

Ralf Gerkmann
Mathematisches Institut der
Ludwig-Maximilians-Universität München

Wintersemester 2026-27

Lineare Algebra für Informatiker

Inhaltsverzeichnis

<i>§ 1. Aussagenlogik</i>	<i>3</i>
<i>§ 2. Mengenlehre und Prädikatenlogik</i>	<i>10</i>
<i>Literaturverzeichnis</i>	<i>19</i>

§ 1. Aussagenlogik

Inhaltsübersicht

Unter einer **Aussage** verstehen wir einen (sprachlich oder in mathematischer Notation formulierten) Satz, von dem auf sinnvolle und objektive Weise gesagt werden kann, dass er **wahr** oder **falsch** ist. Mit Hilfe von logischen Symbolen $\neg, \wedge, \Rightarrow$ usw. lassen sich einfache Aussagen zu komplexeren Aussagen zusammensetzen. Die **Tautologien** bilden eine besonders wichtige Klasse zusammengesetzter Aussagen, weil sie für logische Schlüsse verwendet werden können. Aus solchen Schlüssen wiederum werden mathematische **Beweise** aufgebaut.

Wichtige Begriffe und Sätze

- Aussagen und ihre Wahrheitswerte (wahr oder falsch)
- Aussagenschema, Parameter
- Verknüpfung von Aussagen (Konjunktion, Disjunktion, Negation, Implikation, Äquivalenz)
- Tautologien und logische Schlüsse

(1.1) Definition Unter einer **Aussage** verstehen wir einen (sprachlich oder in mathematischer Notation formulierten) Satz, von dem auf sinnvolle und objektive Weise gesagt werden kann, dass er **wahr** oder **falsch** ist.

Die folgenden Sätze sind zweifellos Aussagen.

- (i) Heute ist Dienstag. (*wahr*, jedenfalls am 13.10.2026)
- (ii) $1 + 1 = 2$ (*wahr*)
- (iii) Es gibt eine natürliche Zahl, die größer ist als alle anderen natürlichen Zahlen.
(*Falsch*. Nehmen wir an, n wäre eine solche Zahl. Dann müsste $n > n + 1$ gelten.
Wir wissen aber, dass $n < n + 1$ gilt.)
- (iv) Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks beträgt 180° .
(*wahr*, zumindest in der „normalen“ euklidischen Geometrie)
- (v) Jede differenzierbare Funktion ist stetig. (*wahr*)
- (vi) Jede gerade Zahl größer als zwei kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.
(Dies ist die sog. *Goldbachsche Vermutung*. Zur Zeit ist noch unbekannt, ob sie wahr oder falsch ist.)

Dagegen sind die folgenden Sätze mit Sicherheit nicht als Aussagen zu bezeichnen.

- (i) Hallo!
- (ii) Mach endlich Deine Hausaufgaben!
- (iii) 10^{100} ist eine große Zahl
- (iv) Die Kreiszahl π ist ungefähr gleich 3.14.
- (v) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$
- (vi) $a^2 + b^2 = c^2$

Offenbar ist es sinnlos, einer Begrüßung oder einer Aufforderung einen Wahrheitswert zuzuordnen. Die Sätze (iii) und (iv) sind für eine Aussage nicht hinreichend objektiv. Der Ausdruck (v) ist ein **Term** (genauer gesagt, ein Polynom), für den die Feststellung *wahr* oder *falsch* ebenfalls keinen Sinn macht.

Satz (vi) ist für sich genommen keine Aussage, solange den Symbolen a , b und c keine Bedeutung zugeordnet wird. Legt man fest, dass $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$ sein soll, erhält man eine wahre Aussage, denn es gilt $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Für viele andere Belegungen von a, b, c (zum Beispiel $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$) erhält man dagegen eine falsche Aussage. Legt man fest, dass a, b, c Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sein sollen, wobei c der längsten Seite zugeordnet ist, dann erhält man wiederum eine wahre Aussage. Einer der häufigsten Fehler bei der Formulierung mathematischer Aussagen besteht darin, dass Bezeichnungen (wie hier a, b, c) verwendet werden, die zuvor nicht definiert wurden!

Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ist also keine Aussage; statt dessen fällt sie eine allgemeinere Kategorie von Sätzen, die man unter dem Begriff „**Aussagenschema**“ zusammenfasst. Bei einem Aussagenschema handelt es sich um einen Satz, in dem eine Reihe von **Parametern** $x, y, \dots$ vorkommen, und der zu einer Aussage wird, wenn man die Parameter durch geeignete mathematische Objekte ersetzt. Beispielsweise wird $a^2 + b^2 = c^2$ zu einer Aussage, wenn man für a, b, c die Längen der Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks einsetzt. Auch der (sprachlich formulierte) Satz

„Die Zahl x ist eine Primzahl.“

ist ein Aussagenschema mit x als Parameter. Setzt man für x die Werte 4 oder 6 ein, so erhält man eine falsche Aussage. Setzt man dagegen 2 oder 13 ein, dann erhält man eine wahre Aussage.

Zu beachten ist, dass im Allgemeinen natürlich nicht jede Einsetzung eine **sinnvolle** Aussage liefert. Zum Beispiel würde es keinen Sinn machen, in der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ für a die leere Menge $\emptyset$ einzusetzen, da nicht ohne Weiteres klar ist, was der Ausdruck $\emptyset^2 + b^2 = c^2$ bedeuten soll.

Einfache Aussagen können umgangssprachlich, zum Beispiel durch Bindewörter wie „und“, „oder“, oder auch durch bestimmte Symbole ($\vee$, $\wedge$) zu komplexeren Aussagen **verknüpft** werden. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist dann durch die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen festgelegt. Wie diese Festlegung im einzelnen aussieht, kann am einfachsten durch sog. **Wahrheitstabellen** beschrieben werden. Seien φ und ψ zwei Aussagen. Die folgenden Verknüpfungen von Aussagen sind in der Mathematik allgemein gebräuchlich.

