

Satz (8.11)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die verschiedenen **komplexen Eigenwerte** der Matrix. Das System $y' = Ay$ ist genau dann

- (i) **stabil**, falls $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ für $1 \leq j \leq m$ gilt und außerdem für jeden Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ die algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils übereinstimmen;
- (ii) **asymptotisch stabil**, falls $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für $1 \leq j \leq m$ erfüllt ist.

Satz (8.14)

Gegeben sei ein autonomes System der Form

$$y' = Ay + r(y) \quad ,$$

bestehend aus einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $r : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert auf einer offenen Nullumgebung $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $r(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $r'(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}}$.
Besitzt die Matrix A nur Eigenwerte mit **negativem Realteil**,
so ist die Ruhelage $0_{\mathbb{R}^n}$ des Systems **asymptotisch stabil**.

Bem. Satz 8.14 kann nicht verwendet werden, um nachzuweisen, dass im physikalischen Beispiel die Ruhelage mit dem minimalen Energiewert (nach unten hängendes Pendel) stabil ist, denn:

Das zugeordnete System erster Ordnung war

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -\sin(y_1)$$

lineare Näherung: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1$ d.h.

$$y' = A y \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte $\pm i$ von A haben Realteil null.

$\rightarrow$ Satz 8.14 nicht anwendbar

Definition (8.15)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ wird **Lyapunov-Funktion** zu $y' = f(y)$ genannt, wenn

$$\langle (\nabla V)(y), f(y) \rangle \leq 0$$

für alle $y \in D$ erfüllt ist.

Jede **Erhaltungsgröße** eines autonomen Systems ist eine Lyapunov-Funktion, insbesondere jede Hamilton-Funktion.

Lemma (8.16)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zu $y' = f(y)$. Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des autonomen Systems, dann ist die Funktion $V \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ **monoton fallend**.

Satz (8.17)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zu $y' = f(y)$. Ist $c \in D$ mit $f(c) = V(c) = 0$ und $V(y) > 0$ für alle $y \in D \setminus \{c\}$, dann ist c eine **stabile Ruhelage** von $y' = f(y)$.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte $\pm i$ von A haben Realteil null

Beweis von Lemma 8.16 :

Ist $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Systems, dann gilt
für alle $t \in I$ $(V \circ \varphi)'(t) = V'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) =$

$$\langle (\nabla V)(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \langle (\nabla V)(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle \leq 0$$

$\Rightarrow V \circ \varphi$ ist auf I monoton fallend.

□

Beweis von Satz 8.17:

V Lyapunov-Fkt. $\Rightarrow \langle (\nabla V)(p), f(p) \rangle \leq 0$

für alle $p \in D$

geg. $c \in D$ mit $f(c) = V(c) = 0$ und $V(p)$

> 0 für alle $p \in D \setminus \{c\}$

zzg: c ist eine stabile Ruhelage des Systems

Sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\overline{B}_r(c) \subseteq D$ und

$\varepsilon \in]0, r]$ Maximumprinzip $\Rightarrow$

V nimmt auf $S_\varepsilon = \{y \in D \mid \|y - c\| = \varepsilon\}$

ein positives Minimum $m(\varepsilon)$ an

Stetigkeit von V , ε - δ -Kriterium $\rightarrow$

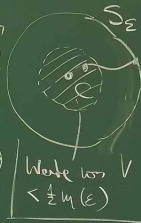
$\exists \delta(\varepsilon) \in]0, \varepsilon[$, so dass $V(y) \in [0, \frac{1}{2}m(\varepsilon)]$
für alle $y \in D$ mit $\|y - c\| < \delta(\varepsilon)$

Sei $v \in D$ mit $\|v - c\| < \delta(\varepsilon)$.
Werte von $V \geq m(\varepsilon)$

Sei φ_v die ^{max} eind. best. Lösung

(definiert auf $I_v \subseteq \mathbb{R}$) von $y' = f(y)$

mit $\varphi_v(0) = v$ zu zeigen:



$\varphi_v(t)$ ist für alle $t \geq 0$ definiert, und

$$\|\varphi_v(t) - c\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Es genügt $\|\varphi_v(t) - c\| < \varepsilon$ für alle $t \in I_v$ zu zeigen, denn dann verläuft $(\varphi_v(t))$ für alle $t \in I_v$ mit $t \geq 0$ in einer kompakten Teilmenge von

(2) D., und aus Satz 7.6 (ii) folgt, dass I_v nach rechts unbeschränkt ist.

Ang. es gibt ein $s \in I_v$ mit $\varphi_v(s) \notin \overline{B}_\varepsilon(c)$.

