

Stabilität von Lösungen

Definition (8.1)

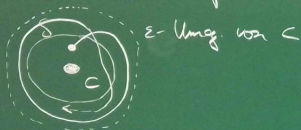
Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen eine Lösung $\varphi :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ als

- (i) **stabil**, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und jedes $a > \alpha$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass zu jedem Anfangswert $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ die maximale Lösung ϕ zum Anfangswert b für alle $t \geq a$ existiert und $\|\phi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq a$ gilt. Ansonsten wird die Lösung φ als **instabil** bezeichnet.
- (ii) **attraktiv**, wenn es für jedes $a > \alpha$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass zu jedem Anfangswert $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ die maximale Lösung ϕ zum Anfangswert b für alle $t \geq a$ existiert und

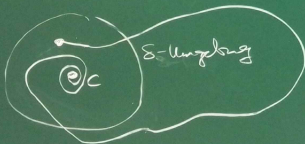
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t) - \varphi(t)\| = 0 \quad \text{erfüllt ist.}$$

- (iii) **asymptotisch stabil**, falls φ stabil und attraktiv ist.

- Verhalten von Lösungen bei einer stabilen Ruhelage c



- Verhalten von Lösungen bei einer attraktiven Ruhelage c



Die Differenzialgleichung der Störungen

Definition (8.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine **Lösung** von $y' = f(x, y)$. Weiter sei

$$D_\varphi = \{(x, y - \varphi(x)) \mid x \in J \wedge (x, y) \in D\}$$

und $f_\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f_\varphi(x, y) = f(x, y + \varphi(x)) - f(x, \varphi(x)).$$

Dann bezeichnen wir $y' = f_\varphi(x, y)$ als **Differenzialgleichung der Störungen** von φ .

Satz (8.6)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\varphi :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$. Dann besitzt die Differenzialgleichung der Störungen von φ die konstante Funktion **mit Wert null** als Lösung. Diese ist **genau dann stabil** bzw. attraktiv, wenn φ stabil bzw. attraktiv ist.

Beweis von Satz 8.6 (Fortsetzung)

$\varphi:]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösung. $y' = f_{\varphi}(x, y)$ (*) DGL der Störungen

$(a, b) \in D$ $\varphi_{(a,b)}$ Lösung von $y' = f(x, y)$ durch (a, b)

$(a, c) \in D_{\varphi}$ $\psi_{(a,c)}$ Lösung von (*) durch (a, c)

letztes Mal bereits gezeigt:

$$\bullet \psi_{(a,c)}(t) = \varphi_{a, c-\varphi(a)}(t) - \varphi(t) \quad \forall (a, c) \in D_{\varphi}$$

$$\bullet \varphi_{(a,b)}(t) = \psi_{a, b-\varphi(a)}(t) + \varphi(t) \quad \forall (a, b) \in D$$

Sei v_0 die konstante Nulllösung von (*).

zu zeigen: (1) φ stabil $\iff v_0$ stabil

(2) φ attraktiv $\iff v_0$ attraktiv

zu (1) " $\Rightarrow$ " Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > \alpha$.

Vor $\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$: $\forall b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ gilt jeweils $\|\varphi_{a,b}(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ für

alle $t \geq a$. Sei nun $c \in \mathbb{R}^n$ mit

$\|c\| < \delta \xRightarrow{\text{s.o.}} \varphi_{a,c}(t) = \varphi_{a,c+\varphi(a)}(t) - \varphi(t)$

und $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ für $b = c + \varphi(a)$

$\Rightarrow \|\varphi_{a,c}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq a$

$\Rightarrow v_0$ ist stabil

" $\Leftarrow$ " Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > \alpha$.

