

Satz (7.11)

Sei $y' = g(y)$ ein ebenes autonomes System mit einer Lipschitz-stetigen Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und sei $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Hamilton-Funktion** des Systems. Dann ist H längs jeder Trajektorie des Systems **konstant**.

Erhaltungsgrößen eines autonomen Systems

Der Begriff der Hamilton-Funktion lässt sich folgendermaßen verallgemeinern.

Definition (7.12)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ wird **Erhaltungsgröße** oder auch **erstes Integral** für das System $y' = g(y)$ genannt, wenn

$$\langle (\nabla E)(y), f(y) \rangle = 0$$

für alle $y \in D$ gilt, wobei ∇E den Gradienten von E und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Standard-Sklarprodukt bezeichnet.

Jede Erhaltungsgröße ist entlang jeder Trajektorie von $y' = g(y)$ konstant.

Def 7.12 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal L -stetig
Erhaltungsgröße des System $y' = f(y)$ (oder erstes
Integral) = stetig diff'bare Fkt. $E: D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\langle (\nabla E)(y), f(y) \rangle = 0 \quad \forall y \in D$$

Bem. • Die Hamilton-Fkt. H eines ebenen autonomen
Systems $y' = f(y)$ ($n=2$) ist eine Erhaltungs-
größe, denn

$$\langle (\nabla H)(x, y), f(x, y) \rangle = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \cdot f_1(x, y) +$$

System $y' = f(y)$ ($n=2$) ist eine Erhaltungsgröße, denn

$$\frac{\partial H}{\partial y_1}(x,y) f_2(x,y) - f_1(x,y) f_2(x,y) + f_1(x,y) f_2(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

- Im Allgemeinen ist jede Erhaltungsgröße E auf jeder Trajektorie konstant, denn: Sei $T \subseteq D$ eine Trajektorie und $\varphi: I \rightarrow D$ eine Lsg des Systems mit $T = T(\varphi)$, dann gilt $(E \circ \varphi)'(t) = E'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \langle (\nabla E)(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \langle (\nabla E)(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow E \circ \varphi$ ist auf I konstant $\Rightarrow E$ ist auf T konstant $\square$

Definition (7.13)

Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, und seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Dann ist das dem autonomen System $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ zugeordnete **System in Polarkoordinaten** gegeben durch

$$r' = p(r, \phi) \quad , \quad \phi' = q(r, \phi)$$

wobei die Funktionen $p, q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} p(r, \phi) &= f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) + \\ &\quad g(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) \\ q(r, \phi) &= \frac{1}{r} (g(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) - \\ &\quad f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi)) \end{aligned}$$

Proposition (7.14)

Seien die Bezeichnungen wie in Def. 7.13 gewählt, außerdem

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- (r_0, ϕ_0) die eindeutig bestimmten **Polarkoordinaten** des Punktes (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$
- (μ_1, μ_2) eine Lösung des System in Polarkoordinaten mit $(\mu_1(0), \mu_2(0)) = (r_0, \phi_0)$, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

Dann bilden die Funktionen $\nu_1, \nu_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\nu_1(t) = \mu_1(t) \cdot \cos(\mu_2(t)) \quad , \quad \nu_2(t) = \mu_1(t) \cdot \sin(\mu_2(t))$$

eine Lösung es ursprünglichen Systems gegeben durch f und g mit $(\nu_1(0), \nu_2(0)) = (x_0, y_0)$.

Def 7.13 Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal L -stetzig, betrachte das autonome System

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \quad (*)$$

zugeordnetes System in Polarkoordinaten:

$$r' = p(r, \phi), \quad \phi' = q(r, \phi)$$

wobei $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(r, \phi) = f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) + g(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) \quad (**)$$

$$g(r, \phi) = \frac{1}{r} (g(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) - f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi))$$

Motiviert ist diese Def durch

Proposition 7.14 Bezeichn. wie in 7.13,

außerdem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• $(r_0, \phi_0) = \text{Polarkoord. von } (x_0, y_0)$

• $(\mu_1, \mu_2) = \text{Lösung von } (**) \text{ mit}$
 $(\mu_1(0), \mu_2(0)) = (r_0, \phi_0)$

Dann ist $\gamma = (r_1, r_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ geg. durch

$$r_1(t) = \mu_1(t) \cdot \cos(\mu_2(t))$$

$$r_2(t) = \mu_1(t) \cdot \sin(\mu_2(t))$$

eine Lsg. von (*) mit $\gamma(0) = (x_0, y_0)$

Bew. Einsetzen und Nachrechnen □

Anwendungsbeispiel:

Betrachte das autonome System

$$x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

zugeordnetes System in Polarkoordinaten

$$r' = r(1 - r^2), \quad \phi' = -1$$

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, (r_0, ϕ_0) Polarkoordinaten von (x_0, y_0)

Lösung von $\phi' = -1$ mit $\phi(0) = \phi_0$: $\phi(t) = \phi_0 - t$

Trennung der Variablen ergibt für $r' = r(1 - r^2)$

die Lösung $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1-r_0^2)} e^{-2t}}$ mit $r(0) = r_0$

