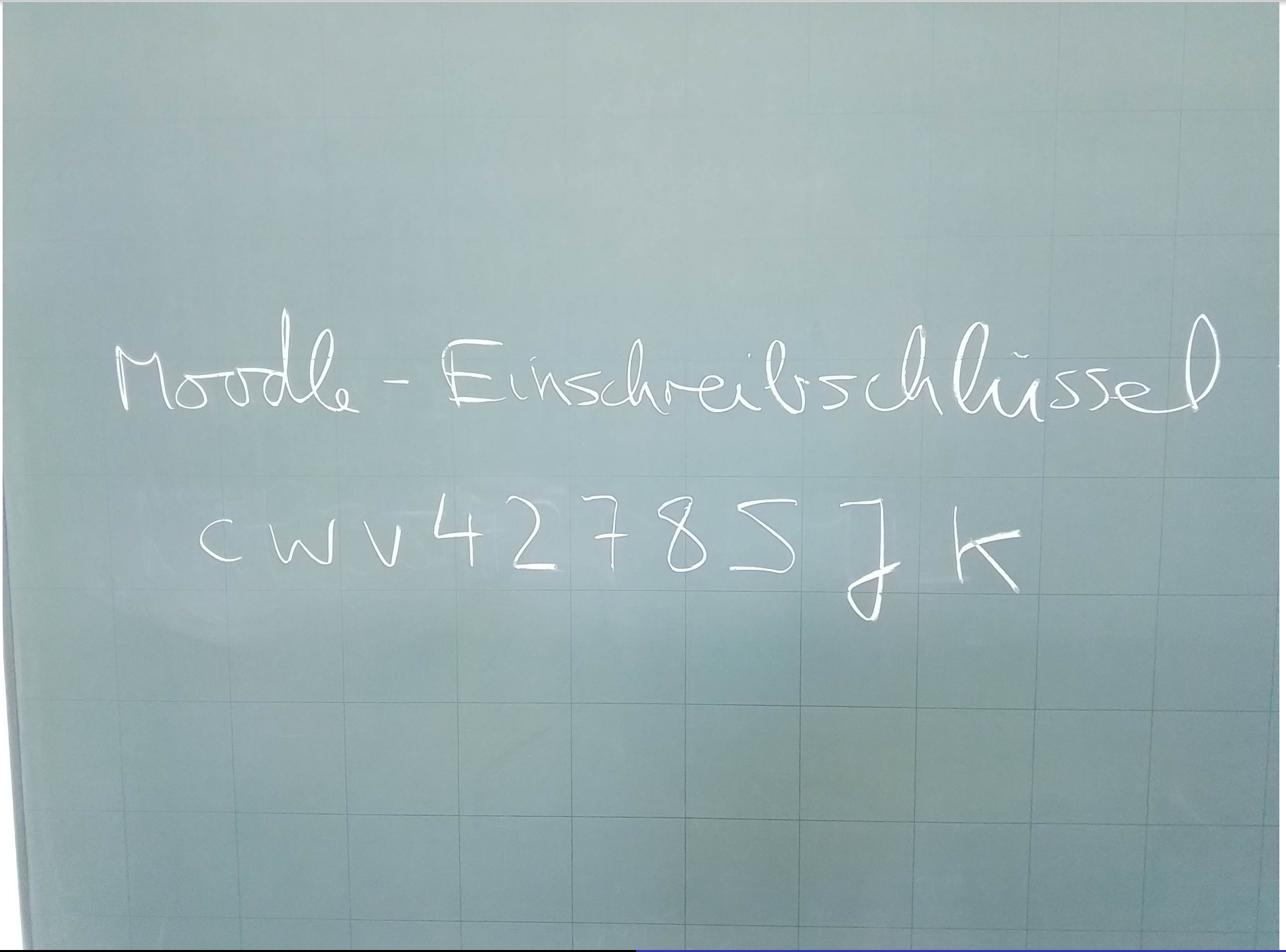

Moodle - Einschreibschlüssel
cwv427857k

§ 2. Mengenlehre und Prädikatenlogik

Nahezu alle in der heutigen Mathematik verwendeten Konzepte lassen sich auf den Begriff der *Menge* zurückführen.

