

Erinnerung: Fluss eines Systems von DGL

$D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung

Für jedes $(a, b) \in D$ sei $\varphi_{a,b}: I_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutige maximale Lösung von $\boxed{y' = f(x, y)}$ mit $\varphi_{a,b}(a) = b$.

Betrachte in $\mathbb{R}^{n+2}$ die Teilmenge

$$D = \{ (t, a, b) \in \mathbb{R} \times D \mid t \in I_{a,b} \}$$

und die Funktion $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, a, b) \mapsto \varphi_{a,b}(t)$

Dies ist der Fluss des Systems $y' = f(x, y)$.

Ziel in § 9 . D ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+2}$
und Φ ist eine stetige Funktion auf D

Definition (9.1)

- Ein **parameterabhängiges System von Differenzialgleichungen** ist eine Gleichung der Form

$$y' = f(x, y, \alpha) \quad ,$$

wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n+m}$ bezeichnet, mit $m, n \in \mathbb{N}$.

- Als **parameterabhängiges Anfangswertproblem (PAWP)** bezeichnen wir ein Paar bestehend aus einem parameterabhängigen System von DGLs und einem Punkt $(a, b, \alpha) \in D$.

Definition (9.2)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition (9.1) gewählt. Wir sagen, das parameterabhängige System von DGLs **erfüllt die Standardvoraussetzungen**, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $f_\alpha : D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert auf $D_\alpha = \{(x, y) \mid (x, y, \alpha) \in D\}$ durch $f_\alpha(x, y) = f(x, y, \alpha)$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt.

Bem. geg. eine Gl $y' = f(x, y, \alpha)$
wie in Definition 9.1

Dann definieren wir für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^m$
in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die offene Teilmenge

$$D_\alpha = \{(x, y) \mid (x, y, \alpha) \in D\}$$

und die Funktion $f_\alpha : D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$(x, y) \mapsto f(x, y, \alpha)$. Dann ist

$$y' = f_\alpha(x, y)$$

ein System von DGLs im ursprünglichen
Sinn, mit D_α als Definitionsbereich.

Für jedes $(a, b, \alpha) \in D$ erhält man durch
 $y' = P_\alpha(x, y)$ und den Punkt $(a, b) \in D_\alpha$ (*)
ein Anfangswertproblem im herkömmlichen Sinn.

Notation Erfüllt das parameterabh.
System die Standardvoraussetzungen, dann
bezeichne $\varphi_{a,b,\alpha} : I_{a,b,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$
die eindeutig bestimmte maximale Lösung von (*).

Definition (9.3)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition (9.1) gewählt. Als das dem PAWP **zugeordnete parameterunabhängige AWP** bezeichnen wir das Paar bestehend aus der Gleichung

$$(y', z') = g(x, y, z)$$

und dem Punkt (a, b, α) , wobei die Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben ist durch die beiden Komponenten $g_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $g_1(x, y, z) = f(x, y, z)$ und $g_2(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Satz (9.4)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition (9.1) gewählt.
Insbesondere sei (a, b, α) ein beliebig vorgegebener Punkt.

- (i) Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des PAWPs, dann ist die Funktion $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben durch $\psi(t) = (\varphi(t), \alpha)$ eine Lösung des zugeordneten parameterunabhängigen AWP.
- (ii) Ist umgekehrt $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ eine Lösung des zugeordneten parameterunabhängigen AWP, und bezeichnen $\psi_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Komponenten von ψ , dann ist ψ_1 eine Lösung des ursprünglichen PAWPs.

Beweis von Satz 9.4:

geg. parameterabh. System $y' = f(x, y, \alpha)$
wobei f definiert auf $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n+m}$ offen
und ein Punkt (a, b, α)

zugeordnetes parameter-unabh. System

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x, y, \alpha) \\ g_2(x, y, \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $g_1: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_2: D \rightarrow \mathbb{R}^m$

zu 1) geg. Lsg $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des PAWP

$$\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, t \mapsto (\varphi(t), \alpha)$$

Es gilt $\psi(a) = (\psi(a), x) = (b, x) \rightarrow$

(*) Lsg ψ läuft durch den Punkt (a, b, x)

Sinn.