- (i) **Konjunktion** $\varphi \wedge \psi$ „Es gilt φ und ψ .“

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die erste Zeile der Tabelle bedeutet ausformuliert: „Sind die Aussagen φ und ψ beide wahr, dann ist auch die zusammengesetzte Aussage $\varphi \wedge \psi$ eine wahre Aussage.“ Beispielsweise ist der Satz

„Heute ist Dienstag, und es gilt $1 + 1 = 2$.“

eine wahre Aussage - über den Erkenntniswert kann man geteilter Meinung sein. Wichtig hierbei ist, dass auch die zusammengesetzten Aussage entweder *wahr* oder *falsch* ist; in der mathematischen Logik ist kein Platz für „Halbwahrheiten“. So ist der Satz

„Heute ist Dienstag, und es gilt $1 + 1 = 3$.“

auch am Dienstag, dem 13. Oktober 2026 auf Grund des Eintrags in der zweiten Tabellenzeile eindeutig als *falsch* zu bezeichnen. (Am 15. Oktober 2026 entnimmt man der vierten Tabellenzeile, dass die Aussage *falsch* ist, denn in diesem Fall sind beide Teilaussagen falsch.)

- (ii) **Disjunktion** $\varphi \vee \psi$ „Es gilt φ oder ψ .“

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Zum Beispiel ist die Aussage „Es gilt $1 + 2 = 3$ oder $3 + 5 = 7$.“ wahr (zweite Tabellenzeile). Ebenso stimmt für jede reelle Zahl a die Aussage „Es gilt $a \geq 0$ oder $a \leq 0$.“, und zwar unabhängig davon, welche konkrete Zahl a man dort einsetzt. Hier kommt zum Beispiel für $a = 0$ die erste, für $a = -2$ die dritte Zeile zur Anwendung.

Zu beachten ist, dass sich beim mathematischen „oder“ die beiden Aussagen φ und ψ nicht gegenseitig ausschließen, wie dies beim umgangssprachlichen „entweder - oder“ der Fall ist: Die Aussage $\varphi \vee \psi$ ist auch dann wahr, wenn die Aussagen φ und ψ beide zutreffen!

- (iii) **Negation** $\neg\varphi$ „ φ gilt nicht.“ / „ φ ist falsch.“

φ	$\neg\varphi$
w	f
f	w

Beispielsweise ist der Satz „Die Gleichung $1 + 1 = 3$ gilt nicht.“ eine wahre Aussage (laut zweiter Tabellenzeile), und der Satz „Die Gleichung $1 + 1 = 2$ gilt nicht.“ ist falsch (laut erster Zeile).

- (iv) **Implikation** $\varphi \Rightarrow \psi$ „Aus φ folgt ψ .“ / „Wenn φ gilt, dann gilt auch ψ .“ / „ φ ist eine **hinreichende** Bedingung für ψ .“ / „ ψ ist eine **notwendige** Bedingung für φ .“

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Man bezeichnet φ als die **Prämisse**, ψ als die **Konklusion** der Implikation $\varphi \Rightarrow \psi$. Bemerkenswert ist die Festlegung in der vierten Zeile: Wenn die Prämisse falsch ist, dann gilt die Implikation $\varphi \Rightarrow \psi$ auf jeden Fall als wahr, unabhängig vom Wahrheitswert der Aussage Konklusion. So gesehen ist

„Wenn $1 + 1 = 3$ ist, dann gilt auch $2 + 7 = 11$.“

eine wahre (wenn auch nicht besonders nützliche) Aussage. Logiker verwenden dafür den Ausspruch „*Ex falso quodlibet*“, d.h. aus etwas Falschem folgt alles Mögliche.

Bei der Implikation ist zu beachten, dass es zwischen den Aussagen A und B kein *kausaler* Zusammenhang bestehen muss, damit die Implikation $A \Rightarrow B$ zu einer wahren Aussage wird. Es kommt nur auf die Wahrheitswerte von φ und ψ an. Beispielsweise ist die Implikation

„Wenn $1 + 1 = 2$ ist, dann beträgt die Summe der Innenwinkel aller Dreiecke 180° .“

wahr, obwohl die Gleichung $1 + 1 = 2$ wenig bis nichts mit den geometrischen Eigenschaften irgendwelcher Dreiecke zu tun hat. Ausschlaggebend für den Wahrheitsgehalt der Implikation ist hier nur, dass die beiden Teilaussagen wahr sind.

Implikationen spielen in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle; so gut wie jeder mathematische Satz wird als Implikation formuliert. Im Mathematikunterricht werden Implikationen bereits bei ganz elementaren Vorgängen wie etwa der **Umformung** von Gleichungen verwendet. So verwendet man beispielsweise die Tatsache, dass die Implikation „ $x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$ “ für alle reellen Zahlen x gültig ist, um die Gleichung $x + 3 = 5$ nach x hin „aufzulösen“.

- (v) **Äquivalenz** $\varphi \Leftrightarrow \psi$ „Es gilt φ genau dann, wenn ψ gilt.“ / „ φ ist hinreichende und zugleich notwendige Bedingung für ψ .“

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beim Arbeiten mit Implikationen ist es sehr wichtig, die zusammengesetzten Aussagen „ $\varphi \Rightarrow \psi$ “, „ $\psi \Rightarrow \varphi$ “ und „ $\varphi \Leftrightarrow \psi$ “ sorgfältig auseinander zu halten. Geschieht dies nicht, dann kann das bereits beim Auflösen von quadratischen Gleichungen zu Fehlern führen. Beispielsweise ist die Implikation $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ für alle reellen Zahlen x gültig, während $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ für alle reellen Zahlen $x \neq -3$ richtig, für $x = -3$ aber falsch ist: In diesem Fall ist Prämisse $x^2 = 9$ wahr, die Konklusion $x = 3$ aber falsch, damit ist die gesamte Implikation falsch. Wendet man nun diese fehlerhafte Implikation bei der Auflösung der Gleichung $x^2 - 8x + 7 = 0$ an, so erhält man

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = -7 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 9 \Rightarrow (x - 4)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x - 4 = 3 \Rightarrow x = 7$$

und „verliert“ somit die Lösung $x = 1$ der Gleichung. Der Fehler tritt an der Stelle auf, wo das Implikationszeichen $\Rightarrow$ in Anführungsstriche gesetzt wurde. Man könnte auch sagen, dass der Fehler in der Rechnung oben dadurch zu Stande kam, dass an einer Stelle eine notwendige Bedingung mit einer hinreichenden Bedingung verwechselt wurde: Die Gleichung $(x - 4)^2 = 9$ ist zwar eine notwendige Bedingung dafür, dass $x - 4 = 3$ ist, aber eben keine hinreichende. Dieser Unterschied spielt, wie wir noch sehen werden, bei vielen mathematischen Sätzen eine wichtige Rolle, zum Beispiel bei der Bestimmung von lokalen Extremstellen einer Funktion.