Definition (2.1)

(„naive Mengendefinition“ nach Cantor)

„Eine Menge ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente dieser Menge genannt werden – zu einem Ganzen.“



Allgemein übliche Notation der Mengenlehre

$x \in M$	Das Objekt x ist Element der Menge M.
$x \notin M$	Das Objekt x ist *kein* Element der Menge M.
$M \subseteq N$	Jedes Element x von M ist auch ein Element von N.
$M = N$	Es gilt $x \in M \Leftrightarrow x \in N$ für alle Objekte x.
$M \supseteq N$	gleichbedeutend mit $N \subseteq M$
$M \subsetneq N$	$M \subseteq N \wedge \neg(M = N)$
$M \supsetneq N$	gleichbedeutend mit $N \subsetneq N$
$\varnothing$	die leere Menge

Die Menge $\varnothing$ ist eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft $x \notin \varnothing$ für alle Objekte x.

Anmerkungen

- In der Literatur wird auch das Symbol „$\subset$“ verwendet, aber die Bedeutung ist nicht einheitlich. Manchmal ist „$\subsetneq$“, manchmal aber auch „$\subseteq$“ gemeint. Deshalb muss man immer nachsehen, wie das Symbol in der entsprechenden Quelle verwendet wird.
- Anstelle von $\varnothing$ ist auch $\{\,\}$ als Symbol für die leere Menge gebräuchlich.
- Man beachte, dass $\{1,2,3\} = \{1,2,3\}$ und $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$ gleichermaßen wahre Aussagen sind. Die Aussage $\{1,2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$ ist falsch.
- Die Aussagen $\{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$ und $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ sind wiederum beide wahr.

Wie lassen sich Mengen definieren?

(1) Umgangssprachlich

„Sei P die Menge aller Primzahlen.“

(2) Durch Aufzählung

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad \text{oder kürzer} \qquad M = \{1, 2, ..., 7\}$$

(3) Durch eine definierende Bedingung

Ist $\varphi(x)$ ein Aussagenschema und M eine Menge, dann besteht die Menge

$$N \quad = \quad \{c \in M \mid \varphi(c)\}$$

aus genau denjenigen Elementen c einer Grundmenge M, für die $\varphi(c)$ eine wahre Aussage ist.

Häufig verwendete Mengenoperationen

(i)	**Durchschnitt**	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
(ii)	**Vereinigung**	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
(iii)	**Differenz**	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
(iv)	**Potenzmengen**	$\mathscr{P}(A) = \{B \text{ Menge} \mid B \subseteq A\}$
(v)	**kartesisches Produkt**	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

zu (iv) Beispiel für die Potenzmenge

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$
$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\},$
$\{1,2,3,4\}\}$

$x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightsquigarrow (x+\frac{1}{2})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)$ (Daraus folgt

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\})$$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\},$$
$$\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\},$$
$$\{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\}, \ldots, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\}.$$

$\Rightarrow (x,y,z) \in N_1$ oder $(x,y,z) \in N_2$

Unterschied zwischen Element und Teilmengenbezeichnung.

$\{1\} \subseteq A$ wahr

$\{1\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ falsch

$1 \in \mathcal{P}(A)$ wahr

$\{\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ wahr

Vorgehensweise beim Beweis von Mengengleichungen

Seien M, N, P Mengen.

- Um die Inklusion $M \subseteq N$ zu beweisen, beginnt man mit der Formulierung „Sei $x \in M$.“ und zeigt unter der Voraussetzung $x \in M$, dass $x \in N$ gilt.

- Um $M = N$ zu zeigen, beweist man die Inklusionen $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ einzeln.

- Sind M und N beides Teilmengen von P, kann man auch folgendermaßen vorgehen: Man beginnt mit „Sei $x \in P$.“ und beweist unter der Voraussetzung $x \in P$ die Äquivalenz

$$x \in M \Leftrightarrow x \in N \ ,$$

zum Beispiel durch eine Kette von Äquivalenzumformungen.

