

Definition (7.1)

Ein **autonomes System** von Differenzialgleichungen ist ein System der Form $y' = f(y)$, wobei $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}^n$ bezeichnet.

Definition (7.5)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Eine Teilmenge $T \subseteq D$ wird **Trajektorie** des Systems $y' = f(y)$ genannt, wenn ein $b \in D$ mit $T = \varphi_{0,b}(I_b)$ existiert. Die Teilmengen

$$T^-(b) = \varphi_{0,b}(] \alpha(b), 0]) \quad \text{bzw.} \quad T^+(b) = \varphi_{0,b}([0, \beta(b)[)$$

werden negative bzw. positive **Halbtrajektorie** des Systems genannt.

Satz (7.6)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann gilt für jedes $b \in D$ jeweils

- (i) Ist $T^-(b)$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\alpha(b) = -\infty$.
- (ii) Ist $T^+(b)$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\beta(b) = +\infty$.
- (iii) Ist $\alpha(b)$ endlich, dann ist $T^-(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t \rightarrow \alpha(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.
- (iv) Ist $\beta(b)$ endlich, dann ist $T^+(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t \rightarrow \beta(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.

Zerlegungseigenschaft der Trajektorien

Proposition (7.7)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann ist auf der Menge D durch

$$b \sim c \iff \exists t \in I_b : \Phi(t, b) = c$$

eine **Äquivalenzrelation** auf D definiert, und für jedes $b \in D$ ist die **Äquivalenzklasse** $[b]$ genau die Trajektorie $T(b)$ des Systems.

Aus der Proposition folgt, dass die Trajektorien des Systems eine **Zerlegung** von D bilden. Diese Zerlegung wird als **Phasenportrait** des Systems bezeichnet.

Satz (7.8)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann gilt für jede Trajektorie $T(b)$ genau eine der folgenden drei Aussagen.

- (i) Es ist $I_b = \mathbb{R}$, $\varphi_{0,b}$ ist konstant, und b ist eine Ruhelage des Systems. Die Trajektorie $T(b) = \{b\}$ ist einpunktig.
- (ii) Es ist $I_b = \mathbb{R}$, und $\varphi_{0,b}$ ist nicht konstant und periodisch. Die Trajektorie $T(b)$ ist also eine geschlossene Kurve in D .
- (iii) Die Abbildung $\varphi_{0,b}$ ist injektiv. Die Trajektorie ist also eine nicht-geschlossene Kurve ohne Anfangs- oder Endpunkt.

Beweis von Satz 7.8

geg: $y' = f(y)$, $f: D \rightarrow \mathbb{K}^n$ ^{global} Lipschitz-stetig

Sei $G \in D$. z.zg: $T(G)$ fällt in eine der drei folgenden

Kategorien (i) $T(G) = \{G\}$ (ii) $T(G)$ ist geschlossene Kurve

(iii) $T(G)$ ist Kurve ohne Anfangs- und Endpunkt

Sei $\varphi_G = \varphi_{0,G}$ die Lösung von $y' = f(y)$ mit $\varphi_G(0) = G$.

1. Fall: φ_G ist konstant $\Rightarrow$ (i) erfüllt

2. Fall: φ_G ist injektiv $\rightarrow$ (iii) erfüllt

3. Fall: φ_G ist weder konstant noch injektiv

nicht injektiv $\Rightarrow \exists s, t \in I_b =]\alpha(b), \beta(b)[$ mit $s < t$
und $\varphi_b(s) = \varphi_b(t)$ Setze $c = \varphi_b(s) \Rightarrow \varphi_{0,c} = \varphi_{s,c} = \varphi_{t,c}$

Satz 7.3, angewendet auf $\tau = t - s \Rightarrow \alpha(0, b) = \alpha(t, c)$

und $\alpha(0, b) = \alpha(s, c) = \alpha(t - \tau, c) \stackrel{(7.3)}{=} \alpha(t, c) - \tau$

$\Rightarrow \alpha(t, c) = \alpha(t, c) - \tau \Rightarrow \alpha(t, c) = -\infty$ Genauso zeigt man,

dass $\beta(t, c) = +\infty \Rightarrow \alpha(b) = \alpha(0, b) = -\infty, \beta(b) = \beta(0, b) = +\infty$

$\Rightarrow I_b = \mathbb{R}$ außerdem: $\forall t_1 \in \mathbb{R}: \varphi_{0,b}(t_1) = \varphi_{t,c}(t_1)$

$\varphi_{t-\tau,c}(t_1 + \tau) = \varphi_{0,b}(t_1 + \tau) \Rightarrow \varphi_b = \varphi_{0,b}$ ist periodisch

Insgesamt ist also Bed. iii) erfüllt. $\square$

Satz (7.9)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $g : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Sei $b = (b_1, b_2) \in D$ ein beliebig gewählter Punkt.

