All- und Existenzquantor

Quantoren dienen dazu, den Gültigkeitsbereich einer Ausage anzugeben. Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine (sinnvolle) Aussage ergibt.

Definition (2.2)

- Die Aussage $\forall x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M | \varphi(c)\} = M$, d.h. $\varphi(c)$ ist für jedes $c \in M$ wahr.
- Die Aussage $\exists x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M | \varphi(c)\} \neq \varnothing$, d.h. es gibt zumindest ein $c \in M$, so dass $\varphi(c)$ wahr ist.

Man nennt Aussagen der Form $\forall x \in M : \varphi(x)$ und $\exists x \in M : \varphi(x)$ auch quantifizierte Aussagen.

Das Symbol $\forall$ heißt Allquantor, das Symbol $\exists$ Existenzquantor.

Beispiele für quantifizierte Ausagen

Betrachte das Aussagenschema

$$\varphi(x) = x \leq 5$$

- $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **falsch** (z.B. ist $\varphi(7)$ falsch)
- $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **wahr** (z.B. ist $\varphi(5)$ gültig)

Allgemeines Prinzip:

- Um $\forall x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, muss die Aussage $\varphi(c)$ für **jedes** $c \in M$ hergeleitet werden.
- Um $\exists x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, genügt es, **ein einziges** $c \in M$ anzugeben, für das $\varphi(c)$ erfüllt ist.

Negation quantifizierter Aussagen

Satz (2.3)

Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine sinnvolle Aussage ist. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen.

(i) $\neg\forall x \in M : \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in M : \neg\varphi(x)$

(ii) $\neg\exists x \in M : \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M : \neg\varphi(x)$

Verschachtelung von Quantoren

geg.: Mengen M, N und ein Aussagenschema $\varphi(x, y)$ mit zwei Parametern x, y, so dass $\varphi(c, d)$ für alle $c \in M$, $d \in N$ sinnvolle Aussage

- $\forall y \in N : \varphi(x, y)$ ist ein **Aussagenschema** mit x als einzigem Parameter

- $\exists x \in M : \forall y \in N : \varphi(x, y)$ ist eine **Aussage**

Bei solchen Verschachtelungen ist die **Reihenfolge** entscheidend für die Bedeutung der Aussage!

Beispiel zur Reihenfolge von Quantoren

Beispiel 1: $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : y > x$

„Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein (im allgemeinen von x abhängiges) $y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$."

Wahr, denn für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ gilt zum Beispiel $c + 1 > c$.

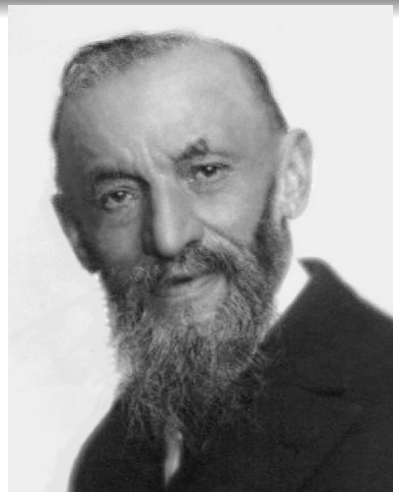
Beispiel 2: $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : y > x$

„Es gibt ein $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ jeweils $y > x$ erfüllt ist."

Falsch, es gibt keine reelle Zahl, die größer als alle anderen ist.

Quantoren und deren Reihenfolge spielen bei Aussagen zur Analysis eine **extrem wichtige** Rolle!

Die Peano-Axiome



Guiseppe Peano
(1858-1932)

(P1) Es gibt ein ausgezeichnetes Element in $\mathbb{N}$, das wir mit 1 bezeichnen.

(P2) Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen eindeutig bestimmten Nachfolger, der mit $n+1$ bezeichnet wird.

(P3) Kein Element aus $\mathbb{N}$ besitzt die 1 als Nachfolger.