Anwendungsbeispiele

- Beweis der Gleichung

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0 \,\} \quad = \quad \{\, -3, 2 \,\}$$

- Beweis der Gleichung $M = N$ für

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (xy + 1)z = 0\}$$

$$N = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\tfrac{1}{x}, z) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{R}\}$$

Sei $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6\}$ und $N = \{-3, 2\}$.

Wir zeigen: $M = N$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \in M \iff x^2 + x - 6 = 0$

$\iff x^2 + x = 6 \iff x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} \iff$

$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \iff$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0 \iff$

$(x - 2)(x + 3) = 0 \iff x - 2 = 0 \vee x + 3 = 0 \iff$

$x = 2 \vee x = -3 \iff x \in \{-3, 2\} \iff x \in N$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (xy+1)z = 0\}$

$N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$N_2 = \{(x, -\frac{1}{x}, z) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{R}\}$

Wir zeigen: (1) $M \subseteq N$ (2) $N \subseteq M$

(Daraus folgt $M = N$.)

zu (1) Sei $(x,y,z) \in M$. $\Rightarrow (xy+1)z = 0$.

$\Rightarrow xy+1 = 0$ oder $z = 0$.

1. Fall: $xy+1 = 0$ Dann gilt $xy = -1$ und somit $x \neq 0$. $\Rightarrow y = -\frac{1}{x} \Rightarrow (x,y,z) = (x, -\frac{1}{x}, z) \in N_2$

z' $\Rightarrow (x,y,z) \in N_1 \cup N_2 \Rightarrow (x,y,z) \in N$

2 Fall: $z = 0$ Dann gilt $(x,y,z) = (x,y,0) \in N_1$

$\Rightarrow (x,y,z) \in N_1 \cup N_2 \Rightarrow (x,y,z) \in N$.

zu (2) Sei $(x,y,z) \in N$. $\Rightarrow (x,y,z) \in N_1 \cup N_2$

$\Rightarrow (x,y,z) \in N_1$ oder $(x,y,z) \in N_2$

1. Fall: $(x,y,z) \in N_1 \Rightarrow (x,y,z) = (x,y,0)$

$\Rightarrow z = 0 \Rightarrow (xy+1) \cdot z = (xy+1) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow (x,y,z) \in M$

2. Fall: $(x,y,z) \in N_2$. $\Rightarrow$ Das Element (x,y,z) hat die Form $(x', -\frac{1}{x'}, z')$ mit $x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z' = 0$

$(x,y,z) = (x', -\frac{1}{x'}, z') \Rightarrow x = x',\ y = -\frac{1}{x'} = -\frac{1}{x},\ z = z'$.

$\Rightarrow (xy+1)\cdot z = \left(x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+1\right)\cdot z = \left((-1)+1\right)\cdot z$

$= 0\cdot z = 0$. $\Rightarrow (x,y,z) \in M$ □

All- und Existenzquantor

Quantoren dienen dazu, den Gültigkeitsbereich einer Ausage anzugeben. Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine (sinnvolle) Aussage ergibt.

Definition (2.2)

- Die Aussage $\forall x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M | \varphi(c)\} = M$, d.h. $\varphi(c)$ ist für jedes $c \in M$ wahr.
- Die Aussage $\exists x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M | \varphi(c)\} \neq \varnothing$, d.h. es gibt zumindest ein $c \in M$, so dass $\varphi(c)$ wahr ist.

Man nennt Aussagen der Form $\forall x \in M : \varphi(x)$ und $\exists x \in M : \varphi(x)$ auch quantifizierte Aussagen.

Das Symbol $\forall$ heißt Allquantor, das Symbol $\exists$ Existenzquantor.

