

Satz (9.6)

Sei $y' = f(x, y, \alpha)$ ein parameterabhängiges System wie in Definition (9.1), das den Standardvoraussetzungen genügt. Sei $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der zugeordnete Fluss. Dann ist $\mathcal{D}$ eine **offene** Teilmenge von $\mathbb{R}^{2+n+m}$, und die Funktion Φ ist **stetig**.

Notation für den Beweis

- zugeordnetes parameterunabhängiges System $y' = g(x, y)$ mit $g : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n+m}$
- Fluss des parameterunabhängigen Systems $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{2+n+m}$
- Zylinderumgebung eines Punktes $(a, c) \in \mathbb{R}^{1+n+m}$

$$Z_{\tau,r}(a, c) = [a - \tau, a + \tau] \times \bar{B}_r(c)$$

- Zylinderumgebung eines Punktes $(a, a, c) \in \mathbb{R}^{2+n+m}$

$$\hat{Z}_{\tau,r}(a, c) = [a - \tau, a + \tau] \times Z_{\tau,r}$$

- System offener Teilmengen $\mathcal{U} = \{U \subseteq \mathcal{D} \mid \Psi|_U \text{ ist stetig} \}$
- Beweisziel ist die Gleichung $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$

Formulierung der beiden Hilfsaussagen

- 1. Hilfsaussage:

Zu jedem Punkt $(a, c) \in D$ gibt es positive Zahlen $\tau, r \in \mathbb{R}^+$ mit $Z_{\tau,r}(a, c) \subseteq Z_{\tau,2r}(a, c) \subseteq D$ und der Eigenschaft, dass für alle $(b, d) \in Z_{\tau,r}(a, c)$ die Lösung $\psi_{b,d}$ auf dem Intervall $[a - \tau, a + \tau]$ existiert und $\|\psi_{b,d}(t) - c\| < 2r$ für alle $t \in [a - \tau, a + \tau]$ gilt.

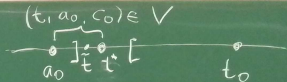
- 2. Hilfsaussage:

Zu jedem Punkt $(a, a, c) \in \mathcal{D}$ gibt es $\tau, r \in \mathbb{R}^+$, so dass die Zylinderumgebung $\hat{Z}_{\tau,r}(a, c)$ in $\mathcal{D}$ enthalten und der Fluss Ψ auf dieser Zylinderumgebung stetig ist.

Herleitung des Beweisziels aus den beiden Hilfsaussagen

- **Widerspruchsannahme:** Es gibt einen Punkt (t_0, a_0, c_0) in $\mathcal{D} \setminus V$, wobei o.B.d.A. $t_0 < a_0$ (Beweis im Fall $t_0 > a_0$ analog, $t_0 = a_0$ ausgeschlossen, weil (a_0, a_0, c_0) Element einer Zylinderumgebung $\hat{Z}_{\tau,r}(a_0, c_0)$ ist, die laut 2. Hilfsaussage in V enthalten ist.)
- Nach Definition von $\mathcal{D}$ gilt $(a_0, c_0) \in D$, $t_0 \in J_{a_0, c_0}$, wobei $\psi_{a_0, c_0} : J_{a_0, c_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ maximale Lösung. Es folgt $(t, a_0, c_0) \in \mathcal{D}$ für alle $t \in [a_0, t_0]$.
- Setze $t^* = \inf\{t \in [a_0, t_0] \mid (t, a_0, c_0) \in \mathcal{D} \setminus V\}$.
Die Menge rechts enthält zumindest t_0 .
- Es gilt $t^* \in]a_0, t_0]$ wegen $(a_0, a_0, c_0) \in V$ und der Offenheit von V , und ebenso $(t^*, a_0, c_0) \in \mathcal{D} \setminus V$, weil V offen ist.
- Wir führen dies nun zu einem **Widerspruch**, indem wir $(t^*, a_0, c_0) \in V$ herleiten.