Häufig werden durch **mehrfache** Anwendung der Verknüpfungssymbole nicht nur zwei, sondern mehrere Aussagen miteinander verbunden. In welcher Reihenfolge dies geschieht, wird durch Klammern festgelegt. Beispielsweise bedeutet $(\varphi \wedge \psi) \vee \rho$, dass zuerst φ und ψ miteinander „und“-verknüpft und diese Aussage dann anschließend mit der Aussage ρ noch „oder“-verknüpft wird.

Um Schreibarbeit (also Klammern) einzusparen, legt man fest, dass bestimmte Symbole stärker binden als andere, vergleichbar mit der Konvention „Punktrechnung vor Strichrechnung“ aus der Arithmetik. Per Festlegung bindet das Negationszeichen $\neg$ am stärksten, danach in absteigender Reihenfolge die Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Beispielsweise ist der Ausdruck

$$\neg\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \varphi \Leftrightarrow \psi \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad (((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \psi.$$

Gelegentlich kann der Wahrheitsgehalt einer zusammengesetzten Aussage bestimmt werden, ohne dass man die Teilaussagen, aus denen die Aussage besteht, überhaupt kennt. Solche Aussagen wirken auf den ersten Blick eher nutzlos, bilden aber die Grundlage für das **logische Schließen** innerhalb einer mathematischen Beweisführung.

(1.2) Definition Eine zusammengesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitsgehalt ihrer Teilaussagen immer wahr ist, wird **Tautologie** genannt.

Ein Beispiel für eine Tautologie ist die bekannte Bauernregel

„Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.“

Isolieren wir hier die Teilaussagen

φ = „Der Hahn kräht auf dem Mist.“
 ψ = „Das Wetter ändert sich.“

und interpretieren den Satz „Das Wetter bleibt, wie es ist.“ als Negation $\neg\psi$ von ψ , dann ist unsere Bauernregel ϕ in Kurzschreibweise durch $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \neg\psi)$ gegeben. Wir wissen bereits, dass der Wahrheitsgehalt von ϕ nur von den Wahrheitswerten der Aussagen φ und ψ abhängt. Um zu kontrollieren, ob es sich bei ϕ um eine Tautologie handelt, genügt es also, alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten für φ und ψ in den Ausdruck ϕ einzusetzen. Wir erledigen dies durch Ausfüllen einer Tabelle.

φ	ψ	$\neg\psi$	$\psi \vee \neg\psi$	ϕ
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

Die zusammengesetzte Aussage ϕ ist unabhängig von φ und ψ immer wahr, also eine Tautologie.

(1.3) Definition Wir sagen, die Aussage ψ folgt aus den Aussagen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ durch einen **logischen Schluss**, wenn die Implikation

$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ eine Tautologie ist.

Wir sehen uns nun eine Reihe von logischen Schlüssen an, die in der Mathematik häufig verwendet werden. Im folgenden bezeichnen φ , ϕ und ψ jeweils beliebige Aussagen. Mit Hilfe von Wahrheitstabellen wird überprüft, dass die logischen Schlüsse zulässig sind.

(i) **Modus Ponens** $\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$

„Wenn φ gilt und aus φ die Aussage ψ folgt, dann gilt ψ .“

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$	$\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$
w	w	w	w	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
f	f	w	f	w

(ii) **Beweis durch Kontraposition** $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

„Aus φ folgt ψ genau dann, wenn aus $\neg\psi$ die Aussage $\neg\varphi$ folgt.“

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

(iii) **Beweis durch Widerspruch** $(\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \varphi$

„Wenn aus $\neg\varphi$ ein Widerspruch folgt (nämlich eine Aussage ϕ und zugleich auch ihr Gegenteil $\neg\phi$), dann ist φ wahr.“

φ	ϕ	$\neg\varphi$	$\neg\phi$	$\phi \wedge \neg\phi$	$\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi$	$(\neg\varphi \Rightarrow \phi \wedge \neg\phi) \Rightarrow \varphi$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	w

(iv) **Satz vom Ringschluss** $(\varphi \Rightarrow \phi) \wedge (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \phi) \wedge (\phi \Leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \Leftrightarrow \varphi)$

„Wenn aus φ die Aussage ϕ und aus ϕ die Aussage ψ und aus ψ wieder die Aussage φ folgt, dann sind die drei Aussagen φ , ϕ und ψ äquivalent.“

Hier ist die Verifikation etwas aufwändiger als bei den vorherigen Regeln. Zur Abkürzung definieren wir die Teilaussagen $A = \varphi \Rightarrow \phi$, $B = \phi \Rightarrow \psi$, $C = \psi \Rightarrow \varphi$, $D = \varphi \Leftrightarrow \phi$, $E = \phi \Leftrightarrow \psi$ und $F = \psi \Leftrightarrow \varphi$.

Damit erhalten wir

φ	ϕ	ψ	A	B	C	D	E	F	$A \wedge B \wedge C$	$D \wedge E \wedge F$	$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D \wedge E \wedge F$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	f	w	f	f	f	w
f	w	w	w	w	f	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	f	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w	w	w	w	w

§ 2. Mengenlehre und Prädikatenlogik

Inhaltsübersicht

Fast die gesamte moderne Mathematik ist auf dem Begriff der **Menge** aufgebaut. Eine Menge kann durch Aufzählung ihrer Elemente oder durch eine definierende Bedingung, ein sog. **Aussagenschema**, beschrieben werden. Mit Hilfe von Aussagenschemata definieren wir auch einige wichtige **Mengenoperationen**. Außerdem werden mit ihnen **quantifizierte** Aussagen gebildet, wie sie bei der Formulierung mathematischer Sätze fast immer vorkommen. Zum Abschluss führen wir die natürlichen Zahlen ein und besprechen das Prinzip der **vollständigen Induktion**.