Vor $\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$: $\forall c \in \mathbb{R}^n$ mit $\|c\| < \delta$

$\|\varphi_{a,c}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq a$. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ mit

$\|b - \varphi(a)\| < \delta$. Setze $c = b - \varphi(a) \Rightarrow$

$\|c\| < \delta \Rightarrow \|\varphi_{a,c}(t) - \varphi(t)\| = \|\varphi_{a,c}(t)\| < \varepsilon$

für alle $t \geq a \Rightarrow \varphi$ ist stabil. $\square$

zu 1)

Δ

$\Phi(t)$

zu 11)

$\Rightarrow$

Sei

$\Phi(t_2)$

Definition der Übergangsmatrix

Definition (8.7)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : J \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion. Seien $t_0, t_1 \in J$ und $\Phi : J \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ das **Fundamentalsystem** von $y' = A(x)y$ mit $\Phi(t_0) = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix bezeichnet. Dann wird $\Lambda(t_1, t_0) = \Phi(t_1)$ die **Übergangsmatrix** des Systems $y' = A(x)y$ von t_0 nach t_1 genannt.

Proposition (8.8)

- (i) Ist $\Psi : J \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ ein beliebiges Fundamentalsystem, dann ist die Übergangsmatrix von t_0 nach t_1 durch $\Lambda(t_1, t_0) = \Psi(t_1)\Psi(t_0)^{-1}$ gegeben.
- (ii) Für alle $t_1, t_2, t_3 \in J$ gilt $\Lambda(t_3, t_1) = \Lambda(t_3, t_2)\Lambda(t_2, t_1)$.
- (iii) Ist $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung von $y' = A(x)y$, dann gilt $\varphi(t_2) = \Lambda(t_2, t_1)\varphi(t_1)$ für alle $t_1, t_2 \in J$.

Beweis von Proposition 8.8 :

geg $A : J \rightarrow M_{n, \mathbb{R}}$ stetig, $t_0 \in J$

$\Phi : J \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ Fund.-system mit $\Phi(t_0) = E$

zu (i) Sei Ψ ein beliebiges Fund.-system

(t) für $y' = A(x)y$. Dann gilt

$$\Phi(t) = \Psi(t) \Psi(t_0)^{-1}, \text{ denn}$$

$$\Psi(t_0) \cdot \Psi(t_0)^{-1} = E_n = \Phi(t_0), \text{ und}$$

Φ ~~ist~~ durch $\Phi(t_0)$ eindeutig bestimmt.

$\Rightarrow$ Für bel. $t_1 \in J$ halte

$$\Lambda(t_1, t_0) = \Phi(t_1) = \Psi(t_1) \Psi(t_0)^{-1}$$

zu (ii) Für bel. $t_1, t_2, t_3 \in J$ gilt

$$\Lambda(t_3, t_2) \cdot \Lambda(t_2, t_1) = \Phi(t_3) \cdot \Phi(t_2)^{-1} \cdot$$

$$\Phi(t_2) \cdot \Phi(t_1)^{-1} = \Phi(t_3) \cdot \Phi(t_1)^{-1} = \Lambda(t_3, t_1)$$

zu (iii) Sei φ eine bel. Lsg. Φ Fund.-system

$$\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi(t) = \Phi(t) \cdot v \quad \forall t \in J.$$

$$\text{Seien } t_1, t_2 \in J \Rightarrow \varphi(t_2) = \Phi(t_2) \cdot v =$$

$$\Phi(t_2) \cdot \Phi(t_1)^{-1} \cdot \Phi(t_1) \cdot v = \Lambda(t_2, t_1) \varphi(t_1) \quad \square$$

Satz (8.9)

Seien $A :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ und $g :]-\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Wir betrachten das lineare System von Differenzialgleichungen $y' = A(x)y + g(x)$.

- (i) Eine beliebige Lösung ψ des Systems ist genau dann stabil bzw. attraktiv, wenn die **Nulllösung** des homogenen Systems $y' = A(x)y$ stabil bzw. attraktiv ist.
- (ii) Ist die Lösung ψ attraktiv, dann ist sie auch stabil.

Auf Grund von Satz 8.9 ist es gerechtfertigt, von einem **stabilen linearen System** von Differenzialgleichungen zu sprechen, und ebenso von instabilen, attraktiven oder asymptotisch stabilen Systemen.

