

Definition der Übergangsmatrix

Definition (8.7)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : J \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion. Seien $t_0, t_1 \in J$ und $\Phi : J \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ das **Fundamentalsystem** von $y' = A(x)y$ mit $\Phi(t_0) = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix bezeichnet. Dann wird $\Lambda(t_1, t_0) = \Phi(t_1)$ die **Übergangsmatrix** des Systems $y' = A(x)y$ von t_0 nach t_1 genannt.

Satz (8.9)

Seien $A :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ und $g :]-\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Wir betrachten das lineare System von Differenzialgleichungen $y' = A(x)y + g(x)$.

- (i) Eine beliebige Lösung ψ des Systems ist genau dann stabil bzw. attraktiv, wenn die **Nulllösung** des homogenen Systems $y' = A(x)y$ stabil bzw. attraktiv ist.
- (ii) Ist die Lösung ψ attraktiv, dann ist sie auch stabil.

Auf Grund von Satz 8.9 ist es gerechtfertigt, von einem **stabilen linearen System** von Differenzialgleichungen zu sprechen, und ebenso von instabilen, attraktiven oder asymptotisch stabilen Systemen.

Satz (8.10)

Sei $A :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion. Für alle $t, t' \in]\alpha, +\infty[$ sei $\Lambda(t', t)$ jeweils die Übergangsmatrix zum homogenen System $y' = A(x)y$.

- (i) Das System ist genau dann stabil, wenn für jedes $a > \alpha$ ein $\beta = \beta(a) \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|\Lambda(t, a)\| \leq \beta$ für alle $t \geq a$ erfüllt ist.
- (ii) Das System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t, a) = 0$ für alle $a > \alpha$ gilt.

Satz (8.11)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die verschiedenen **komplexen Eigenwerte** der Matrix. Das System $y' = Ay$ ist genau dann

- (i) **stabil**, falls $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ für $1 \leq j \leq m$ gilt und außerdem für jeden Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ die algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils übereinstimmen;
- (ii) **asymptotisch stabil**, falls $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für $1 \leq j \leq m$ erfüllt ist.

Beweis von Satz 8.11 (Abschluss)

Bereits gesehen: Es gibt ein Fundamentalsystem Φ für $y' = Ay$, dass sich folgendermaßen zusammensetzt:

- Für jeden reellen Eigenwert λ_j gibt es ein Tupel von Lsg. $(\varphi_{j,0}, \dots, \varphi_{j,r_j-1})$ ($r_j = \text{alg. Vlt.h. von } \lambda_j$) gegeben durch

$$\varphi_{j,k}(t) = e^{\lambda_j t} p_{j,k}(t), \text{ wobei } p_{j,k}(t) = \text{Polynom fkt. von}$$

Grad $\leq k$, für $0 \leq k \leq r_j - 1$.

- Für jedes Paar $(\lambda_j, \bar{\lambda}_j) = (\lambda_j, \overline{\lambda}_j)$ von nichtreellen Eigenwerten mit $a_j = \operatorname{Re}(\lambda_j)$, $b_j = \operatorname{Im}(\lambda_j)$ existiert ein Tupel von Lsg.

$(\psi_{j,0}, \phi_{j,0}, \dots, \psi_{j,r_j-1}, \phi_{j,r_j-1})$ der Form

$$\psi_{j,k}(t) = e^{a_j t} (\cos(b_j t) u_{j,k}(t) - \sin(b_j t) v_{j,k}(t))$$

$$\phi_{j,k}(t) = e^{a_j t} (\cos(b_j t) v_{j,k}(t) + \sin(b_j t) u_{j,k}(t))$$

wobei $u_{j,k}(t), v_{j,k}(t)$ Polynomfkt von Grad $\leq k, 0 \leq k \leq r_j - 1$

Dabei sind $p_{j,k}(t), u_{j,k}(t), v_{j,k}(t)$ jeweils genau dann alle von Grad 0, wenn r_j auch die geom. Vielfachheit des Eigenwerts ist

Nachweis der Äquivalenzen:

- Es gilt $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ und $r_j = \text{geom. Vlf.}$ ein Fall $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$
für alle j genau dann, wenn $\Phi(t)$ beschränkt ist.

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $T_a \in GL_n(\mathbb{R})$ mit

$$\Lambda(t, a) = \Phi(t) T_a \quad (\text{weil } \Phi \text{ und } t \mapsto \Lambda(t, a) \text{ beiderseits Fund.})$$

mentalsysteme sind). Die Bed. an die Eigenwerte ist also äquivalent zur Beschränktheit von $t \mapsto \Lambda(t, a)$, und dies ist nach Satz 8.10 äquivalent zur Stabilität von $y' = Ay$.