Wichtige Begriffe und Sätze

- Mengendefinition nach Cantor
- Bedeutung der Relationen $\in$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\subsetneq$, $\supsetneq$
- Definition von Mengen durch definierende Bedingungen (Aussagenschemata)
- Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, kartesisches Produkt, Potenzmengenbildung)
- Nachweis der Mengengleichheit
- quantifizierte Aussagen, All- und Existenzquantor ($\forall$, $\exists$)
- Prinzip der vollständigen Induktion

Fast die gesamte moderne Mathematik basiert auf dem Konzept der Menge. Dies bedeutet, dass fast jedes mathematische Objekt, egal ob es sich dabei um eine Zahl, eine Funktion oder ein geometrisches Gebilde handelt, letztendlich durch eine Menge beschrieben werden kann. Desweiteren kann fast jede mathematische Aussage auf die Mengenlehre zurückgeführt und mit den Mitteln der Mengenlehre bewiesen werden, eine ganz erstaunliche Feststellung, wenn man sich die Vielfalt und Verschiedenartigkeit der mathematischen Strukturen vor Augen hält.

(2.1) Definition (naive Mengendefinition von Cantor)

„Eine **Menge** ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die **Elemente** dieser Menge genannt werden – zu einem Ganzen.“

Hierbei handelt es sich nicht um eine Definition im streng mathematischen Sinn; Begriffe wie „Zusammenfassung“, „Objekt“, „Anschauung“ usw. werden ihrerseits nicht definiert, sondern rein intuitiv verwendet. Auf Grund unserer Alltagserfahrung ist die Bedeutung der Cantorschen Definition dennoch unmittelbar klar. Jeder kann sich vorstellen, was es heißt, „Objekte unserer Anschauung“ zu einem „Ganzen“ zusammenzufassen (z.B. die Bürger einer Gemeinde, die Möbelstücke in einer Wohnung, die Moleküle eines Wassertropfens usw.), dasselbe gilt für die „Objekte unseres Denkens“ wie etwa die natürlichen Zahlen oder geometrische Figuren.

Wir weisen auf zwei wichtige Punkte der Cantorschen Definition hin: Erstens sind sämtliche Objekte einer Menge **verschieden**, es ist also nicht möglich, dass ein und dasselbe Objekt mehrfach in einer Menge vorkommt. Zweitens ist jede Menge als „Zusammenfassung“ durch ihre Elemente **eindeutig bestimmt**. Dies bedeutet, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Folgende Kurzschreibweisen sind in der Mengenlehre üblich.

$x \in M$	Das Objekt x ist Element der Menge M .
$x \notin M$	Das Objekt x ist <i>kein</i> Element der Menge M , in Kurzform also $\neg(x \in M)$.
$M \subseteq N$	Jedes Element x von M ist auch ein Element von N , d.h. die Implikation $x \in M \Rightarrow x \in N$ ist für alle Objekte x erfüllt. Man bezeichnet M dann als Teilmenge von N .
$M = N$	Es gilt $x \in M \Leftrightarrow x \in N$ für alle Objekte x (äquivalent: $M \subseteq N \wedge N \subseteq M$).
$M \supseteq N$	gleichbedeutend mit $N \subseteq M$
$M \subsetneq N$	$M \subseteq N \wedge \neg(M = N)$
$M \supsetneq N$	gleichbedeutend mit $N \subsetneq M$
$\emptyset$	die leere Menge Dies ist die eindeutig bestimmte Menge die $x \notin \emptyset$ für alle Objekte x erfüllt, also die Menge, die kein einziges Objekt als Element besitzt.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge konkret anzugeben. Zunächst kann dies **umgangssprachlich** geschehen.

„Sei P die Menge aller Primzahlen.“

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Elemente einer Menge explizit **aufzuzählen**.

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{oder kürzer} \quad M = \{1, 2, \dots, 7\}$$

Bei der Verwendung von „...“ ist darauf zu achten, dass für den Leser klar ersichtlich ist, welche Elemente bei der Aufzählung weggelassen wurden. Schreibt man etwa $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$, dann ist noch einigermaßen ersichtlich, dass die Menge der Primzahlen gemeint ist. Schwieriger wird das schon bei der Angabe

$$M = \{1, 4, \dots, 64\}.$$

Hier ist nicht ohne weiteres klar, ob die Menge $\{1, 4, 16, 64\} = \{4^0, 4^1, 4^2, 4^3\}$ der ersten drei Viererpotenzen oder vielleicht $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\}$, die Menge der ersten acht Quadratzahlen, gemeint ist. Ein Vorteil der „...“-Schreibweise besteht aber darin, dass mit ihr auch unendliche Mengen direkt angegeben werden können, zum Beispiel die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Auch mit Hilfe der im letzten Kapitel eingeführten Aussagenschemata lassen sich Mengen definieren. Sei φ ein Aussagenschema mit einem Parameter x und M eine Menge. Für jedes $c \in M$ bezeichnen wir mit $\varphi(c)$ den Satz, den man erhält, wenn der Parameter x durch c ersetzt wird. Wir setzen voraus, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine sinnvolle Aussage ist. Nach Definition besteht dann die Menge

$$N = \{c \in M \mid \varphi(c)\}$$

aus genau denjenigen Elementen c von M , für die $\varphi(c)$ eine wahre Aussage ist. Man nennt φ dann auch die **definierende Bedingung** für die Teilmenge N von M .