Beweis von Satz 8.9

Ψ Lsg. von $y' = A(x)y + g(x)$

zu li) z-zg. Ψ stabil $\Leftrightarrow$ Nulllösung v_0 von $y' = A(x)y$ ist stabil

Beh. Die DGL der Störung von Ψ ist geg. d. $y' = A(x)y$

Setze $f(x, y) = A(x)y + g(x)$ Sei f_Ψ definiert wie in

Satz 8.6. Dann ist $f_\Psi(x, y) = f(x, y + \Psi(x)) - f(x, \Psi(x))$

$$= A(x)(y + \Psi(x)) + g(x) - A(x)\Psi(x) - g(x) = A(x)y$$

Also folgt die Beh. direkt aus Satz 8.6.

Für die Eigenschaft „attraktiv“ läuft die Argumentation genauso.

Für die Eigenschaft „attraktiv“ läuft die Argumentation genauso.

zulii) Vor: Φ ist attraktiv z.zg: Φ ist stabil
genügt z.zg: v_0 ist stabil, unter der Vor. „ v_0 attraktiv“

Vor $\Rightarrow \forall a > 0 \exists \delta = \delta(a) \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle
 $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$ jeweils $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi_v(t)\| = 0$, wobei φ_v
die Lösung mit $\varphi_v(a) = v$ bezeichnet. $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t, a) v = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t, a) \varphi_v(a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_v(t) = 0$$

Wende dies an auf $v = \frac{1}{2} \delta e_j$ ($1 \leq j \leq n$) $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t, a) e_j = 2\delta^{-1} \lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t, a) (\tfrac{1}{2} \delta e_j) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t, a) = 0 \text{ bzgl. der Zeilensummen norm } \|\cdot\|$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a \geq a$ mit $\|\Lambda(t, a)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq a$. Steigbarkeit von $t \mapsto \|\Lambda(t, a)\|$ auf $[a, a_1]$ $\Rightarrow \exists \beta = \beta(a) \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\Lambda(t, a)\| \leq \beta \quad \forall t \geq a$.

Für geg. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > \alpha$ Sei nun $\beta = \beta(a)$ wie oben definiert und $\delta = \varepsilon \beta^{-1}$.

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$, erhalte:

$$\|\varphi_v(t)\| = \|\Lambda(t, a)v\| \leq \|\Lambda(t, a)\| \cdot \|v\|$$

$$\leq \beta \cdot \|v\| < \beta \cdot \delta = \beta \cdot \varepsilon \beta^{-1} = \varepsilon$$

für alle $t \geq a \Rightarrow x_0$ ist stabil $\square$

Satz (8.10)

Sei $A :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion. Für alle $t, t' \in]\alpha, +\infty[$ sei $\Lambda(t', t)$ jeweils die Übergangsmatrix zum homogenen System $y' = A(x)y$.

- (i) Das System ist genau dann stabil, wenn für jedes $a > \alpha$ ein $\beta = \beta(a) \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|\Lambda(t, a)\| \leq \beta$ für alle $t \geq a$ erfüllt ist.
- (ii) Das System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t, a) = 0$ für alle $a > \alpha$ gilt.

Beweis von Satz 8.10:

geg $y' = A(x)y$, $A:]a, +\infty[\rightarrow M_{n, \mathbb{R}}$ stetig

zu (i) z.zg. System stabil $\Leftrightarrow \forall \alpha > a \exists \beta = \beta(\alpha) \in \mathbb{R}^+$
 $\| \Delta(t, \alpha) \| \leq \beta \quad \forall t \geq \alpha$

Satz 8.9 $\Rightarrow$ Es genügt z.zg., dass die Nulllösung v_0 äquivalent zur Aussage rechts ist.