$$\begin{aligned}\text{au\sserdem: } \psi'(t) &= (\psi'(t), 0) = \\ &= (f(t, \psi(t), x), 0) = (g_1(t, \psi(t), x), g_2(t, \psi(t), x)) \\ &= g(t, \psi(t)) \quad \forall t \in I\end{aligned}$$

ang

(*) zu ii) Sei $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ eine Lsg. des parameter-unabh. AWP, d.h. $\psi'(t) = g(t, \psi(t)) \quad \forall t \in J$ und $\psi(a) = (b, x)$. Sei $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Fkt bestehend aus den ersten n Komponenten von ψ und $\psi_2: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ die aus den letzten m Komponenten.
 $\Rightarrow (\varphi'(t), \psi_2'(t)) = (g_1(t, \varphi(t), \psi_2(t)), g_2(t, \varphi(t), \psi_2(t)))$

$$= (f(t, \varphi(t), \varphi_2(t)), 0), \text{ und } (\varphi(a), \varphi_2(a)) = \varphi(a)$$

$$= (b, \alpha) \quad \varphi(a) = \varphi_2(a) = b, \quad \varphi_2'(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

$\Rightarrow \varphi_2$ ist auf J konstant gleich b einsetzen und

Betrachtung der ersten n -Komponenten: $\varphi'(t) =$

$$f(t, \varphi(t), \varphi_2(t)) = f(t, \varphi(t), \alpha) \quad \text{Also ist } \varphi \text{ eine Lösung}$$

des PAWP geg. durch $y' = f(x, y, \alpha)$ und (a, b, α) $\square$

Folgerung (9.5)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition (9.1) gewählt, und sei $(y', z') = g(x, y, z)$ das zugeordnete parameterunabhängige System von DGLs wie in Definition (9.3). Dann besitzt das AWP gegeben durch dieses System und einen beliebig gewählten Punkt $(a, b, \alpha) \in D$ jeweils eine **eindeutig bestimmte maximale** Lösung.

Beweis von Folgerung 9.5.

gegeben sei das parameter unabh. System $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix}^{(*)}$
das einem parameterabh. System $y' = f(x, y, \alpha)$ zugeordnet ist
und $(a, b, \alpha) \in D$ ($D = \text{Def.-B von } f$). z.zg.: Es gibt eine
eindeut. best. ^(maximale) Lsg. ψ von $(*)$ mit $\psi(a) = (b, \alpha)$.

Sei $\varphi: I_{a,b,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die (eindeut. best.) maximale Lsg. von

$y' = f_{\alpha}(x, y)$ Satz 9.4 (i) $\Rightarrow \psi: I_{a,b,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$

$t \mapsto (\varphi(t), \alpha)$ ist eine Lösung von $(*)$ mit $\psi(a) = (b, \alpha)$.

Ang. die Lösung ist nicht maximal $\Rightarrow \exists J \not\supset I_{a,b,\alpha}$ und eine

Lsg. $\tilde{\varphi}: J \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{\varphi}|_J = \psi$ Satz 9.4 (ii) $\Rightarrow$ Die
ersten n Komponenten von $\tilde{\varphi}$ liefern eine Lsg. von $(**)$ mit einem echt
größeren Intervall als $I_{a,b,\alpha}$ ∇ zu Maximalität. Die Eindeutigkeit

... ergibt sich ebenso aus der Eindeutigkeit der Lösung von
 $y' = f_{\alpha}(x, y)$ und Satz 9.4.

Sei $y' = f(x, y, \alpha)$ ein parameterabh. System wie in Def 9.1, das außerdem die Standardvor. erfüllt.

Definiere $D \subseteq \mathbb{R}^{2+n+m}$ durch

$$D = \{(t, a, b, \alpha) \in \mathbb{R} \times D \mid t \in I_{a, b, \alpha}\}$$

und $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \varphi_{a, b, \alpha}(t)$, wobei

$\varphi_{a, b, \alpha} : I_{a, b, \alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eind. best. maximale Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi_{a, b, \alpha}(a) = b$

Es ist Φ der Fluss des parameterabh. Systems $y' = f(x, y, \alpha)$

Ebenso können wir dem zugeordneten parameterunabh.
System $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix}$

einen Fluss zuordnen, mit demselben Def.-bereich D und
der Flkt. $\Psi: D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $(t, a, b, \alpha) \mapsto \varphi_{a, b, \alpha}(t)$