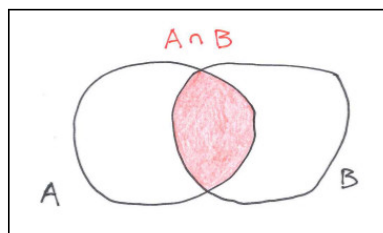
Beispielsweise beschreibt $\{c \in \mathbb{R} \mid c^2 < 1\}$ die Menge derjenigen reellen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 1 ist. In dieser Situation ist also $M = \mathbb{R}$ die Grundmenge und $\varphi(x) = x^2 < 1$ das Aussagenschema, dass die Teilmenge beschreibt. Offenbar ist $c^2 < 1$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine sinnvolle, aber nur für $-1 < c < 1$ auch eine wahre Aussage.

Gelegentlich verwendet man auch die Notation $N = \{c \mid \varphi(c)\}$, ohne die Angabe einer Grundmenge für die Objekte c . In diesem Fall besteht N aus *allen* mathematischen Objekten c , für die die Aussage $\varphi(c)$ wahr ist. Strenggenommen ist eine solche Definition für beliebige Aussagenschemata φ nicht zulässig, weil dies zu Widersprüchen führen kann (Stichwort „Russelsche Antinomie“). Wir werden die Notation aber nur in Situationen einsetzen, wo solche Probleme ausgeschlossen sind.

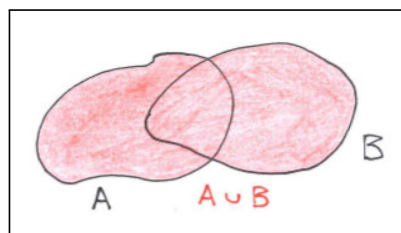
Aus gegebenen Mengen können durch weitere Operationen neue Mengen definiert werden. Seien A und B beliebig vorgegebene Mengen. Folgende Mengenoperationen sind in der Mathematik allgemein gebräuchlich.

Durchschnitt	$A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$
Vereinigung	$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$
Differenz	$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$
kartesisches Produkt	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
Potenzmenge	$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

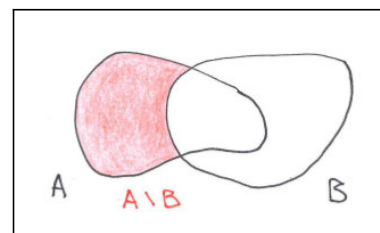
Einige dieser Operationen lassen sich durch sog. **Venn-Diagramme** veranschaulichen.



Durchschnitt



Vereinigung



Differenz

Das kartesische Produkt $A \times B$ besteht aus allen Paaren (a, b) , die mit Elementen $a \in A$ und $b \in B$ gebildet werden können. Ist beispielsweise $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 4, 5\}$, dann erhalten wir

$$A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 4, 5\} = \left\{ \begin{array}{cccc} (1, 1), & (1, 2), & (1, 4), & (1, 5), \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 4), & (2, 5), \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 4), & (3, 5) \end{array} \right\}$$

(Die Elemente wurden nur zur besseren Übersicht in einem rechteckigen Schema angeordnet. Man hätte auch alle 12 Elemente direkt hintereinander schreiben können.)

Bei der Definition des kartesischen Produkts ist zu beachten, dass zwei **Paare** (a, b) und (c, d) von Objekten a, b, c, d nur dann gleich sind, wenn $a = c$ und $b = d$ erfüllt ist. Zum Beispiel sind die Paare $(3, 5)$ und $(5, 3)$ verschieden. Im Gegensatz dazu stimmen die zweielementigen Mengen $\{3, 5\}$ und $\{5, 3\}$ überein, da es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Elemente einer Menge aufgezählt werden.

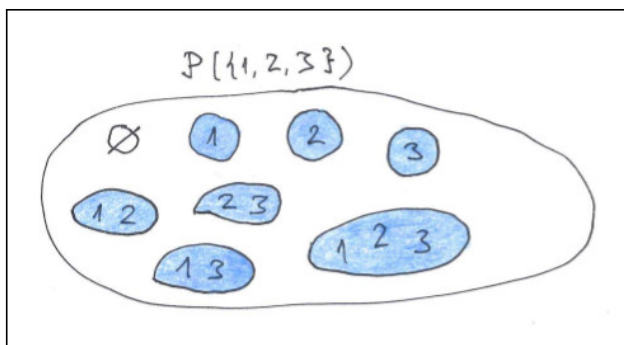
Das kartesische Produkt kann auch mit mehr als zwei Mengen gebildet werden. Die Elemente bezeichnet man dann nicht mehr als Paare, sondern als **Tupel**. Sind beispielsweise A, B, C drei beliebige Mengen, dann setzt man

$$A \times B \times C = \{ (a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$$

wobei wieder $(a, b, c) = (a', b', c')$ nur dann erfüllt ist, wenn $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$ gilt. Es ist also beispielsweise $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$ und $(2, 2, 4) \neq (2, 4, 2)$. Häufig werden mehrfache kartesische Produkte auch mit ein- und derselben Menge gebildet. Man definiert $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, $A^4 = A \times A \times A \times A$ usw. Beispielsweise ist $(3, 4, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, -9)$ ein Element der Menge $\mathbb{R}^5$.

Bei den Potenzmengen ist zu beachten, dass deren Elemente selbst wieder Mengen sind! Nach Definition ist für jede beliebige Mengen A, B die Aussage $B \in \mathcal{P}(A)$ äquivalent zu $B \subseteq A$. Intuitiv klar ist, dass bei einer endlichen Menge A die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ebenfalls nur endlich viele Elemente enthält. Ist beispielsweise $A = \{1, 2, 3\}$, dann enthält jede Teilmenge von A entweder kein, genau ein, genau zwei oder genau drei Elemente. Dies kann für eine systematische Aufzählung der Elemente von $\mathcal{P}(A)$ verwendet werden: Es gilt

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}.$$



die achtelementige Potenzmenge von $\{1, 2, 3\}$

Eine häufige Fehlerquelle beim Umgang mit Mengen besteht darin, dass man zwischen einer Menge und ihren Elementen nicht klar unterscheidet. Beispielsweise wäre es falsch zu sagen, dass die 1 ein Element von $\mathcal{P}(A)$ ist. Lediglich die Menge $\{1\}$ ist ein Element von $\mathcal{P}(A)$, und 1 ist ein Element der Menge $\{1\}$. Momentan klingt das noch recht haarspalterisch; bei komplizierteren mengentheoretischen Konstruktionen (zum Beispiel Faktorstrukturen) kommt man aber in große Schwierigkeiten, wenn man sich an diese Unterscheidung nicht gewöhnt hat.