Prop. 7.14 $\Rightarrow$ erhalte Lsg $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des ursprünglichen Systems mit $v(0) = (x_0, y_0)$ durch

$$v(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1-r_0^2)} e^{-2t}} \cdot (\cos(\phi_0 - t), \sin(\phi_0 - t))$$

Stabilität von Lösungen

Definition (8.1)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen eine Lösung $\varphi :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ als

- (i) **stabil**, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und jedes $a > \alpha$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass zu jedem Anfangswert $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ die maximale Lösung ϕ zum Anfangswert b für alle $t \geq a$ existiert und $\|\phi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq a$ gilt. Ansonsten wird die Lösung φ als **instabil** bezeichnet.
- (ii) **attraktiv**, wenn es für jedes $a > \alpha$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass zu jedem Anfangswert $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$ die maximale Lösung ϕ zum Anfangswert b für alle $t \geq a$ existiert und

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t) - \varphi(t)\| = 0 \quad \text{erfüllt ist.}$$

- (iii) **asymptotisch stabil**, falls φ stabil und attraktiv ist.

§ 8. Stabilität von Lösungen

Def. 8.1 geg. $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$
stetig, genügt lokales L.-Bed., $x \in \mathbb{R}$

$\varphi:]-x, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ Lsg von $y' = f(x, y)$ (*)

Man bezeichnet φ als

i) stabil $\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, a > x \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, so dass

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$. Dann existiert

die max. Lsg des AWP geg durch (*) und (a, b)

auf $[a, +\infty[$, und es gilt $\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \forall t \geq a$.

Ansonsten wird φ als instabil bezeichnet.

(ii) attraktiv $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, so dass:

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b - \varphi(a)\| < \delta$. Dann existiert die maximale Lsg. ϕ des AWP. geg. durch $(*)$ und $(b, 0)$ auf ganz $[a, +\infty[$, und es gilt $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t) - \varphi(t)\| = 0$.

(iii) asymptotisch stabil, wenn sie stabil und attraktiv ist.

einfache Situation: autonomes System $y' = f(y)$

φ konstante Lösung (c = konstanter Wert von φ = Ruhelage)

- stabil $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, so dass jede Lösung, die im δ -Ball um c herum startet, den ε -Ball um c nicht verlässt.
- attraktiv $\Leftrightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, so dass jede Lösung, die im δ -Ball um c startet, für $t \rightarrow +\infty$ gegen c läuft.

Definition (8.2)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Für jedes Paar $(a, b) \in D$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ sei $\varphi_{a,b} : I_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Systems $y' = f(x, y)$. Dann wird die Funktion $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D} = \{(t, a, b) \mid \mathbb{R} \times D \mid t \in I_{a,b}\}$$

gegeben durch $\Phi(t, a, b) = \varphi_{a,b}(t)$ der **Fluss** des Systems $y' = f(x, y)$ genannt.

Satz (8.3)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann ist die Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ aus Definition 8.2 offen, und der Fluss $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine **stetige** Funktion.

Def 8.2 geeg ein System $y' = f(x, y)$ wie oben

Notation: Für jedes $(a, b) \in D$ sei $\varphi_{a,b} : I_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$
die anal. bestimmte Lsg. des System. Dann nennt man

$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit dem Def.-bes. $D = \{(t, a, b) \in \mathbb{R} \times D \mid$
 $t \in I_{a,b}\}$ geg. durch $\Phi(t, a, b) = \varphi_{a,b}(t)$ den
Fluss des Systems

Satz 8.3 Der Fluss eines Systems wie in Def. 8.2
ist immer eine stetige Funktion. (Bew. später)

Satz (8.4)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ist $\varphi :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine **attraktive** Lösung von $y' = f(x, y)$, dann ist φ auch **stabil** (ingesamt also asymptotisch stabil).

Satz 8.4 geg. System $y' = f(x, y)$ mit lokaler L-Bedingung, definiert auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ($n=1$)

Dann ist jede Lösung $\varphi:]x, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, die attraktiv ist, auch stabil (also insg. asymptotisch stabil).

Bew. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a \geq x$ vorgeg.

Vor. $\Rightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}^+$, so dass $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi(t) - \varphi(t)| = 0$

Für jede Lsg. ϕ von $y' = f(x, y)$ mit $|\phi(a) - \varphi(a)| < \eta$ gilt

(und ϕ unter der Bed. (*) $\forall t \geq a$ definiert ist)

Betrachte die zwei bst. Lsg. ϕ^+ , ϕ^- mit $\phi^+(a) = \varphi(a) + \frac{1}{2}\eta$ und $\phi^-(a) = \varphi(a) - \frac{1}{2}\eta$. Attraktivität $\Rightarrow$ Lsg. ϕ^+ , ϕ^- sind auf

$[a, +\infty[$ definiert und $\exists a_1 \geq a$, so dass
 $|\phi^+(t) - \psi(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|\phi^-(t) - \psi(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$
für alle $t \geq a_1$.