Vereinfachung der Notation:

- Fasse $(b, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ zu einem Punkt $c \in \mathbb{R}^{n+m}$ zusammen.
- $\varphi_{a, c}$ = eind. best. maximale Lösung mit $\varphi_{a, c}(a) = c$.
- Schreibe das System stattd. $(y', z') = g(x, y, z)$ in der Form $y' = f(x, y)$, d.h. (y, z) wird zu einer Variablen zusammengefasst.
- Der Fluss hat dann die Form $\Psi: D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $(t, a, c) \mapsto \varphi_{a, c}(t)$

Def. Als Zylinderumgebung eines Punktes $(a, c) \in D$ bezeichnen wir eine Menge der Form $Z_{\tau, r}(a, c) = [a - \tau, a + \tau] \times \bar{B}_r(c)$ wobei $\tau, r \in \mathbb{R}^+$ ebenso

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{\tau, r}(a, c) &= [a - \tau, a + \tau] \times Z_{\tau, r}(a, c) \\ &= [a - \tau, a + \tau]^2 \times \bar{B}_r(c)\end{aligned}$$

Auch eine solche Menge bezeichnen wir als Zylinderumgebung. beachte:

$$Z_{\tau, r}(a, c) \subseteq \mathbb{R}^{1+n+m}$$

$$\hat{Z}_{\tau, r}(a, c) \subseteq \mathbb{R}^{2+n+m}$$

Satz (9.6)

Sei $y' = f(x, y, \alpha)$ ein parameterabhängiges System wie in Definition (9.1), das den Standardvoraussetzungen genügt. Sei $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der zugeordnete Fluss. Dann ist $\mathcal{D}$ eine **offene** Teilmenge von $\mathbb{R}^{2+n+m}$, und die Funktion Φ ist **stetig**.

Beweis von Satz 9.6

geg. parameterabh. System $y' = f(x, y, \alpha)$
das den Standardvor. genügt

$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ zugeordneter Fluss

Beh.: $D \subseteq \mathbb{R}^{2+n+m}$ ist offen und Φ stetig

Betrachte statt dessen das parameterunabh.
System $y' = g(x, y)$ (wobei y $(n+m)$ -dim.)

Es genügt zu zeigen, dass der Fluss Ψ dieses
Systems stetig ist, da Φ aus den ersten n
Komponenten von Ψ besteht (siehe Satz 9.4).

1. Hilfsaussage:

Für jedes $(a, c) \in D$ gibt es $\tau, r \in \mathbb{R}^+$ mit $Z_{\tau, r}(a, c) \subseteq Z_{\tau, 2r}(a, c) \subseteq D$, so dass für alle $(b, d) \in Z_{\tau, r}(a, c)$ die Lsg $\varphi_{b, d}$ auf $[a - \tau, a + \tau]$ existiert und $Z_{\tau, 2r}(a, c)$ nicht ver-
löst.

2. Hilfsaussage:

Für jedes $(a, a, c) \in D$ gibt es $\tau, r \in \mathbb{R}^+$, so dass $\hat{Z}_{\tau, r}(a, c) \subseteq D$ und $\mathcal{I}$ auf $\hat{Z}_{\tau, r}(a, c)$ stetig ist.

Zeige zunächst: Aus den beiden Hilfsaussagen
folgt unsere Behauptung.

U = System aller offenen Teilmengen $U \subseteq D$
so dass $\Psi|_U$ stetig ist

Beweisziel: $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ stimmt mit D überein

(daraus folgt die Beh. unmittelbar)

Widerspruchannahme: Es gibt einen Punkt

$(t_0, a_0, c_0) \in D \setminus V$. O.B.d.A. $t_0 < a_0$, denn

im Fall $t_0 > a_0$ läuft der Beweis analog und im

Fall $t_0 = a_0$ gilt lt. 2. Hilfsaussage

$\hat{Z}_{\tau, r}(a_0, c) \subseteq D$ für geeignete $\tau, r \in \mathbb{R}^+$

Ψ ist stetig auf $\hat{Z}_{\tau,r}(a_0, c)$, und es gilt $(t_0, a_0, c) =$
 $(a_0, a_0, c) \in \hat{Z}_{\tau,r}(a_0, c) \quad \nmid \quad \exists (t_0, a_0, c) \notin V$