Eine wichtige Grundtechnik beim Führen von Beweisen ist der Nachweis der **Gleichheit zweier Mengen**. Häufig bietet es sich an, die Aussage $M = N$ in die folgenden beiden Teilaussagen zu zerlegen und diese einzeln zu beweisen.

- (i) Ist x ein Element der Menge M , dann ist x auch ein Element von N .
- (ii) Ist x ein Element der Menge N , dann ist x auch ein Element von M .

Aus der ersten Aussage folgt $M \subseteq N$, aus der zweiten $N \subseteq M$, insgesamt also $M = N$.

Wie die Beweise der Teilaussagen (i) und (ii) aussehen können, schauen wir uns an einem konkreten Beispiel an. Unser Ziel ist der Beweis der Gleichung

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (xy + 1)z = 0\} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\frac{1}{x}, z) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wir bezeichnen die Menge auf der linken Seite der Gleichung mit M und die Menge auf der rechten Seite der Gleichung mit N . Die Menge N enthält also alle Tupel der Form $(x, y, 0)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und alle Tupel der Form $(x, -\frac{1}{x}, z)$ mit $x, z \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$.

Beweis der Teilaussage (i)

Sei $p \in M$. Nach Definition von M gilt $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $(xy + 1)z = 0$. Aus dieser Gleichung folgt $xy + 1 = 0$ oder $z = 0$, denn das Produkt zweier reeller Zahlen ist nur dann gleich Null, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist. Ist $z = 0$, dann hat p die Form $(x, y, 0)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, also liegt p in N . Ist dagegen $xy + 1 = 0$, dann muss $x \neq 0$ gelten, denn ansonsten wäre $xy + 1 = 0 \cdot y + 1 = 1$. Aus $xy + 1 = 0$ folgt $xy = -1$, wegen $x \neq 0$ dann auch $y = -\frac{1}{x}$ und somit ebenfalls $p = (x, y, z) = (x, -\frac{1}{x}, z) \in N$.

Beweis der Teilaussage (ii)

Sei $p \in N$. Dann gilt $p = (x, y, 0)$ mit geeigneten $x, y \in \mathbb{R}$ oder $p = (x, -\frac{1}{x}, z)$ für geeignete $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $z \in \mathbb{R}$. Betrachten wir zunächst den Fall $p = (x, y, 0)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Setzen wir $z = 0$, dann gilt $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und $(xy + 1)z = (xy + 1) \cdot 0 = 0$. Daraus folgt $p \in M$. Betrachten wir nun den Fall, dass $p = (x, -\frac{1}{x}, z)$ für ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $z \in \mathbb{R}$ gilt. Setzen wir $y = -\frac{1}{x}$, dann liegt $p = (x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$. Außerdem gilt $(xy + 1)z = (x \cdot (-\frac{1}{x}) + 1)z = ((-1) + 1)z = 0 \cdot z = 0$. Also liegt p auch in diesem Fall in M . $\square$

In einfacheren Situationen lässt sich die Gleichheit zweier Mengen auch durch eine Kette von Äquivalenzumformungen beweisen. Als Beispiel betrachten wir die Mengengleichung

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}.$$

Wieder sei M die Menge auf der linken und N die Menge auf der rechten Seite der Gleichung. Es gilt $M = N$, wenn wir für jedes Objekt x die Äquivalenz $x \in M \Leftrightarrow x \in N$ beweisen können. Da M und N beides Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, genügt es, die Äquivalenz für alle $x \in \mathbb{R}$ zu beweisen, denn ansonsten sind die Aussagen $x \in M$ und $x \in N$ beide falsch und die Äquivalenz damit auf jeden Fall wahr.

Sei also $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in M &\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}\right)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2 \Leftrightarrow x \in \{-3, 2\} \Leftrightarrow x \in N. \end{aligned}$$

Hier wurde nichts anderes getan, als die Gleichung durch Bildung der quadratischen Ergänzung zu lösen. Wichtig ist bei solchen Beweisen, dass jeder einzelne Schritt genau begründet werden kann, und dass jeweils *beide* Implikationsrichtungen gültig sind. Beispielsweise wäre $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ keine zulässige Äquivalenzumformung, weil die Implikationsrichtung „ $\Leftarrow$ “ nicht für jede reelle Zahl x gültig ist. (Wie wir bereits oben festgestellt haben, ist sie für $x = -3$ falsch.)

In vielen Situationen möchte man Aussagen formulieren, die die Gesamtheit der Elemente einer Menge betreffen. Dazu verwendet man den sog. **Allquantor** $\forall$ und den **Existenzquantor** $\exists$. Sei φ ein Aussagenschema mit x als Parameter, und wiederum sei M eine Menge mit der Eigenschaft, dass man für jedes $c \in M$ durch Ersetzung von x durch c eine sinnvolle Aussage $\varphi(c)$ erhält. Dann kann man mit Hilfe von All- und Existenzquantor zwei neue Aussagen $\forall x \in M : \varphi$ und $\exists x \in M : \varphi$ bilden, die man als **quantifizierte** Aussagen bezeichnet. Den Umgang mit quantifizierten Aussagen bezeichnet man als **Prädikatenlogik**, im Unterschied zur Aussagenlogik, wo man nur Aussagen ohne Quantoren betrachtet.

(2.2) Definition

- (i) Die Aussage $\forall x \in M : \varphi$ bedeutet, dass $\varphi(c)$ für **alle** $c \in M$ wahr ist.
Es gilt also $\{c \in M \mid \varphi(c)\} = M$.
- (ii) Die Aussage $\exists x \in M : \varphi$ bedeutet, dass $\varphi(c)$ für **mindestens ein** $c \in M$ wahr ist.
Es gilt also $\{c \in M \mid \varphi(c)\} \neq \emptyset$.