- (i) Gilt $g_1(y) \neq 0$ für alle $y \in D$, dann ist die Trajektorie $T(b)$ des Systems $y' = g(y)$ identisch mit der maximalen Lösungskurve zum eindimensionalen Anfangswertproblem gegeben durch $y' = \frac{g_2(x,y)}{g_1(x,y)}$ und den Startpunkt b .
- (ii) Gilt $g_2(y) \neq 0$ für alle $y \in D$, dann ist $T(b)$ die maximale Lösungskurve zum Anfangswertproblem gegeben durch $y' = \frac{g_1(y,x)}{g_2(y,x)}$ und $\tilde{b} = (b_2, b_1)$.

Beweis von Satz 7.9, zeige nur (i)

geg. $y' = g(y)$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ ^{lokal} Lipschitz-
stetig, es gelte $g_1(y) \neq 0 \quad \forall y \in D$

Sei $b \in D$, $\varphi = \varphi_b = \varphi_{0,b} : J \rightarrow D$ die
zugehörige maximale Lsg. z.zg.

$T(b) = \{ (t, \varphi(t)) \mid t \in J \}$, wobei $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$
maximale Lsg. von $y' = \frac{g_2(x, y)}{g_1(x, y)}$ mit
 $\varphi(b_1) = b_2$

Vor. g stetig $g_1(\varphi(t)) > 0 \quad \forall t \in J$ oder

$g_1(\varphi(t)) < 0 \quad \forall t \in J$. o.B.d.A. gelte

der 1. Fall $\varphi_1'(t) = g_1(\varphi(t)) > 0 \quad \forall t \in J \rightarrow$

φ_1 ist auf J streng monoton wachsend $\Rightarrow$

Es gibt eine stetig diff'bare Umkehrfunktion

$\varphi_1^{-1}: \varphi_1(J) \rightarrow J$, außerdem $\varphi_1(0) = b_1$.

$\varphi_2(0) = b_2$, behalte

$$T(x) = \{ (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \mid t \in J \} = \{ (\varphi_1(\varphi_1^{-1}(x)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))) \mid$$

$$x \in \varphi_1(J) \} = \{ (x, (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x)) \mid x \in \varphi_1(J) \}$$

zu zeigen also: $\psi: \varphi_1(J) \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch $\psi(x) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x)$

ist Lösung des AWP geg. durch

$$y' = \frac{g_2(x, y)}{g_1(x, y)} \text{ und den Punkt } b = (b_1, b_2)$$

$$\psi(b_1) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(b_1) = \varphi_2(0) = b_2$$

außerdem: $\forall t \in \varphi_1(I)$

$$\psi'(t) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(t) = \varphi_2'(\varphi_1^{-1}(t)) \cdot (\varphi_1^{-1})'(t)$$

$$g_2(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(t)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t))) \cdot \frac{1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(t))}$$

$$\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \frac{g_2(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(t)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t)))}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(t))} = \frac{g_2(t, \psi(t))}{g_1(t, \psi(t))}$$

Die Maximalität von ψ folgt direkt aus
der Maximalität von φ .



Bem. Ist weder $g_1(y) \neq 0 \forall y \in D$ noch
 $g_2(y) \neq 0 \forall y \in D$, dann betrachtet man die
Einschränkung von $y' = g(y)$ auf einen der
folgenden Teilbereiche.

die $B_{no} = \{y \in D \mid g_1(y) > 0, g_2(y) > 0\}$

$B_{so} = \{y \in D \mid g_1(y) > 0, g_2(y) < 0\}$

$B_{nw} = \{y \in D \mid g_1(y) < 0, g_2(y) > 0\}$

$B_{sw} = \{y \in D \mid g_1(y) < 0, g_2(y) < 0\}$



Bem. Die Lösungen des AWP in Satz 7.9 (i) sind
genau die Lsg. von $g_2(x,y) - g_1(x,y) y' = 0$, die
des AWP in Satz 7.9 (ii) genau die Lsg. von
 $g_2(x,y) x' - g_1(x,y) = 0$. Beide Fälle können durch
die DGL $g_2(x,y) dx - g_1(x,y) dy = 0$ in symmetrischer
Form zusammengefasst werden.

Sei $\omega = g_2(x,y) dx - g_1(x,y) dy$. §1 $\rightarrow$ Ist ω exakt,
d.h. $\omega = dF$ für eine stetig diff'bare Fkt. $F: D \rightarrow \mathbb{R}$,
dann ist F entlang sämtlicher Lösungskurven konstant.