" $\Rightarrow$ " Vor: v_0 ist stabil $\Rightarrow \forall \alpha > a \exists \delta = \delta(\alpha)$
so dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq \delta$ jeweils

$\| \Delta(t, \alpha) v \| = \| \varphi_v(t) \| < 1 \quad \forall t \geq \alpha$, wobei φ_v

Lsg mit $\varphi_v(a) = v$ Anwendung auf $v = \frac{1}{2}\delta e_j$ für

$1 \leq j \leq n$ liefert ähnlich wie Beweis von Satz 8.9 (ii),

dass $\| \Delta(t, \alpha) \|$ für $t \geq \alpha$ durch eine von α abh.

hängende Konstante beschränkt ist

" $\Leftarrow$ " läuft genau wie im Bew. von 8.9 (ii)

zu (ii) genügt: v_0 asymptotisch stabil $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t, a) \stackrel{(*)}{=} 0$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a > \alpha$

" $\Rightarrow$ " v_0 asymptotisch stabil $\Rightarrow v_0$ attraktiv

Siehe Bew. von 8.9 $\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t, a) = 0 \quad \forall a \geq \alpha$

" $\Leftarrow$ " Setze $(*)$ voraus $\Rightarrow$ Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$\text{gilt } \|\varphi_v(t)\| = \|\Lambda(t, a)v\| \leq \|\Lambda(t, a)\| \cdot \|v\|$$

$$\forall t \geq a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_v(t) = 0, \text{ für jedes } v \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow v_0$ ist attraktiv Satz 8.9 (ii) $\Rightarrow v_0$ ist auch stabil, insgesamt asymptotisch stabil. $\square$

Satz (8.11)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die verschiedenen **komplexen Eigenwerte** der Matrix. Das System $y' = Ay$ ist genau dann

- (i) **stabil**, falls $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ für $1 \leq j \leq m$ gilt und außerdem für jeden Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ die algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils übereinstimmen;
- (ii) **asymptotisch stabil**, falls $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für $1 \leq j \leq m$ erfüllt ist.

Beweis von Satz 8.11:

geg. System $y' = Ay$ mit konstanten

Koeff., $A \in M_{n, \mathbb{R}}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ Eigenwerte von A (aufgefasst als Ekt. von $M_{n, \mathbb{C}}$)

r_j = algebraische Vielfachheit von λ_j ($1 \leq j \leq m$)

Satz 5.19 $\Rightarrow$ Für $1 \leq j \leq m$ gibt es ein

Tupel $(p_{j,0}, \dots, p_{j,r_j-1})$ von Lösungen der

Form $y_{j,k}(t) = e^{\lambda_j t} p_{j,k}(t)$, wobei $p_{j,k}$

Polynom $p_{j,k}(t)$ von Grad $\leq k$.

Bem.: Alle Polynome sind vom Grad 0 genau dann,
wenn r_j auch die geom. Vielfachheit von λ_j ist
(siehe Skript).

Es ist leicht zu sehen, dass diese Tupel für alle λ_j zusammengekommen ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$ bilden.

Betrachte nun die nicht-reellen Eigenwerte $\lambda_j = a_j + i b_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $b_j \neq 0$. Dann ist auch $\bar{\lambda}_j = a_j - i b_j$ ein Eigenwert. Ordne die Eigenwerte so, dass $\bar{\lambda}_j = \lambda_{j+1}$ gilt. Bekannt: Für jedes komplex-konjugierte Paar $(\lambda_j, \lambda_{j+1}) = (\lambda_j, \bar{\lambda}_j)$ kann ein reelles Tupel von Lsg gebildet werden. Für jedes Paar $(\varphi_{j,k}, \bar{\varphi}_{j,k})$ mit $\varphi_{j,k} = e^{\lambda_j t}$, $\bar{\varphi}_{j,k}(t)$ wie oben angegeben, erhalten wir ein Paar $(\varphi_{j,k}, \phi_{j,k})$

$p_{j,k}(t)$ wie oben angegeben erhalten wir ein Paar $(\psi_{j,k}, \phi_{j,k})$

$$\text{mit } \psi_{j,k}(t) = e^{a_j t} (\cos(b_j t) u_{j,k}(t) - \sin(b_j t) v_{j,k}(t))$$

$$\phi_{j,k}(t) = e^{a_j t} (\cos(b_j t) v_{j,k}(t) + \sin(b_j t) u_{j,k}(t)) \quad \text{wobei}$$

$p_{j,k} = u_{j,k} + i v_{j,k}$ die Zerlegung von $p_{j,k}$ in Real- und Imaginärteil ist.