Auf Grund der $\leq$ L.-Bed. und des daraus
folgenden Eindr. gilt allgem. Sind ψ_1, ψ_2
Lsg. zu im gem. Def.-bereich dieses Fkt. und
 $\psi_1(t_0) < \psi_2(t_0)$, dann gilt $\psi_1(t) < \psi_2(t)$ für
jedes t , in dem ψ_1, ψ_2 beide definiert sind
 $\Rightarrow$ Jede Lsg. ψ mit $|\psi(a) - \phi(a)| < \frac{1}{2}\eta$,
also mit $\phi^-(a) < \psi(a) < \phi^+(a)$, erfüllt

$$\phi^-(t) < \psi(t) < \phi^+(t) \text{ f\"ur alle } t \geq a.$$

$$\rightarrow |\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq a$$

Satz 8.3 (Stetigkeit von Φ) $\Rightarrow \Phi$

glim. stetig auf $[a, a_1] \times [a, a_1] \times [\varphi(a) - \frac{1}{2}\eta, \varphi(a) + \frac{1}{2}\eta]$

$\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\delta \leq \frac{1}{2}\eta$

so dass f\"ur jede Lsg. ψ mit $|\psi(a) - \varphi(a)| < \delta$

jeweils $|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, a_1]$ erh\"altet ist

insg. also $|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq a$

$\Rightarrow \varphi$ ist stabil. □

Korrektur 2. Zeile: „ $|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ f\"ur alle $t \geq a_1$ “

(Grund: Sowohl φ als auch ψ verl\"auft f\"ur $t \geq a_1$ in einem offenen Streifen der Breite ε , der durch ϕ^- und ϕ^+ begrenzt wird.)

Ansatz: Beschreibe die „Störung“ einer Lsg. φ eines Systems $y' = f(x, y)$ durch eine neue DGL $y' = f_{\varphi}(x, y)$

Sei φ die Lsg. durch (a, b)

$b' \in \mathbb{R}^n$, so dass $\|b' - b\|$ „klein“

Dann betrachten wir die Lösung $\varphi_{a, b'}$ durch den Punkt (a, b') als „gestörte“ Lösung, und die Abweichung $\varphi_{a, b'} - \varphi_{a, b}$ als „Störung“.

Die Fkt. f_{φ} ist so gewählt, dass die Störung eine Lsg. von $y' = f_{\varphi}(x, y)$.

Die Differenzialgleichung der Störungen

Definition (8.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine **Lösung** von $y' = f(x, y)$. Weiter sei

$$D_\varphi = \{(x, y - \varphi(x)) \mid x \in J \wedge (x, y) \in D\}$$

und $f_\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f_\varphi(x, y) = f(x, y + \varphi(x)) - f(x, \varphi(x)).$$

Dann bezeichnen wir $y' = f_\varphi(x, y)$ als **Differenzialgleichung der Störungen** von φ .

Def. 8.5 geg. $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit lokalem L. Bed.

$\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ Lsg von $y' = f(x, y)$

Definiere $D_\varphi = \{(x, y + \varphi(x)) \mid x \in J \wedge (x, y) \in D\}$

und $f_\varphi: D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y + \varphi(x)) - f(x, \varphi(x))$

Dann wird $y' = f_\varphi(x, y)$ die DGL der Störungen
von φ genannt.

Satz (8.6)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $\varphi :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$. Dann besitzt die Differenzialgleichung der Störungen von φ die konstante Funktion **mit Wert null** als Lösung. Diese ist **genau dann stabil** bzw. attraktiv, wenn φ stabil bzw. attraktiv ist.

Satz 8.6 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie oben, $\varphi:]x, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$

Lsg von $y' = f(x, y)$. Dann gilt

- Die konstante Fkt. mit Wert 0 ist Lsg. von $y' = f_0(x, y)$
- Diese Fkt. ist stabil (bzw. attraktiv) g.d.w.
die Lsg. φ von $y' = f(x, y)$ stabil (bzw. attraktiv) ist.

Bew. Überprüfe zunächst durch Nachrechnen, dass zueinander
inverse Zuordnungen zwischen den Lsg. von $y' = f(x, y)$
und denen von $y' = f_0(x, y)$ existieren, genauer:

Inverse Zuordnungen zwischen den Lsg. von $y' = f(x, y)$
und denen von $y' = f_p(x, y)$ existieren, genauer:

- Ist $\varphi_{a,c}$ die Lsg. von $y' = f(x, y)$ durch (a, c) und $\psi_{a,c}$ jeweils die Lsg. von $y' = f_p(x, y)$, dann gilt jeweils $\psi_{a,c}(t) = \varphi_{a, \varphi(a)+c}(t) - \varphi(t)$
- Umgekehrt gilt jeweils $\varphi_{a,b}(t) = \psi_{a,b-\varphi(a)}(t) + \varphi(t)$

zu zeigen bleibt:

- φ stabil $\iff \eta$ stabil
- φ attraktiv $\iff \eta$ attraktiv

wobei η die Nullfunktion bezeichnet, die offenbar eine
Lsg. des AWP geg. durch $y' = f_p(x, y)$ und $(a, 0)$ darstellt