Betrachten wir beispielsweise das Aussagenschema $x \leq 5$ mit dem Parameter x über der Menge $M = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen und bezeichnen es mit φ .

- (i) Die Aussage $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ ist **falsch**, denn $\varphi(c)$ ist nicht für alle $c \in \mathbb{R}$ erfüllt. Beispielsweise ist $\varphi(7)$ falsch.
- (ii) Die Aussage $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ ist **wahr**, denn es gibt Elemente $c \in \mathbb{R}$, für die $\varphi(c)$ wahr ist. Zum Beispiel ist $\varphi(4)$ eine wahre Aussage.

Die meisten Aussagen, die wir im Laufe der Zeit beweisen werden, sind quantifizierte Aussagen, enthalten also die Formulierungen „für alle“ oder „es gibt ein x , so dass...“. Dabei treten besonders zu Anfang häufig methodische Fehler auf. Um eine Aussage der Form $\forall x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, muss die Aussage $\varphi(c)$ für **jedes** $c \in M$ bewiesen werden. Dazu gibt man sich mit der Floskel „Sei $c \in M$.“ ein beliebiges Element c aus M vor und beweist anschließend die Aussage $\varphi(c)$. Während des Beweises darf dann nur verwendet werden, dass c ein Element der Menge M ist. Jede Einschränkung oder Spezialisierung von c macht den Beweis **ungültig**.

Um andererseits eine Aussage der Form $\exists x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, genügt es, ein **spezielles** Element $c \in M$ anzugeben und die Aussage $\varphi(c)$ nur für dieses c zu beweisen. Natürlich kann es schwierig sein, ein solches c erst einmal zu finden. Um beispielsweise die Aussage $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 = 0$ auf diesem Weg zu beweisen, muss eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$ gefunden werden.

Gelegentlich hat man es auch mit der **Negation** einer quantifizierten Aussage zu tun.

(2.3) Satz Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine sinnvolle Aussage ist. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen.

$$(i) \quad \neg \forall x \in M : \varphi(x) \iff \exists x \in M : \neg \varphi(x)$$

$$(ii) \quad \neg \exists x \in M : \varphi(x) \iff \forall x \in M : \neg \varphi(x)$$

Beweis: zu (i) „ $\Leftarrow$ “ (durch Widerspruch) Auf Grund der Voraussetzung gibt es ein $c \in M$, so dass $\neg \varphi(c)$ erfüllt ist. Nehmen wir nun an, auch die Aussage $\forall x \in M : \varphi(x)$ ist wahr. Dann muss insbesondere auch $\varphi(c)$ gelten. Die Aussagen $\varphi(c)$ und $\neg \varphi(c)$ wären also gleichzeitig erfüllt, was unmöglich ist. Der Widerspruch zeigt, dass $\neg \forall x \in M : \varphi(x)$ gelten muss.

„ $\Rightarrow$ “ (durch Kontraposition und Widerspruch) Wir setzen $\neg \exists x \in M : \neg \varphi(x)$ voraus und zeigen $\forall x \in M : \varphi(x)$. Sei dazu $c \in M$ vorgegeben. Angenommen, es gilt $\neg \varphi(c)$. Dann existiert also ein $c \in M$ mit $\neg \varphi(c)$, und das bedeutet, dass $\exists x \in M : \neg \varphi(x)$ gilt, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Da also $\neg \varphi(c)$ zu einem Widerspruch führt, muss $\varphi(c)$ gelten. Weil $c \in M$ beliebig vorgegeben war, haben wir somit $\forall x \in M : \varphi(x)$ bewiesen.

zu (ii) „ $\Leftarrow$ “ (durch Kontraposition und Widerspruch) Wir setzen $\exists x \in M : \varphi(x)$ voraus und leiten daraus $\neg \forall x \in M : \neg \varphi(x)$ ab. Auf Grund unserer Voraussetzung existiert ein $c \in M$, so dass $\varphi(c)$ erfüllt ist. Nehmen wir nun an, es gilt $\forall x \in M : \neg \varphi(x)$. Dann müsste auch $\neg \varphi(c)$ gelten, im Widerspruch zu $\varphi(c)$. Also gilt statt dessen $\neg \forall x \in M : \neg \varphi(x)$.

„ $\Rightarrow$ “ (durch Widerspruch) Unsere Voraussetzung lautet $\neg \exists x \in M : \varphi(x)$. Zum Beweis von $\forall x \in M : \neg \varphi(x)$ sei $c \in M$ vorgegeben. Nehmen wir an, es gilt $\varphi(c)$. Dann wäre die Aussage $\exists x \in M : \varphi(x)$ erfüllt, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Also gilt $\neg \varphi(c)$. Weil $c \in M$ beliebig vorgegeben war, ist damit $\forall x \in M : \neg \varphi(x)$ bewiesen. $\square$

Schließlich ist es noch möglich, mehrere Quantoren zu **verschachteln**. In diesem Fall benötigt man Aussagenschemata mit **mehreren** Parametern. Sei φ ein Aussagenschema mit den beiden Parametern x, y und M, N Mengen mit der Eigenschaft, dass man für alle $c \in M$ und $d \in N$ eine sinnvolle Aussage $\varphi(c, d)$ erhält, wenn man x durch c und y durch d ersetzt. Dann ist $\forall y \in N : \varphi$ ein Aussagenschema, das nur noch vom Parameter x abhängt, und

$$\exists x \in M : \forall y \in N : \varphi$$

ist eine Aussage, mit zwei ineinander verschachtelten Quantoren. Umgangssprachlich bedeutet diese Aussage: „Es gibt ein $c \in M$, so dass für alle $d \in N$ jeweils $\varphi(c, d)$ gilt.“

Dabei sind die Quantoren $\exists$ und $\forall$ in beliebiger Kombination zugelassen. Es ergeben sich dadurch Aussagen mit unterschiedlicher Bedeutung.