(P4) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m+1 = n+1$, dann folgt $m = n$.

(P5) *Induktionsprinzip:*

Sei φ ein Aussagenschema mit folgenden Eigenschaften: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(n)$ eine sinnvolle Aussage, darüber hinaus seien $\varphi(1)$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$ wahre Aussagen. Dann ist auch $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x)$ wahr.

von Neumann-Konstruktion der natürlichen Zahlen:

definiere $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...

n bereits konstruiert $\Rightarrow$ setze $n+1 = n \cup \{n\}$

Die vollständige Induktion

Ausgangssituation der vollständigen Induktion ist ein Aussagenschema $\varphi(x)$ mit der Eigeschaft, dass $\varphi(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine sinnvolle Aussage liefert. Ziel ist der Beweis dieser (unendlich vielen) Aussagen.

Auf Grund des Peano-Axioms (P5) genügt es nachzuweisen, dass

- die Aussage $\varphi(1)$ wahr ist (Induktionsanfang) und
- die Implikation $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Induktionsschritt)

Sind diese beiden Punkte erfüllt, dann ist $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Anwendungsbeispiel

Satz (2.4)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gegeben durch

$$1 + 2 + ... + n \quad = \quad \frac{1}{2} n(n+1).$$

Beweis der Summenformel durch vollst. Ind.:

Ziel: Beweis von $\forall x \in \mathbb{N}: \varphi(x)$ für das Aussagenschema $\varphi(x) = \left(\sum_{k=1}^{x} k = \frac{1}{2} x (x+1) \right)$

zu erledigen:

(1) Induktionsanfang: zeige $\varphi(1)$

(2) Induktionsschritt: $\forall x \in \mathbb{N}: \varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)$

zu (1) z.zg: $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$

Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$

zu (2) Sei $n \in \mathbb{N}$. z.zg.: $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

Setze $\varphi(n)$ voraus, d.h. es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} n(n+1) \quad \text{z.zg.: } \varphi(n+1), \text{ d.h.}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)\left((n+1)+1\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) =$$

$$\left(\frac{1}{2} n + 1\right)\cdot(n+1) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)\left((n+1)+1\right)$$

□

Weiteres Bsp für vollst. Induktion:

zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n(n+1)(2n+1)$ durch 6 teilbar.

Setze $\varphi(x) =$ „$x(x+1)(2x+1)$ teilbar durch 6"

zu erledigen: (1) zeige $\varphi(1)$

(2) zeige $\forall x \in \mathbb{N}: \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x+1)$

zu (1) z.zg.: $1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ist durch 6 teilbar. Dies ist offenbar wahr, denn es gilt.

$6 = 6 \cdot 1$.

zu (2): Sei $n \in \mathbb{N}$, setze $\varphi(n)$ voraus, d.h. die Teilbarkeit von $n(n+1)(2n+1)$ durch 6

zzg: $\varphi(n+1)$, d.h. $(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$ ist durch 6 teilbar

Vor. $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $n(n+1)(2n+1) = 6k$ (*)

zzg: $(n+1)(n+2)(2n+3)$ ist teilbar durch 6

$$(n+1)(n+2)(2n+3) = (n+1)\cdot n\cdot(2n+3) + 2\cdot(n+1)\cdot(2n+3)$$

$$= (n+1)\cdot n\cdot(2n+1) + 2(n+1)\,n + 2(n+1)\cdot(2n+3)$$

$$= n(n+1)(2n+1) + \cancel{3n^2} + 2n + \cancel{3}(\cancel{2n^2} + 2n + 3n + 3) \overset{(*)}{=}$$

$6k + 6n^2 + 12n + 6 = 6(k + n^2 + 2n + 1)$

$\Rightarrow (n+1)(n+2)(2n+3)$ tatsächlich teilbar durch 6 $\square$

Frage: Ist die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ antisymmetrisch?

geg: $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$ und $n \mid m$

$m \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = km$ $\quad n \mid m \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : m = ln$

einsetzen $\Rightarrow n = k(ln) = (kl) \cdot n \Rightarrow kl = 1$

$\Rightarrow k = l = 1 \Rightarrow m = n$ (Antwort: Ja!)