- Es gilt $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ für alle j genau dann, wenn $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 0$ gilt. Die restliche Argumentation läuft wie beim vorherigen Punkt.



Folgerung (8.12)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 8.11 gewählt.

- Dann existiert unter der Voraussetzung (i) des Satzes eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $M \geq 1$, so dass $\|e^{tA}\| \leq M$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist.
- Unter der Voraussetzung (ii) gibt es Konstanten $K, \alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.

Folgerung (8.13)

Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine ω -periodische stetige Funktion. Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine 2ω -periodische stetig differenzierbare Funktion und $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine Matrix wie in **Satz 6.12**. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von B .

Das System $y' = A(x)y$ ist genau dann

- (i) **stabil**, falls $\mathrm{Re} \lambda_j \leq 0$ für $1 \leq j \leq m$ gilt und außerdem für jeden Eigenwert λ_j mit $\mathrm{Re} \lambda_j = 0$ die algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils übereinstimmen;
- (ii) **asymptotisch stabil**, falls $\mathrm{Re} \lambda_j < 0$ für $1 \leq j \leq m$ erfüllt ist.

Beweis von Folgerung 8.13

Satz 6.12 $\Rightarrow$ $\exists$ Fundamentalsystem $\Phi(t) = p(t) e^{tB}$

wobei $p, B \in M_{n, \mathbb{R}}$ wie angegeben

p stetig $\Rightarrow \exists$ Konstanten $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^+$ mit (*)

$$\|p(t)\| \leq M_1 \text{ und } \|p(t)^{-1}\| \leq M_2 \quad \forall t \in [0, 2\omega] \quad \approx$$

Da p 2ω -periodisch ist, gelten die Ungl. für

$$\text{alle } t \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\Phi(t)\| \leq M_1 \|e^{tB}\| \text{ und}$$

$$\|e^{tB}\| \leq M_2 \|\Phi(t)\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

zuli) $y' = By$ stabil $\stackrel{8.11}{\Leftrightarrow}$ Eigenw. erfüllen die Bed. II

$y' = By$ stabil $\stackrel{8.10}{\Leftrightarrow} t \mapsto \|y(t)\|$ ist beschr.

für ein (und damit jedes) Fund.-system $\leftarrow$

$t \mapsto \|e^{tB}\|$ beschr. $\stackrel{(*)}{\iff} t \mapsto \|\Phi(t)\|$

ist beschränkt $\iff y' = A(x)y$ ist stabil

ausgesagt. Eigenw. erfüllen die Bed (i)

$(*) \iff y' = A(x)y$ ist stabil

zu (ii) weitgehend analog zu (i)

□

Beispiel

Betrachte für $x \in \mathbb{R}$ das System

$$x' = x \sin(x) + y + xy^3$$

$$y' = -x \cos(y) + x(e^y - 1)$$

Der Punkt $(0,0)$ ist eine Ruhelage des Systems.

Frage: Ist $(0,0)$ stabil?

Ansatz: $\sin(x) \approx x$, $\cos(y) \approx 1$, $e^y \approx 1 + y$

Betrachte das „genäherte“ autonome System

$$x' = xx + y, \quad y' = -x + xy$$

in Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y' \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \end{pmatrix}$$

Eigenwerte der Matrix $\alpha \pm i$, alg und geom. Vielfachheit jeweils 1 $\Rightarrow$ Nach Satz 8.11 ist das geäußerte System asymptotisch stabil für $\alpha < 0$, stabil für $\alpha = 0$, instabil für $\alpha > 0$. Frage: läßt sich dieses Ergebnis auf das ursprüngliche System übertragen?

Satz (3.15)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebige Konstanten und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\varphi(t) \leq \alpha + \gamma \int_a^t \varphi(s) ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann gilt $\varphi(t) \leq \alpha \exp(\gamma|t - a|)$ für alle $t \in I$.

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $x, y \in U$ jeweils die Abschätzung

$$\|f(x) - f(y)\|_{\infty} \leq \kappa \|x - y\|_{\infty} \quad ,$$

wobei $\kappa \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante mit $\|f'(x)\| \leq \kappa$ für alle $x \in U$ bezeichnet und $\|f'(x)\|$ jeweils für die **Zeilensummennorm** der Jacobi-Matrix $f'(x) \in \mathcal{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$ steht.

Satz über linearisierte asymptotische Stabilität

Satz (8.14)

Gegeben sei ein autonomes System der Form

$$y' = Ay + r(y) \quad ,$$

bestehend aus einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $r : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert auf einer offenen Nullumgebung $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $r(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $r'(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}}$.
Besitzt die Matrix A nur Eigenwerte mit **negativem Realteil**,
so ist die Ruhelage $0_{\mathbb{R}^n}$ des Systems **asymptotisch stabil**.

