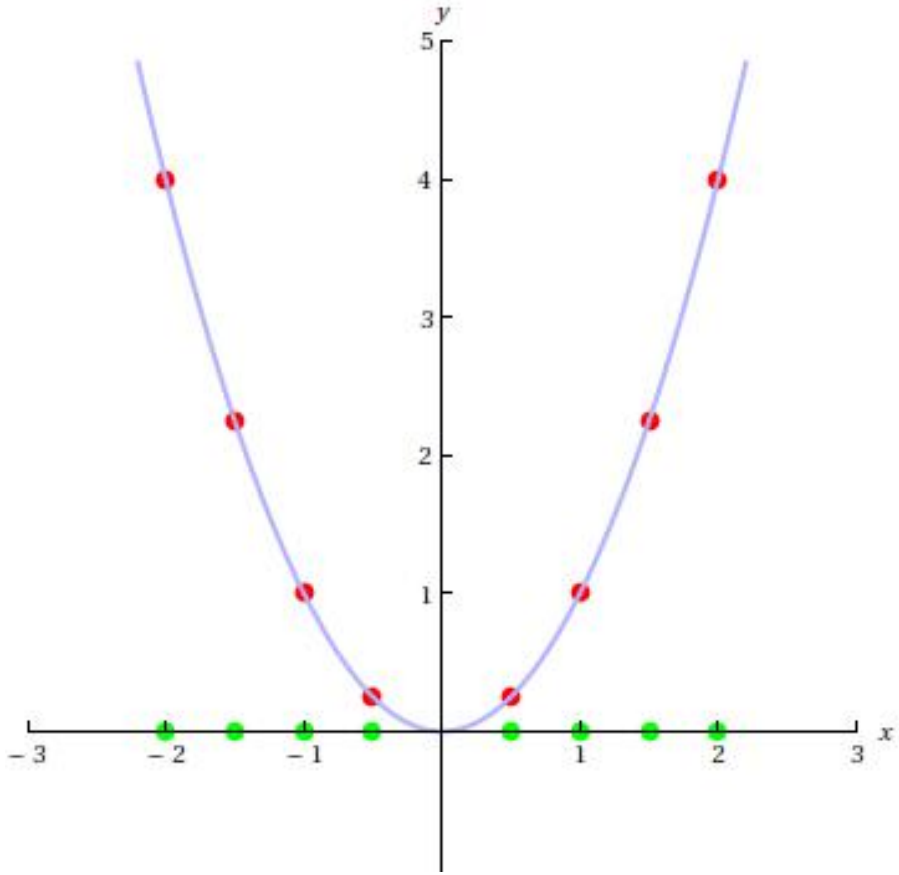
(i) $\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in f$

(ii) $\forall x \in X : \forall y, y' \in Y : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Dabei nennt man X den **Definitions-** und Y den **Wertebereich** der Abbildung.

Beispiel für eine Abbildung

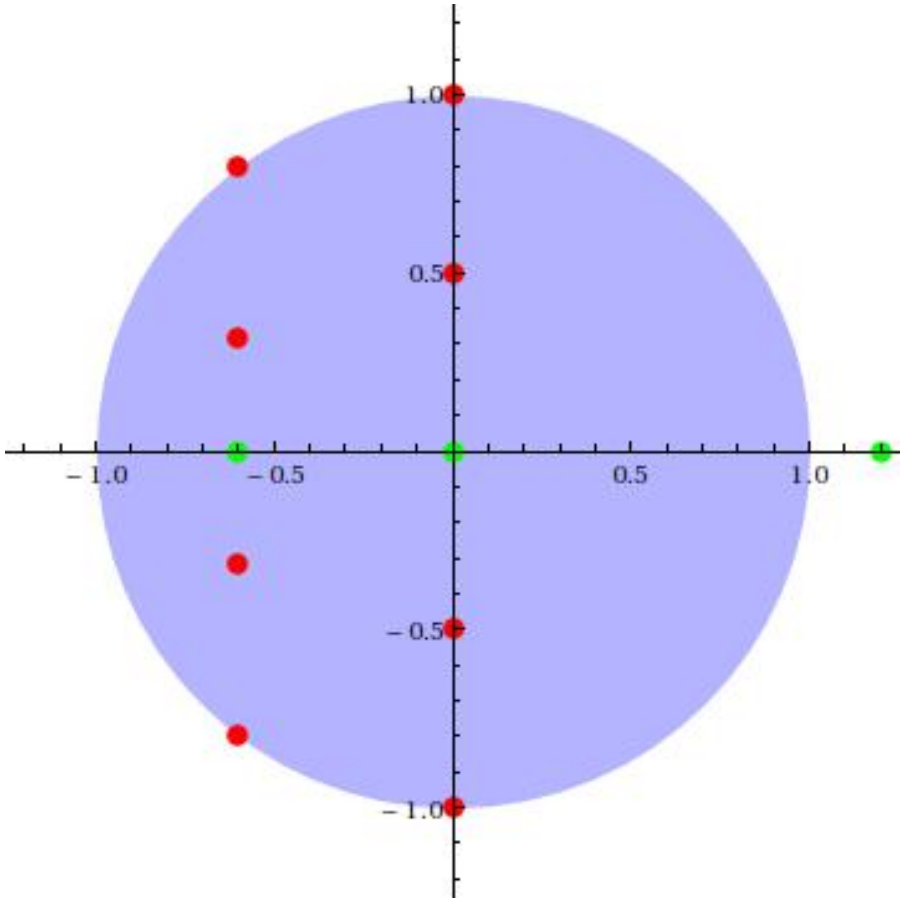
Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ist eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



(Über jedem grünen Punkt auf der x-Achse befindet sich genau ein roter Punkt. Jedem x-Wert wird ein eindeutig bestimmter y-Wert zugeordnet.)

Ein Gegenbeispiel

Die Menge $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist keine Abbildung $X \to \mathbb{R}$, egal von welchem Definitionsbereich X mit $[0, 1] \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ man ausgeht.



Notation: geg. X, Y Mengen. $f \subseteq X \times Y$

$f : X \to Y$ bedeutet: f ist Abb. von X nach Y

Für jedes $x \in X$ wird das eind. bestimmte $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ mit $f(x)$ bezeichnet.

$f : x \mapsto y$ bedeutet: $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f$

Einschränkung von Abbildungen

Proposition (4.2)

Sind X, Y Mengen, $f \subseteq X \times Y$ eine Abbildung und $U \subseteq X$. Dann ist durch

$$f|_U = \{(x, y) \in f \mid x \in U\} = f \cap (U \times Y)$$

eine Abbildung von U nach Y definiert. Wir bezeichnen sie als die **Einschränkung** von f auf die Teilmenge U.

(Hier wird also lediglich der Definitionsbereich der Abbildung verkleinert.)