Ziel: $(t^*, a_0, c_0) \in V$



$$[t_0, a_0] \subseteq J_{a_0, c_0} \Rightarrow t^* \in J_{a_0, c_0} \Rightarrow (t^*, \psi_{a_0, c_0}(t^*)) \in D$$

2. Hilfsaussage $\Rightarrow \exists \tau, r \in \mathbb{R}^*$, so dass

$\hat{Z}_{\tau, r}(t^*, \psi_{a_0, c_0}(t^*)) \subseteq D$ und Ψ stetig auf
dieser Zylinderumgebung ist

$$\Rightarrow S_a: [t^* - \tau, t^* + \tau] \times \bar{B}_r(\psi_{a_0, c_0}(t^*)) \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

$(t, c) \mapsto \psi_{a, c}(t)$ ist eine stetige Abb.

$$\psi(t, a, c)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t^*} \varphi_{a_0, c_0} = \varphi_{a_0, c_0}(t^*)$$

$$\rightarrow \exists \tilde{t} \in]\max\{a_0, t^* - \tau, t^*\} \text{ mit } \varphi_{a_0, c_0}(\tilde{t}) \in B_r(\varphi_{a_0, c_0}(t^*))$$

$$\tilde{t} < t^*, \text{ Def von } t^* \Rightarrow (\tilde{t}, a_0, c_0) \in V$$

Def. von $V \Rightarrow \Phi$ ist stetig auf einer offenen läng. $U \subseteq D$

$$\text{von } (\tilde{t}, a_0, c_0) \rightarrow \exists \nu, \rho \in \mathbb{R}^+ :]\tilde{t} - \nu, \tilde{t} + \nu[\times Z_{\nu, \rho}(a_0, t_0) \subseteq U$$

$$\varphi_{a_0, t_0}(\tilde{t}) \in B_r(\varphi_{a_0, c_0}(t^*)) \Rightarrow \text{es bleibt noch zu kl.}$$

Vorbereitung von ν und ρ eine stetige Abb.

$$Z_{\nu, \rho}(a_0, c_0) \rightarrow B_r(\varphi_{a_0, c_0}(t^*)), (a, c) \mapsto \varphi_{a, c}(\tilde{t})$$

$$\text{Setze } \tilde{Z} =]t^* - \tau, t^* + \tau[\times]a_0 - \nu, a_0 + \nu[\times B_\rho(c_0) \\ =]t^* - \tau, t^* + \tau[\times Z_{\nu, \rho}(a_0, c_0).$$

$\Rightarrow$ erhalte eine stetige Abbildung

$$\gamma: \tilde{Z} \rightarrow]t^* - \tau, t^* + \tau[\times B_r(\gamma_{a_0, c_0}(t^*)) \\ (t, a, c) \mapsto (t, \gamma_{a, c}(\tilde{t}))$$

Für jedes $(t, a, c) \in \tilde{Z}$ gilt jeweils

$$\gamma_{a, c}(t) = \gamma(\tilde{t}, \gamma_{a, c}(\tilde{t}))(t) \quad (\text{gemäß } \gamma_{a, c} \text{ ist eindeutig best. dsg. mit dem Wert } \gamma_{a, c}(\tilde{t}) \text{ im Punkt } \tilde{t})$$

$$\Rightarrow t \in J_{a,c} \quad \forall (t, a, c) \in \tilde{Z} \Rightarrow \\ (t, a, c) \in D \quad \underline{\text{also:}} \quad \tilde{Z} \subseteq D$$

Für alle $(t, a, c) \in \tilde{Z}$ gilt weiter

$$(\delta_{\tilde{t}} \circ \gamma)(t, a, c) = \delta_{\tilde{t}}(t, \gamma_{a,c}(\tilde{t})) = \\ \gamma_{\tilde{t}, \gamma_{a,c}(\tilde{t})}(t) = \gamma_{a,c}(t) = \Phi(t, a, c)$$

$$\delta_{\tilde{t}}, \gamma \text{ stetig} \Rightarrow \delta_{\tilde{t}} \circ \gamma \text{ ist stetig} \Rightarrow$$