Definition (3.1)

Seien X und Y Mengen.

(i) Eine Relation auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$.

(ii) Eine Relation zwischen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$.

intuitiv:

„Relation“ = Beziehung zwischen den Elementen von X und denen von Y

Beispiel: die Teilerrelation

Sei $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

und $R =$ „ist Teiler von“, als Menge

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}$$

Darstellung in Tabellenform

	1	2	3	4	5	6
1	■	■	■	■	■	■
2	□	■	□	■	□	■
3	□	□	■	□	□	■

Weitere Beispiele für Relationen

- Sei $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R =$„ist kleiner als“

$$R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

- auf der Menge $\mathbb{R}$ die beiden Relationen

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y\}$$

Weitere Beispiele für Relationen

- Relationen zwischen zwei Mengen X und Y können auch ganz willkürlich gewählte Teilmengen von $X \times Y$ sein, im Fall $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{1, 2\}$ zum Beispiel

$$T = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\} \quad \text{oder}$$
$$U = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

Beim Umgang mit Relationen verwendet man häufig die folgende **Infix-Notation**: Ist R eine Relation zwischen zwei Mengen X und Y, dann schreibt man die Aussage „$(x, y) \in R$“ sehr oft in der Form „xRy“. Im Beispiel oben gelten beispielsweise

$$2T1 \ , \ 3T2 \ , \ 3U1 \quad \text{aber nicht} \quad 3T1.$$

Als Bezeichnung für Relationen werden häufig Symbole wie $\leq$, $<$, $\prec$, $\equiv$, $\cong$ usw. verwendet.

Eigenschaften von Relationen

Definition (3.2)

Sei X eine Menge. Eine Relation R auf X heißt

(i) **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$,

(ii) **symmetrisch**, falls $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in X$,

(iii) **anti-symmetrisch**, falls $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in X$,

(iv) **transitiv**, falls $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in X$ gilt.

Ordnungsrelationen

Definition (3.3)

Sei X eine Menge.

(i) Eine **Halbordnung** auf X ist eine reflexive, anti-symmetrische und transitive Relation.

(ii) Bezeichnet $\leq$ eine Halbordnung auf X, so nennt man zwei Elemente $x, y \in X$ **vergleichbar** bezüglich $\leq$, wenn die Bedingung $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ erfüllt ist.

(iii) Eine Halbordnung auf X wird **Totalordnung** genannt, wenn je zwei Elemente aus X miteinander vergleichbar sind.

$6k + 6n^2 + 12n + 6 = 6(k + n^2 + 2n + 1)$

$\Rightarrow (n+1)(n+2)(2n+3)$ tatsächlich teilbar durch 6 $\square$

Frage: Ist die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ antisymmetrisch?

geg: $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$ und $n \mid m$

$m \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = km$ $\quad n \mid m \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : m = ln$

einsetzen $\Rightarrow n = k(ln) = (kl) \cdot n \Rightarrow kl = 1$

$\Rightarrow k = l = 1 \Rightarrow m = n$ (Antwort: Ja!)