Beispiele für quantifizierte Ausagen

Betrachte das Aussagenschema

$$\varphi(x) = x \leq 5$$

- $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **falsch** (z.B. ist $\varphi(7)$ falsch)
- $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **wahr** (z.B. ist $\varphi(5)$ gültig)

Allgemeines Prinzip:

- Um $\forall x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, muss die Aussage $\varphi(c)$ für **jedes** $c \in M$ hergeleitet werden.
- Um $\exists x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, genügt es, **ein einziges** $c \in M$ anzugeben, für das $\varphi(c)$ erfüllt ist.

Negation quantifizierter Aussagen

Satz (2.3)

Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine sinnvolle Aussage ist. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen.

(i) $\neg\forall x \in M : \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in M : \neg\varphi(x)$

(ii) $\neg\exists x \in M : \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M : \neg\varphi(x)$

NICHT RAUCHEN

Beweis von Satz 2.3, Teil (i)

zu (i) „$\Rightarrow$" durch Kontraposition und Widerspruch

Setze $\neg(\forall x \in M : \neg\varphi(x))$ voraus,

zeige $\forall x \in M : \varphi(x)$

Sei $c \in M$ zzg: $\varphi(c)$ ist wahr

Angenommen, $\varphi(c)$ ist falsch $\Rightarrow \neg\varphi(c)$ ist wahr

$\Rightarrow \exists x \in M : \neg\varphi(x)$ Widerspruch zu $\neg(\forall x \in M : \neg\varphi(x))$

„$\Leftarrow$" siehe Skript

Exkurs: Die Russell-Antinomie

(nicht im Skript enthalten, nicht prüfungsrelevant)

Wenn es (wie nach Cantor) tatsächlich möglich ist, beliebige Objekte zu einer Menge zumsammenzufassen, dann sollte es auch möglich sein, die folgende Menge zu bilden:

$$R \quad = \quad \{X \text{ Menge } \mid X \notin X\}.$$

Wenn diese Menge R (bestehend aus allen Mengen M mit $M \notin M$) tatsächlich existiert, dann dürfen wir auch fragen, ob $R \in R$ gilt.

1. Fall: $R \in R$ ist wahr

Dies bedeutet, dass R selbst die definierende Bedingung der Menge R ($X \notin X$) nicht erfüllt. Aber dann folgt aus der Definition, dass R nicht in R enthalten ist (denn R enthält ja genau die Mengen, die die definierende Bedingung erfüllen). Wir erhalten also $R \notin R$, im Widerspruch zur Fallannahme $R \in R$.

Exkurs: Die Russell-Antinomie (Forts.)

2. Fall: $R \in R$ ist falsch

In dieser Situation erfüllt R seine eigene definierende Bedingung. Analog zum 1. Fall kommen wir diesmal zum Ergebnis, dass R in R liegt (weil R ja alle Mengen enthält, die die definierende Bedingung erfüllen). Aber $R \in R$ steht im Widerspruch zur Annahme $\neg(R \in R)$.

Allein die Annahme, dass R existiert, hat also zu einem Widerspruch geführt. Wir sehen nun, in welcher Hinsicht die Cantorsche Mengendefinition „naiv“ ist: Wenn man für die Mengenbildung vollkommenden beliebige Zusammenfassungen erlaut, erhält man logische Widersprüche. Um das zu vermeiden, hat man in der Mathematik strenge Regeln dafür aufgestellt, welche Mengenbildungen tatsächlich „erlaubt“ sind: die sogenannten ZFC-Axiome. Wir werden uns damit aber nicht belasten, weil Probleme wie hier vorgestellte Russell-Antinomie in der mathematischen Praxis so gut wie nie auftreten.

Warum ist die Cantorsche Definition „naiv"?

Betrachte die Menge

$$X = \{A \text{ Menge} \mid A \notin A\}$$

Frage: Gilt $X \in X$?

Auf jeden Fall gilt $X \in X$ oder $X \notin X$.

1. Fall: $X \in X \Rightarrow X$ erfüllt die definierende Bedingung von X nicht $\Rightarrow X \notin X$ ↯

2 Fall: $X \notin X \Rightarrow X$ erfüllt die definierende Bedingung von $X \Rightarrow X \in X$ ↯