Φ ist stetig auf $\tilde{Z}$ Nach Def. der Menge

V folgt $\tilde{Z} \subseteq V$, insb. $(t^*, a_0, c_0) \in V \downarrow$

c) Beweis der 1. Hilfsaussage

geg. $(a, c) \in D$ D offen $\Rightarrow \tau, r \in \mathbb{R}^+$

mit $Z_{\tau, r}(a, c) \subseteq Z_{\tau, 2r}(a, c) \subseteq D$

z.zg.: Für alle $(b, d) \in Z_{\tau, r}(a, c)$ ist die Lösung $\psi_{b, d}$ auf $[a - \tau, a + \tau]$ definiert und verlässt auf dem ges. Intervall $Z_{\tau, 2r}(a, c)$ nicht

Ang. dies ist nicht der Fall (d.h. entweder der Def.-bereich von $\psi_{b, d}$ ist kleiner als $[a - \tau, a + \tau]$ oder die große Zylinderung wird verlassen. Dann

existiert in beiden Fällen ein $\tilde{t} \in [a - \tau, a + \tau]$ mit $\|\psi_{b, d}(\tilde{t}) - c\| \geq 2r$ (gemäß Satz 3.14)

über das Randverhalten von Lsg.)

Q.B.d.A. $\tilde{t} < b$ (Fall $\tilde{t} > b$ analog und $\tilde{t} = b$ ausged. wg. $\mathcal{T}_{b,d}(b) = d$, $\|d - c\| \leq r$)

$\mathcal{U}_{b,d}$ stetig $\Rightarrow \exists t^* \in]b, \tilde{t}[$ mit

$$\|\mathcal{U}_{b,d}(t^*) - c\| = 2r \text{ und } \|\mathcal{U}_{b,d}(t) - c\| < 2r$$

für alle $t \in [b, t^*[$

g stetig, $Z_{\tau, 2r}(a, c)$ relativ kompakt $\Rightarrow$

$$M = \sup \{ \|g(x, y)\| \mid (x, y) \in Z_{\tau, 2r}(a, c) \} < +\infty$$

Annahme: τ ist so klein gewählt, dass $2\tau M < r$

Da $\mathcal{U}_{b,d}$ eine Lsg. von $y' = g(x, y)$ ist, gilt

für alle $t \in [b, t^*]$ gilt $\varphi_{b,d}(t) - d = \int_b^t g(s, \varphi_{b,d}(s)) ds$

$$\Rightarrow \|\varphi_{b,c}(t^*) - c\| \leq \|\varphi_{b,d}(t^*) - d\| + \|d - c\| \leq$$

$$\int_b^{t^*} \|g(s, \varphi_{b,d}(s))\| ds + \|d - c\| \leq (t^* - b)M + \|d - c\|$$

$$\leq 2\tau M + r < r + r = 2r \quad \hookrightarrow \|\varphi_{b,c}(t^*) - c\| = 2r$$

Beweis der 2. Hilfsaussage : siehe Skript

Satz 9.7 geg eine stetig diff'bare Fkt

$g: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem nichtleeren offenen Intervall

Es sei $c \in I$ eine Ruhelage des Systems $y' = g(y)$

(i) Existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset I$, so dass
 $g(y) > 0$ für alle $y \in]c-\varepsilon, c[$ und $g(y) < 0 \forall y \in]c, c+\varepsilon[$,
dann ist die Ruhelage c asymptotisch stabil.

(ii) Existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass einer folgenden drei

Fälle zutrifft (1) $g(y) < 0 \forall y \in]c-\varepsilon, c[$, $g(y) > 0 \forall y \in]c, c+\varepsilon[$



(2) $g(y) < 0$ " " $g(y) < 0$ "



(3) $g(y) > 0$ " " $g(y) > 0$ "



dann ist die Ruhelage c instabil.

ii) Existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset I$, so dass
 $g(y) > 0$ für alle $y \in]c-\varepsilon, c[$ und $g(y) < 0$ für alle $y \in]c, c+\varepsilon[$.