Beweis von Satz 8.14 $y' = Ay + r(y)$

wobei $r(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$, $r'(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{M_{n,\mathbb{R}}}$

Vor: Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.

Schritt 1: Einführung von Konstanten

- Folgerung 8.12 $\Rightarrow \exists k, \alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $k \geq 1$
und $\|e^{tA}\| \leq k e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$
- Wähle ein $M \in \mathbb{R}^+$ mit $M < \frac{\alpha}{k}$ ($\Rightarrow kM - \alpha < 0$)
- r' stetig $\Rightarrow \exists \rho \in \mathbb{R}^+$ mit $\overline{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n}) \subseteq D$
und $\|r'(x)\| \leq M \quad \forall x \in \overline{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$

Schrankenatz $\Rightarrow \|r(x)\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in \bar{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$

- Für jedes $v \in \bar{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$ setze $t_0(v) = \sup\{t_1 \in I_v \mid$
 $\| \varphi_v(t) \| \leq \rho \quad \forall t \in [0, t_1[\}$, wobei $\varphi_v: I_v \rightarrow \mathbb{R}^n$
Lösung des Systems mit $\varphi_v(0) = v$

Schritt 2: Nachweis von $\| \varphi_v(t) \| \leq K \|v\| e^{(KM-\kappa)t}$ für
alle $v \in \bar{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$ und alle $t \in [0, t_0(v)[$

Sei $v \in \bar{B}_\rho(0_{\mathbb{R}^n})$, φ_v ist Lsg. von $y' = Ay + r(\varphi_v(x))$

Variation der Konstanten $\Rightarrow \varphi_v(t) = e^{tA} v + \int_0^t e^{(t-s)A} r(\varphi_v(s)) ds$
 $\forall t \in [0, t_0(v)] \Rightarrow \| \varphi_v(t) \| \leq \dots$ (siehe Skript) $\dots \leq$
 $K e^{-\kappa t} \|v\| + \int_0^t K e^{\kappa(s-t)} M \| \varphi_v(s) \| ds$

$$\Rightarrow e^{xt} \|\varphi_v(t)\| \leq K \|v\| + KM \int_0^t e^{xs} \|\varphi_v(s)\| ds$$

$\forall t \in [0, t_0(v)]$ Gronwall'sches Lemma
(Satz 3.15), angew. auf $u(t) = e^{xt} \|\varphi_v(t)\|$

$$\Rightarrow e^{xt} \|\varphi_v(t)\| \leq K \|v\| e^{KMt} \quad \forall t \in [0, t_0(v)]$$

Dies ist äquiv. zu angeg. Abschätzung

Schritt 3: Abschluss des Beweises

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq \frac{\rho}{K}$, $t \in [0, t_0(v)]$

$$\Rightarrow \|\varphi_v(t)\| \leq \rho e^{(Kn - \kappa)t} < \rho \Rightarrow \text{Die gesamte}$$

positive Halbochse $T^+(v)$ liegt in

$\bar{B}_p(v) \subseteq D \xrightarrow{\text{Prop. 3.12}} T^+(v)$ in D relativ kompakt
 und beschränkt $\Rightarrow \varphi_v(t)$ definiert für alle $t \geq 0$
 also $t_0(v) = +\infty$. Außerdem zeigt die Abschätzung
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_v(t)\| = 0 \rightarrow$ Die Ruhelage ist attraktiv.

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, setze $\delta = \delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{K}, \frac{\rho}{K} \right\}$. Sei
 $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$, φ_v die zugehörige Lsg.
 s.o. $\Rightarrow \varphi_v$ definiert auf $\mathbb{R}_+$, und
 $\|\varphi_v(t)\| \leq K \frac{\varepsilon}{K} e^{(K\eta - \alpha)t} \leq \varepsilon$. Damit
 ist die Stabilität der Ruhelage nachgewiesen. $\square$

Betrachte noch einmal das Beispiel
von oben. Setze $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Dann hat das ursprüngliche System die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x, y) \text{ mit } f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r(x, y)$$

$$\text{und } r(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(\sin(x) - x) + x y^3 \\ (-x)(\cos(y) - 1) + \alpha(e^y - y - 1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r'(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(\cos(x)-1)+y^3 & 3xy^2 \\ 1-\cos(y) & x\sin(y)+\alpha(e^y-1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 8.14 $\Rightarrow$ Im Fall $\alpha < 0$ ist die Ruhelage $(0,0)$
stabil. (Für $\alpha = 0$ ist keine Aussage möglich.)