- Der Ausdruck $\forall x \in M : \exists y \in N : \varphi$ bedeutet:
„Für jedes $c \in M$ gibt es ein $d \in N$, so dass $\varphi(c, d)$ gilt.“
- Der Ausdruck $\exists x \in M : \exists y \in N : \varphi$ bedeutet:
„Es gibt Elemente $c \in M$ und $d \in N$, so dass $\varphi(c, d)$ gilt.“
- Der Ausdruck $\forall x \in M : \forall y \in N : \varphi$ bedeutet:
„Für alle $c \in M$ und alle $d \in N$ gilt $\varphi(c, d)$.“

Man beachte, dass auch die Aussagen $\forall x \in M : \exists y \in N : \varphi$ und $\exists y \in N : \forall x \in M : \varphi$ nicht etwa gleichbedeutend sind, es kommt also auch auf die **Reihenfolge** der Quantoren an. Wir machen uns dies am Beispiel des Aussagenschemas $x < y$ mit den Parametern x, y klar, das wir wieder mit φ bezeichnen. Offenbar erhält man jedes Mal eine sinnvolle Aussage, wenn man für x und y Elemente aus $\mathbb{R}$, der Menge der reellen Zahlen, einsetzt.

Die Aussage $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x < y$ bedeutet nun: „Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $d \in \mathbb{R}$ jeweils $c < d$ gilt.“ Diese Aussage ist offenbar falsch. Denn nehmen wir an, es gibt ein solches c . Dann ist $d = c - 1$ offenbar kleiner als c , und nicht größer. Somit ist $c < d$ nicht für alle $d \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Die Aussage $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : x < y$ bedeutet andererseits, dass für jedes $d \in \mathbb{R}$ jeweils ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ existiert. Diese Aussage ist wahr. Geben wir nämlich ein beliebiges $d \in \mathbb{R}$ vor, dann können wir $c = d - 1$ setzen, und die Aussage $c < d$ ist offenbar erfüllt.

Kommen wir nun zum letzten Thema dieses Kapitels, der **vollständigen Induktion**. Wir werden die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen in einem späteren Kapitel als Teilmenge der reellen Zahlen definieren. Trotzdem soll an dieser Stelle bereits mit $\mathbb{N}$ gearbeitet werden. Wir setzen folgende Aussagen über die Menge $\mathbb{N}$ als bekannt voraus. Sie sind in der Literatur unter dem Namen **Peano-Axiome** bekannt, benannt nach dem italienischen Mathematiker *Guisepe Peano (1858-1932)* und lauten

- (P1) Es gibt ein ausgezeichnetes Element in $\mathbb{N}$, das wir mit 1 bezeichnen.
- (P2) Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen eindeutig bestimmten **Nachfolger**, der mit $n + 1$ bezeichnet wird.
- (P3) Kein Element aus $\mathbb{N}$ besitzt die 1 als Nachfolger.
- (P4) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m + 1 = n + 1$, dann folgt $m = n$.

Hinzu kommt noch das wichtige

(P5) *Induktionsprinzip*:

Sei φ ein Aussagenschema mit folgenden Eigenschaften: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(n)$ eine sinnvolle Aussage, darüber hinaus seien $\varphi(1)$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$ wahre Aussagen. Dann ist auch $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x)$ wahr.

Die Anwendung des Induktionsprinzips bezeichnet man als **vollständige Induktion**, es ist eines der wichtigsten Beweisprinzipien der Mathematik. Wir werden sehen, dass in vielen Situationen die Beweise der Aussagen $\varphi(1)$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$ erheblich einfacher sind als ein direkter Beweis von $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x)$.

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, kann das Induktionsprinzip zum Beispiel dafür benutzt werden, um auf den natürlichen Zahlen die Addition und die Multiplikation zu definieren, und um die aus der Schule bekannten Rechengesetze herzuleiten, zum Beispiel Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz. Wir nehmen aber hier an, dass wir die aus der Schule bekannten Zahlbereiche schon zur Verfügung haben und betrachten als Beispiel den folgenden „Klassiker“ unter den Induktionsbeweisen.

(2.4) Satz Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gegeben durch

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Beweis: Unser Ziel besteht darin, das Induktionsprinzip auf das Aussagenschema $\sum_{k=1}^x k = \frac{1}{2}x(x+1)$ mit dem Parameter x anzuwenden. Bezeichnen wir dieses Aussagenschema mit φ , dann müssen wir also $\varphi(1)$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$ beweisen. Die Aussage $\varphi(1)$ lautet $\sum_{k=1}^1 k = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$. Diese Aussage ist offensichtlich wahr, denn tatsächlich gilt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 = \sum_{k=1}^1 k$.

Nun beweisen wir $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann ist $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ zu zeigen. Setzen wir dazu voraus, dass $\varphi(n)$ wahr ist. Dann gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \\ \frac{1}{2}n(n+1) + 1 \cdot (n+1) &= \left(\frac{1}{2}n+1\right)(n+1) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1). \end{aligned}$$

Dies entspricht der Aussage $\varphi(n+1)$. Damit ist insgesamt die Implikation $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ bewiesen. $\square$

In einem Induktionsbeweis über ein Aussagenschema φ bezeichnet man den Beweis von $\varphi(1)$ als **Induktionsanfang** und den Beweis der Implikation $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ für ein beliebig vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ als **Induktionsschritt**. Die Teilaussage $\varphi(n)$ nennt man dabei die **Induktionsvoraussetzung**. Jeder Induktionsbeweis sollte so aufgeschrieben sein, dass klar zu erkennen ist, an welcher Stelle die Induktionsvoraussetzung verwendet wird. (In einem späteren Kapitel werden wir sehen, wie sich der Ausdruck $1 + 2 + \dots + n$ mit Hilfe des Summenzeichens kompakter darstellen lässt.)

Literaturverzeichnis

[Bo] S. Bosch, *Lineare Algebra*. Springer-Lehrbuch, Berlin 2006.

[dJ] T. de Jong, *Lineare Algebra*. Pearson-Studium, München 2013.

[Fi] G. Fischer, *Lernbuch Lineare Algebra und Geometrie*. Vieweg-Teubner, Wiesbaden 2011.

[Jn] K. Jaenich, *Lineare Algebra*. Springer-Verlag, Berlin 2001.