Überblick über die Vorlesungsthemen

- Grundlagen der Mathematik: Aussagen- und Prädikatenlogik, Beweistechniken
- Mengenlehre, Ordnungs- und Äquivalenzrelationen, Abbildungen
- algebraische Grundstrukturen (Gruppen, Ringe und Körper)
- Vektorräume und lineare Abbildungen
- Matrizenkalkül, Gauß'sches Eliminationsverfahren
- Basis- und Dimensionsbegriff, Wechsel des Koordinatensystems
- Skalarprodukt, Determinanten und euklidische Geometrie
- Eigenwerte und Eigenvektoren

Alltagslogik

Gespräch bei einer Verkehrskontrolle: „Wer Alkohol getrunken hat, fährt Schlangenlinien. Sie sind Schlangenlinien gefahren. Also haben Sie bestimmt einiges getrunken.“

Klingt vernünftig, aber ... kein formal korrekter logischer Schluss!

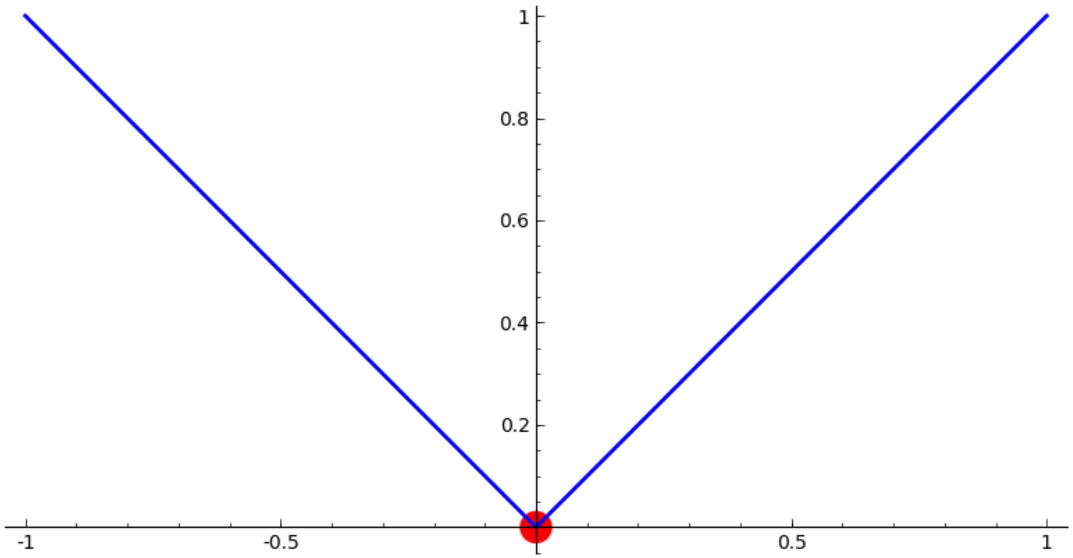
Übertragung der Schlussweise auf die Mathematik:

„Differenzierbare Funktionen sind stetig. Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist stetig. Also ist die Betragsfunktion auch differenzierbar.“ (falsch)

„Hat eine Funktion f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ ein Maximum, dann ist $f'(a) = 0$. Die Funktion $f(x) = x^3$ hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2$, also gilt $f'(0) = 0$. Folglich hat dieses f bei 0 ein Maximum.“ (falsch)