Bew. zu i) Sei $p \in]c, c+\varepsilon[$ und $\varphi_p: J_p \rightarrow \mathbb{R}$ die
eind. best. max. Lsg. von $y' = g(y)$ mit dem Def.-bereich
 $D =]c, c+\varepsilon[$ und $\varphi_p(0) = p$. Da $g(\varphi_p(t)) \forall t \in J_p$
negativ ist, ist φ_p streng monoton fallend. Betrachte die
Tragkurve $T(p) = T(\varphi_p) \subseteq D$ sowie den Wert $x_p = \inf T(p)$.
Ang. $x_p > c$. Dann liegt $T^+(p)$ in einem kompakten Teilbereich
von D , und aus Satz 7.6 folgt, dass $+\infty$ das rechte Inter-
vallende von J_p ist. außerdem: $g(x_p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(\varphi_p(t))$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p'(t) = 0$ $\wedge$ zu $g(x_p) < 0$ also
 $x_p = c \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p(t) = c$ Genauso zeigt man, dass

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p(t) = c$ für alle $p \in]c-\varepsilon, c[$ gilt

Insgesamt ist c damit attraktiv und somit
nach Satz 8.4 auch asymptotisch stabil.
zu ii) weitgehend analog $\square$

Betrachte nun ein parameterab System

$$y' = f(y, \alpha)$$

wobei f stetig diff'bar auf einer offenen
Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Ziel: Untersuchung des Verhaltens der

Einlagen von $y'_\alpha = f_\alpha(y)$ in Abhängigkeit vom Parameterwert α

Def. 9.8 Sei (x_0, α_0) eine Ruhelage des Systems $y' = f_{\alpha_0}(y)$. Existieren offene Intervalle I, J mit $I \times J \subseteq D$, $x_0 \in I$ und $\alpha_0 \in J$ und besitzt das System $y' = f_\alpha(y)$ für jedes $\alpha \in J$ nur eine ^{in I} Ruhelage, dann bezeichnet man die Ruhelage als unverzweigt.
Andert sich dagegen die Anzahl der Ruhelagen in I in Abhängigkeit von α für bel. kleines J um α_0 , dann nennt man (x_0, α_0) eine verzweigte Ruhelage.

Bsp: $y' = \alpha y - y^3 = y(\alpha - y^2)$ auf $D = \mathbb{R}^2$

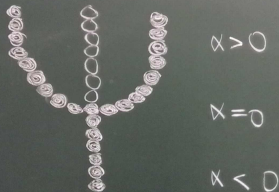
- Für $\alpha = 0$ gibt es genau eine Ruhelage, diese ist asymptotisch stabil. $[y' = -y^3]$
 $\rightarrow \overset{\circ}{0} \leftarrow$

- Für $\alpha < 0$ gibt es ebenfalls genau eine asymptotisch stabile Ruhelage. $[y' = y(\alpha - y^2)]$

- Für $\alpha > 0$ gibt es jeweils drei Ruhelagen, nämlich $-\sqrt{\alpha}$, 0 , $+\sqrt{\alpha}$. Dabei sind $\pm\sqrt{\alpha}$ asymptotisch stabil, und 0 ist instabil.

$$[y' = y(\underbrace{\alpha - y^2}_{< 0 \ \forall y})] \rightarrow \underbrace{-\sqrt{\alpha}}_{-} \leftarrow \overset{\circ}{0} \rightarrow \underbrace{+\sqrt{\alpha}}_{+} \leftarrow$$

Verzweigungsdiagramm



- = asymptotisch stabile Ruhelage
- = instabile Ruhelage

Dieser Typ von Verzweigungen wird als Hengabel-Verzweigung bezeichnet.