Stetigkeit von $t \mapsto \|\varphi_v(t) - c\|$, Zwischenwertsatz

$\Rightarrow \exists t_1 \in I_v$ mit $t_1 > 0$ und $\|\varphi_v(t_1) - c\| = \varepsilon$

$\{t \in I_v \mid t \geq 0, \|\varphi_v(t) - c\| = \varepsilon\}$ ist wie nach unten beschr. Teilmenge von $\mathbb{R}$, hat also ein Minimum t_0

$\Rightarrow \|\varphi_v(t) - c\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in [0, t_0]$ und

$\|\varphi_v(t_0) - c\| = \varepsilon$ Lemma 8.16 $\Rightarrow t \mapsto V(\varphi_v(t))$ ist

monoton fallend $\Rightarrow u(\varepsilon) \leq V(\varphi_v(t_0)) \leq V(\varphi_v(0))$

$= \varphi(v) \leq \frac{1}{2} u(\varepsilon) \quad \nmid$

□

Definition (8.18)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine Teilmenge $M \subseteq D$ wird bezüglich $y' = g(y)$

- (i) **positiv invariant** genannt, wenn für jedes $v \in M$ auch die positive Halbtrajektorie $T^+(v)$ in M enthalten ist,
- (ii) **negativ invariant**, wenn für jedes $v \in M$ auch die negative Halbtrajektorie $T^-(v)$ in M enthalten ist, und
- (iii) **invariant**, wenn für jedes $v \in M$ die gesamte Trajektorie $T(v)$ in M liegt.

zur Stabilität der Ruhelage des Pendels:

Für die Anwendung von Satz 8.17 genügt es,
auf einer positiv invarianten Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$

eine Lyapunov-Fkt. zu definieren. Wir verwenden
dafür die Hamilton-Funktion H . Definiere

$$M = \bigcup_{c \in [-1, 1]} T_c = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < y_1 < \pi, \frac{1}{2} y_2^2 - \cos(y_1) < 1 \}$$

ist positiv invariant, da jede Lsg. φ_v mit $v \in T_c$
sich vollständig in T_c bewegt

$y' = (P|M)(y)$ erfüllt die Voraussetzungen von
Satz 8.17 für $c = (0, 0) \Rightarrow (0, 0)$ ist stabile Ruhelage

Satz (8.19)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zum autonomen System $y' = f(y)$. Sei $c \in D$ ein Punkt mit folgenden Eigenschaften.

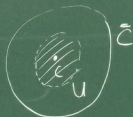
- $f(c) = V(c) = 0$
- $V(y) > 0$ und $\langle (\nabla V)(y), f(y) \rangle < 0$ für alle $y \in D \setminus \{c\}$

Dann ist c eine **asymptotisch stabile Ruhelage** von $y' = f(y)$.

Beweis von Satz 8.19

Satz 8.17 $\Rightarrow c$ ist eine stabile Ruhelage

$\bar{C}$ = kompakte Umgebung von c



Stabilität von $c \Rightarrow \exists$ offene Umg. U von c , so dass für alle $v \in U$ die $\sup_{t \geq 0}$ Lsg. $\varphi_v: I_v \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_v(0) = 0$

für alle $t \geq 0$ definiert ist und $\varphi_v(t) \in \bar{C} \quad \forall t \geq 0$ erfüllt ist

Setze $h_v = V \circ \varphi_v \quad \forall v \in U$. Lemma 8.16 $\Rightarrow h_v$ mon. fallend

außerdem $\{h_v(t) \mid t \geq 0\}$ nach unten durch 0 beschränkt

Bezeichne mit $\inf$ deren Infimum.

außerdem $|h_v(t)| \mid t \geq 0$ nach unten durch 0 beschränkt

Definiere $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(v) = u_v \quad \forall v \in U$.

Beh. $\varphi(v) \leq 0 \quad \forall v \in U$ (gleichbed.: $\varphi(v) = 0 \quad \forall v \in U$) (*)

Ang., es gibt ein $v \in U$ mit $\varphi(v) > 0 \rightarrow V(\varphi_v(t)) \geq u_v > 0$
für alle $t \geq 0$. $V(\cdot) = 0 \rightarrow \exists$ offene Umg. W von $\cdot$ mit

$0 \leq V(y) < \varphi(v) \quad \forall y \in W \Rightarrow \varphi_v(t) \in \bar{C} \setminus W$ für alle $t \geq 0$.

(Ang. $\varphi_v(t) \in W$ für ein $t \geq 0 \rightarrow V(\varphi_v(t)) < \varphi(v) = u_v$

∇ zu $V(\varphi_v(t)) \geq u_v$.) $\bar{C} \setminus W$ kompakt, $y \mapsto$

$\langle (\nabla V)(y), f(y) \rangle$ stetig und negativ $\Rightarrow$ Fkt. nimmt auch

$\bar{C} \setminus W$ ein negatives Maximum μ an.