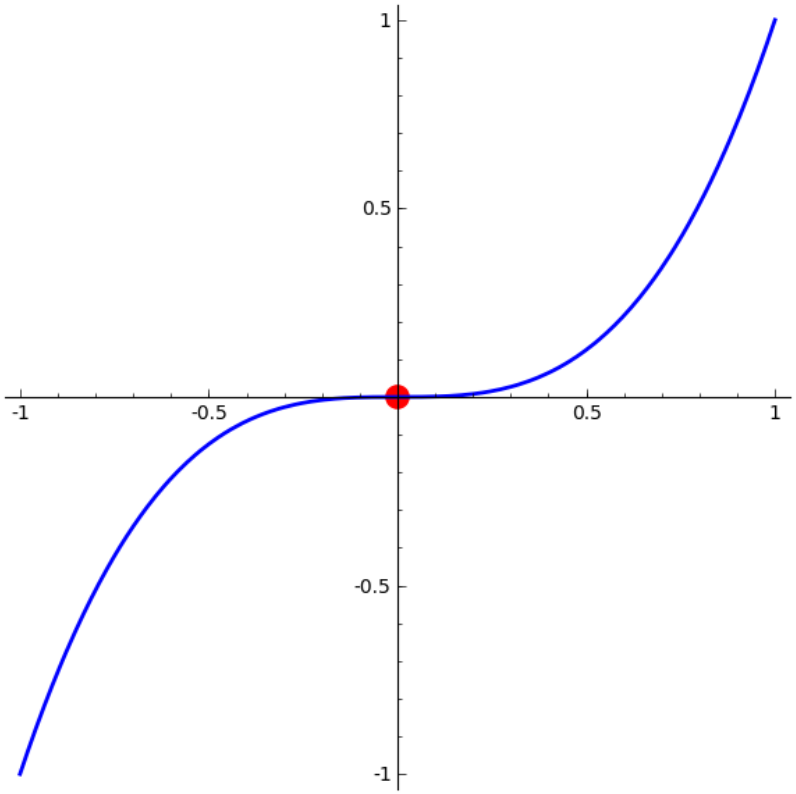
Widerlegung der beiden Aussagen

$f : x \mapsto |x|$



nicht differenzierbar in $x = 0$

$f : x \mapsto x^3$



kein Maximum in $x = 0$

Definition der Aussage

Frage:

Wie kann man sicher sein, ob ein logischer Schluss mathematisch zulässig ist?

Definition

Unter einer Aussage verstehen wir einen (sprachlich oder in mathematischer Notation formulierten) Satz, von dem auf sinnvolle und objektive Weise gesagt werden kann, dass er wahr oder falsch ist.

Beispiele für Aussagen

- Heute ist Dienstag. (wahr, jedenfalls am 13.10.2026)
- $1 + 1 = 2$ wahr
- Es existiert eine größte natürliche Zahl. falsch
- Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt $180°$. wahr
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig. wahr
- Jede gerade Zahl größer als zwei kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden. ???

Aussagen - Gegenbeispiele

Folgende Sätze sind keine Aussagen.

- Hallo!
- Shut up and calculate!
- 10^{100} ist eine große Zahl
- Die Kreiszahl π ist ungefähr gleich $3,14$.
- $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$
- $a^2 + b^2 = c^2$

Im letzten Satz müssen a, b und c durch den Kontext definiert sein, damit jeweils eine Aussage vorliegt.

Die Verwendung von Bezeichnungen ohne Kontext sind ein **extrem häufiger** Anfängerfehler beim mathematischen Formulieren!

Aussagenschemata

Definition

Einen Satz, der einen oder mehrere Parameter enthält, und der nach Ersetzung dieser Parameter durch gewisse mathematische Objekte zu einer Aussage wird, nennen wir ein Aussagenschema.

Beispiel:

$\varphi(x) =$ „$x^2 - 1 < 0$“

$\varphi(5) =$ „$5^2 - 1 < 0$“ **falsch**
$\varphi(0) =$ „$0^2 - 1 < 0$“ **wahr**

$\psi(x) =$ „x **ist eine Primzahl.**“

$\psi(4) =$ „4 **ist eine Primzahl**“ **falsch**
$\psi(2) =$ „2 **ist eine Primzahl**“ **wahr**

Parameterbelegungen für Aussagenschemata

Nicht jede Parameterbelegung ist sinnvoll.

Beispiel:

$\varphi(x) = „x^2 - 1 < 0“$

Einsetzen von $\{1, 2, 3\}$ in x liefert

$$\{1, 2, 3\}^2 - 1 < 0 \qquad \textbf{???}$$

Keine sinnvolle Aussage, man kann nicht über wahr oder falsch entscheiden!

Verknüpfung von Aussagen: Konjunktion

Gegebene Aussagen können umgangssprachlich oder durch bestimmte Symbole ($\vee$, $\wedge$) zu neuen Aussagen verknüpft werden. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist dann durch die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen festgelegt. Die Festlegung erfolgt durch sogenannte Wahrheitstabellen.

Konjunktion $\varphi \wedge \psi$ „Es gilt φ und ψ.“

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Wichtig: Eine Aussage kann nicht „halbwahr“ sein, sie ist entweder wahr oder falsch.

Verknüpfung von Aussagen: Disjunktion

Disjunktion $\varphi \vee \psi$ „Es gilt φ oder ψ.“

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Verknüpfung von Aussagen: Negation

Negation $\neg\varphi$ „φ gilt nicht.“ / „φ ist falsch.“

φ	$\neg\varphi$
w	f
f	w

„Es ist falsch, dass $1+1=3$ ist.“ wahr

„Es gilt nicht $1+1=2$.“ falsch

Verknüpfung von Aussagen: Implikation

Implikation $\varphi \Rightarrow \psi$

„Aus φ folgt ψ.“
„Wenn φ gilt, dann gilt auch ψ.“
„φ ist eine hinreichende Bedingung für ψ.“
„ψ ist eine notwendige Bedingung für φ.“

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wichtig: Die Aussagen φ und ψ brauchen nicht kausal miteinander zusammenhängen.

Beispiele zur Implikation

- Die Aussage „Wenn heute Samstag ist, dann ist heute Wochenende.“ ist an jedem Tag der Woche korrekt.