Definition Hamiltonscher Systeme

Definition (7.10)

Ein ebenes autonomes System wie in Satz 7.9 wird **hamiltonsch** genannt, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -g_2(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = g_1(x, y)$$

existiert. Man nennt eine solche Funktion eine **Hamilton-Funktion** des Systems.

Satz (7.11)

Sei $y' = g(y)$ ein ebenes autonomes System mit einer Lipschitz-stetigen Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und sei $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Hamilton-Funktion** des Systems. Dann ist H längs jeder Trajektorie des Systems **konstant**.

Beweis von Satz 7.11

geg. $b \in D$, sei $\varphi = \varphi_b$ die zugehörige maximale Lsg.

$T(b) = \varphi(I_b)$, wobei $I_b = \text{Def-Intervall von } \varphi$

zzg. $H \circ \varphi$ ist auf I_b konstant, genügt:

$(H \circ \varphi)'(t) \quad \forall t \in I_b$ Es gilt $(H \circ \varphi)'(t) \stackrel{\text{nachdem Kettenregel}}{=} 0$

$$H'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi(t)) \quad \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi(t)) \right) \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} =$$

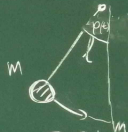
$$\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi(t)) \cdot \varphi_2'(t) =$$

$$= g_2(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) + g_1(\varphi(t)) \cdot \varphi_2'(t) \stackrel{\varphi \text{ löst } y' = g(y)}{=} 0$$

$$-g_2(\varphi(t)) \cdot g_1(\varphi(t)) + g_1(\varphi(t)) \cdot g_2(\varphi(t)) = 0 \quad \square$$

Anwendungsbeispiel (Physik)

geg. punktförmige Masse m , befestigt
an der Metallstange der Länge l , anderes
Ende der Stange fixiert



Schwerkraftwirkung auf
die Punktmasse $F_{\text{grav}} = -mg$ ($g \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Erdbeschleunigung)

$\varphi(t)$ = Auslenkungswinkel zum Zeitpunkt t

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t

$v(t) = l \varphi'(t)$, Beschleunigung

$a(t) = l \varphi''(t)$ wird verursacht durch
die Komponente F_{grav} orthogonal zur Stange

3. Newtonsches Gesetz $\Rightarrow F(t) = -mg \sin(\varphi(t))$
 $= ml \varphi''(t)$ DGL 2. Ordnung für φ .

kann bei Wahl geeigneter Einheiten vereinfacht
werden zu $y'' = -\sin(y)$

zugeordnetes autonomes System 1. Ordnung

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -\sin(y_1)$$

$(y_1 = \text{"Ort"}, y_2 = \text{"Impuls"})$

Hamilton-Funktion des Systems

$$H(y) = \frac{1}{2} y_2^2 - \cos(y_1)$$

"kinetische Energie" $\leftarrow$ "potentielle Energie"

(iii) ... Dann zu (iii) N_c in zwei Teilen ...

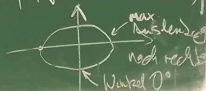
Satz 7.11 $\Rightarrow$ Jede Trajektorie des System liegt innerhalb einer Niveaumenge $N_c = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid H(y) = c\}$. Wir gehen die Möglichkeiten für die Trajektorien anhand der Werte von c durch

i) $c < -1 \quad N_c = \emptyset$

ii) $-1 < c < 1$ Auf Grund der Periodizität der Kosinusfunktion genügt es, Trajektorien in einem Bereich der Form $B_k = [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi] \times \mathbb{R} \quad (k \in \mathbb{Z})$ zu betrachten, z.B. für $k=0$

$$\Rightarrow N_c \cap B_0 = \{ (y_1, \pm \sqrt{2(\cos(y_1) + c)}) \mid |y_1| \leq \arccos(-c) \}$$

Man kann zeigen, dass dies eine ganze Tray. ist



iii) $c > 1$ Dann zerfällt N_c in zwei Teilmengen

$$N_c^+ = \{ (y_1, \sqrt{2(\cos(y_1) + c)}) \mid y_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$N_c^- = \{ (y_1, -\sqrt{2(\cos(y_1) + c)}) \mid y_1 \in \mathbb{R} \}$$

Beides sind Trajektorien des Systems.

liv) $c = -1$ Trajektorie $\left\{ \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ Ruhelagen

(v) $c = 1$ Dann zerfällt $N_1 \cap \overline{B}_0 = N_1 \cap ([-\pi, \pi] \times \mathbb{R})$
in vier Trajektorien, nämlich $\left\{ \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{und } M_1^+ = \{ (y_1, \sqrt{2\cos(y_1) + 1}) \mid -\pi < y_1 < \pi \}$$

$$M_1^- = \{ (y_1, -\sqrt{2\cos(y_1) + 1}) \mid -\pi < y_1 < \pi \}$$

Phasenportrait des Systems insgesamt