Frage: Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ transitiv?

geg: $m, n, p \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$ und $n \mid p$

$m \mid n \rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = k\,m$

$n \mid p \rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : p = l\,n$

einsetzen $\Rightarrow p = l(k\,m) = (l\,k)\,m$

$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{N} : p = u\,m \Rightarrow m \mid p$

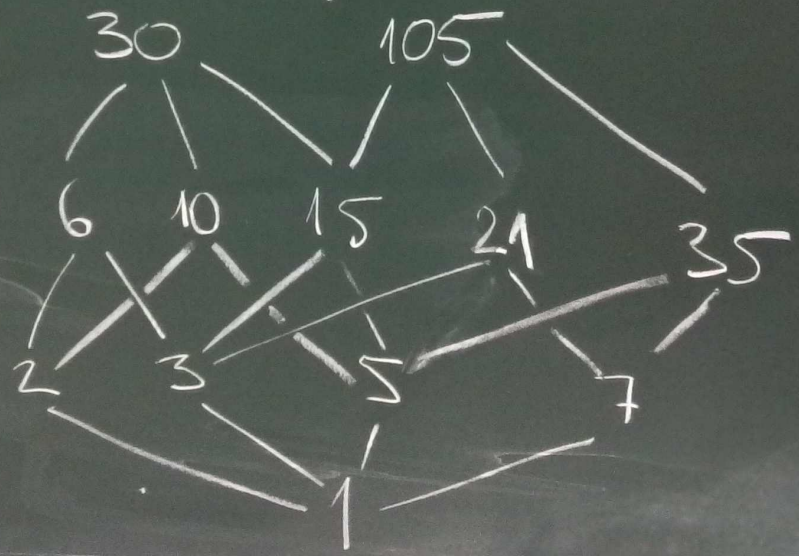
(Antwort: Ja!)

Beispiele für Halb- und Totalordnungen

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen $\leq$-Relation
  (Dies sind Totalordnungen.)
- Teilerrelation auf den natürlichen Zahlen
  (Halbordnung, aber keine Totalordnung)
- Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ einer Menge X
  (Halbordnung, aber für $|X| \geq 2$ keine Totalordnung)

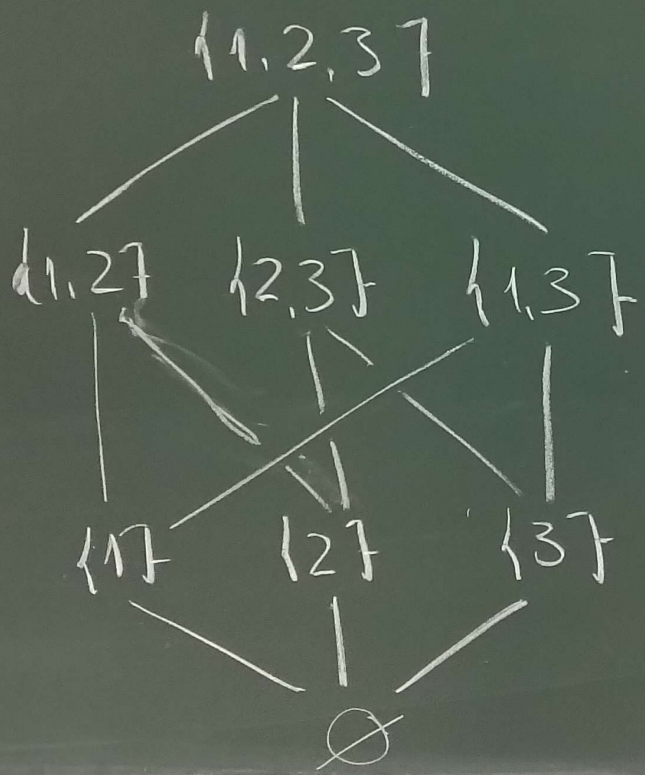
Beispiel für eine Halbordnung:
Die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$

Die Teilerrelation auf $\{3^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht nur eine Halb- sondern auch eine Totalordnung



Beispiel für die Halbordnung

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ für $X = \{1,2,3\}$



Es gilt weder

$\{1\} \subseteq \{2\}$ noch

$\{2\} \subseteq \{1\}$, d.h. die Elemente $\{1\}$ und $\{2\}$ sind bzgl. $\subseteq$ nicht vergleichbar. $\Rightarrow \subseteq$ ist keine Totalordnung auf $\mathcal{P}(X)$.