- Die Aussage „Wenn heute Wochenende ist, dann ist heute Samstag.“ ist an jedem Wochentag außer Sonntag richtig.

- Für jede reelle Zahl a kann man die Aussage

$$„a^2 = 1 \Rightarrow a = 1“$$

betrachten. Im Fall $a \neq -1$ ist sie wahr, im Fall $a = -1$ falsch.

- Die umgekehrte Implikation „$a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$“ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ wahr, auch für $a = -1$.

Verknüpfung von Aussagen: Äquivalenz

Äquivalenz $\varphi \Leftrightarrow \psi$

„Es gilt φ genau dann, wenn ψ gilt.“
„φ ist hinreichende und zugleich notwendige Bedingung für ψ.“

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Achtung: Beim Arbeiten mit Implikationen und Äquivalenzen ist es sehr wichtig, die zusammengesetzten Aussagen

$$\varphi \Rightarrow \psi \quad , \quad \psi \Rightarrow \varphi \qquad \text{und} \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi$$

sorgfältig auseinanderzuhalten, sonst kommt es zu Fehlern!

Verwendung mehrerer Verknüpfungen

Um Klammern zu sparen, ordnet man den Verknüpfungssymbolen unterschiedliche Bindungsstärke zu, und zwar in absteigender Reihenfolge

$$\neg \quad , \quad \wedge \quad , \quad \vee \quad , \quad \Rightarrow \quad , \quad \Leftrightarrow$$

genau wie bei der Regel „Punktrechung vor Strichrechnung“.

Beispiel:

$$\neg\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \varphi \Leftrightarrow \psi$$

ist gleichbedeutend mit

$$(((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \psi$$

Tautologien

Definition

Eine wahre zusammengesetzte Aussage, die wahr bleibt, wenn man ihre Teilaussagen durch beliebige andere Aussagen ersetzt, bezeichnen wir als Tautologie.

Beispiele:

- „Wenn dat so is, dann is dat so.“
- „Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.“

Beispiel für eine Tautologie

Nachweis der Tautologie-Eigenschaft:

Betrachte die Einzelaussagen

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{„Der Hahn kräht auf dem Mist.“} \\ \psi &= \text{„Das Wetter ändert sich.“} \\ \neg\psi &= \text{„Das Wetter bleibt wie es ist.“} \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Aussage hat also die Form

$$\phi \quad = \quad \varphi \Rightarrow \psi \vee \neg\psi.$$

Damit ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage aus der Wahrheitstabelle

φ	ψ	$\neg\psi$	$\psi \vee \neg\psi$	ϕ
w	*w*	*f*	*w*	*w*
w	*f*	*w*	*w*	*w*
f	*w*	*f*	*w*	*w*
f	*f*	*w*	*w*	*w*

Logische Schlüsse

Definition

Wir sagen, die Aussage ψ folgt aus den Aussagen $\varphi_1, ..., \varphi_n$ durch einen logischen Schluss, wenn die Implikation

$$\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi \qquad \text{eine Tautologie ist.}$$

Beispiele für häufig verwendete logische Schlüsse

Modus Ponens $\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$

„Wenn φ gilt und aus φ die Aussage ψ folgt, dann gilt ψ."

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$	$\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$
w	w	w	w	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
f	f	w	f	w

Kontraposition

Beweis durch Kontraposition $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

„Aus φ folgt ψ genau dann, wenn aus $\neg\psi$ die Aussage $\neg\varphi$ folgt.“

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Widerspruch

Beweis durch Widerspruch $(\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \varphi$

"Wenn aus $\neg\varphi$ ein Widerspruch folgt (nämlich eine Aussage ϕ und zugleich auch ihr Gegenteil $\neg\phi$), dann ist φ wahr."

φ	ϕ	$\neg\varphi$	$\neg\phi$	$\phi \wedge \neg\phi$	$\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi$	$(\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \varphi$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	w

Ringschluss

Satz vom Ringschluss

$$(\varphi \Rightarrow \phi) \wedge (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \phi) \wedge (\phi \Leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \Leftrightarrow \varphi)$$

„Wenn aus φ die Aussage ϕ und aus ϕ die Aussage ψ und aus ψ wieder die Aussage φ folgt, dann sind die drei Aussagen φ, ϕ und ψ äquivalent.“

setze $A = \varphi \Rightarrow \phi$, $B = \phi \Rightarrow \psi$, $C = \psi \Rightarrow \varphi$, $D = \varphi \Leftrightarrow \phi$, $E = \phi \Leftrightarrow \psi$ und $F = \psi \Leftrightarrow \varphi$

φ	ϕ	ψ	A	B	C	D	E	F	$A \wedge B \wedge C$	$D \wedge E \wedge F$	$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D \wedge E \wedge F$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	f	w	f	f	f	w
f	w	w	w	w	f	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	f	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w	w	w	w	w