$\rightarrow$ erhalte $(V \circ \varphi_v)(t) - V(v) = (\nabla \circ \varphi_v)(t) - (V \circ \varphi_v)(0) =$

$$\int_0^t (V \circ \varphi)'(s) ds =$$

$$\varphi_r(s) \in \bar{C} \setminus W$$

$$\int_0^t \langle (\nabla V)(\varphi_r(s)), f(\varphi_r(s)) \rangle ds \leq$$

$$\int_0^t \mu ds = \mu t \rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (V \circ \varphi_r)(t) = -\infty \quad \text{da } V(y) \geq 0$$

für alle $y \in D \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$

Zeige nun: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_r(t) = c$

Angenommen, der Grenzwert existiert nicht
oder ist von c verschieden. $\rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

und eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$

und $\|\varphi_r(t_n) - c\| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\varphi_r(t_n) \in \bar{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Bolzano-W.}} (\varphi_r(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ be-
sitzt eine konvergente Teilfolge $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen
einen Punkt $d \neq c$ konvergiert. Es

$$\text{gilt } V(d) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\varphi_r(t_{n_k})) \stackrel{(*)}{=} 0$$

$\hookrightarrow$ da c die einzige Nullstelle von V ist

□

Satz (8.20)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zum autonomen System $y' = f(y)$. Sei $c \in D$ ein Punkt mit folgenden Eigenschaften.

- $f(c) = V(c) = 0$
- $\langle (\nabla V)(y), f(y) \rangle < 0$ für alle $y \in D \setminus \{c\}$
- In jeder Umgebung von c existiert ein $y \in D$ mit $V(y) < 0$.

Dann ist c eine **instabile Ruhelage** von $y' = f(y)$.

Beweis von Satz 8.20

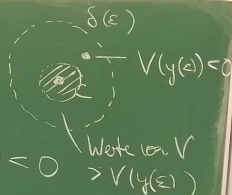
Annahme: c ist eine stabile Ruhelage

Stabilität $\Rightarrow$ Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(c) \subseteq D$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) \in]0, \varepsilon[$, so dass für jedes $v \in D$ mit $\|v - c\| < \delta(\varepsilon)$ jeweils $\varphi_v(t)$ für $t \geq 0$ definiert ist und $\|\varphi_v(t) - c\| < \varepsilon$ erfüllt wobei $\varphi_v: I_v \rightarrow \mathbb{R}^n$ max. Lsg. mit $\varphi_v(0) = v$

Vor. $\Rightarrow \exists y(\varepsilon) \in D$ mit $\|y(\varepsilon) - c\| < \delta(\varepsilon)$
und $V(y(\varepsilon)) < 0$ V stetig, $V(c) = 0 \Rightarrow$
 $\exists r(\varepsilon) \in]0, \delta(\varepsilon)[$ mit $V(y) > V(y(\varepsilon)) \forall y \in D$

$$16. \Rightarrow \exists y(\varepsilon) \in D \text{ mit } \|y(\varepsilon) - c\| < \delta(\varepsilon)$$

$$\text{mit } \|y - c\| < r(\varepsilon)$$



Lemma 8.16 $\Rightarrow$

$$V(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) \leq V(\varphi_{y(\varepsilon)}(0)) = V(y(\varepsilon)) < 0$$

$$\text{für alle } t \geq 0 \Rightarrow r(\varepsilon) \leq \|\varphi_{y(\varepsilon)}(t) - c\| \leq \varepsilon$$

$$\forall t \geq 0$$

Betrachte die Menge $A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid r(\varepsilon) \leq \|y - c\| \leq \varepsilon\}$, ist eine kompakte Teilmenge von D mit

$$\varphi_{y(\varepsilon)}(t) \in A \quad \forall t \geq 0.$$

Kompaktheit von A , Stetigkeit der negativen Fkt.

$$y \mapsto \langle (\nabla V)(y), f(y) \rangle \Rightarrow \exists \text{ negatives Maximum}$$

Bezeichne dies mit μ .

Da $\varphi_{y(\varepsilon)}(t)$ für $t \geq 0$ in A liegt, ergibt eine ähnliche Rechnung wie im Beweis von Satz 8.19

$$V(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) - V(y(\varepsilon)) \leq \mu t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (V(\varphi_{y(\varepsilon)}(t)) - V(y(\varepsilon))) = -\infty$$

Andererseits verläuft $\varphi_{y(\varepsilon)}(t)$ in der kompakten Menge A , auf der die stetige Fkt. V beschränkt ist. $\Downarrow$

Also ist die Ruhelage c nicht stabil □