

Definition (7.1)

Ein **autonomes System** von Differenzialgleichungen ist ein System der Form $y' = f(y)$, wobei $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}^n$ bezeichnet.

Definition der Lipschitz-Stetigkeit

- Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}^n$ wird **Lipschitz-stetig** genannt, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|f(y) - f(\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$ für alle $y, \tilde{y} \in D$ erfüllt ist.
- Von einer **lokal** Lipschitz-stetigen Funktion sprechen wir, wenn für jeden Punkt $y \in D$ eine Umgebung $U_y \subseteq \mathbb{K}^n$ existiert, so dass $f|_{D \cap U_y}$ jeweils Lipschitz-stetig ist.

Lemma (7.2)

Sei $y' = f(y)$ ein autonomes System von Differenzialgleichungen mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion f . Sei $\varphi : I \rightarrow D$ eine Lösung des Systems, definiert auf einem offenen Intervall $I =]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R}$.

- (i) Sei $a \in I$ und $c = \varphi(a) \in D$. Genau dann ist φ konstant, wenn $f(c) = 0$ ist. Die Punkte $c \in D$ mit dieser Eigenschaft werden die **Ruhelagen** des Systems genannt.
- (ii) Für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion φ_τ auf dem Intervall $I_\tau =]\alpha - \tau, \beta - \tau[$ definiert durch $\varphi_\tau(t) = \varphi(t + \tau)$ eine Lösung des Systems.

Beweis von Lemma 7.2

geg $y' = f(y)$, f lokal Lipschitz-stetig

zu 1) $\varphi: I \rightarrow D$ Lsg. des DGL, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $a \in I$, $c = \varphi(a)$

Beh: φ ist konstant $\Leftrightarrow f(c) = 0$

" $\Rightarrow$ " φ konstant $\Rightarrow \varphi'(t) = 0 \quad \forall t \in I$, insb.

$$0 = \varphi'(a) = f(\varphi(a)) = f(c)$$

" $\Leftarrow$ " $f(c) = 0 \Rightarrow$ Die konstante Fkt. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow D$,
 $t \mapsto c$ ist Lsg. von $y' = f(y)$ Auf Grund der Existenz-

und Eindeutigkeitsatzes muss auch φ konstant sein
(da $\varphi|_I = \varphi_{gr}(t)$).

z.ii) geg. Lösung $\varphi:]\alpha, \beta[\rightarrow D$ von $y' = f(y)$, $\tau \in \mathbb{R}$

z.zg. $\psi:]\alpha-\tau, \beta-\tau[\rightarrow D$, $t \mapsto \varphi(t+\tau)$ ist Lsg.

Definiere $\iota:]\alpha-\tau, \beta-\tau[\rightarrow]\alpha, \beta[$, $t \mapsto t+\tau$

$\Rightarrow \psi = \varphi \circ \iota$ Kettenregel (angew. auf die Komponenten von

ψ bzw. φ) $\Rightarrow \psi'(t) = \varphi'(\iota(t)) \cdot \iota'(t) = \varphi'(t+\tau) \cdot 1$

$= f(\varphi(t+\tau)) = f(\psi(t)) \quad \forall t \in]\alpha-\tau, \beta-\tau[$

□

Satz (7.3)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Für alle $(a, b) \in \mathbb{R} \times D$ sei $\varphi_{a,b} : I_{a,b} \rightarrow D$ die maximale Lösung des durch $y' = f(y)$ und (a, b) definierten

Anfangswertproblems, mit dem offenen Intervall

$I_{a,b} =]\alpha(a, b), \beta(a, b)[$. Dann gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und alle $(a, b) \in \mathbb{R} \times D$ jeweils

$$I_{a-\tau, b} =]\alpha(a, b) - \tau, \beta(a, b) - \tau[$$

und für alle $t \in I_{a,b}$ jeweils $\varphi_{a-\tau, b}(t - \tau) = \varphi_{a, b}(t)$.

Beweis von Satz 7.3

geg. $y' = f(y)$, $f: D \rightarrow \mathbb{K}^n$ lokal L -stetig

$I_{a,b} =]\alpha(a,b), \beta(a,b)[$ und

$\varphi_{a,b}: I_{a,b} \rightarrow D$ maximale Lösung, $\tau \in \mathbb{R}$

für jedes $(a,b) \in \mathbb{R} \times D$

z.zg.: 1) $I_{a-\tau,b} =]\alpha(a,b) - \tau, \beta(a,b) - \tau[$

für alle $(a,b) \in \mathbb{R} \times D$ und $\tau \in \mathbb{R}$ (Anders formuliert, es gilt $\alpha(a-\tau,b) = \alpha(a,b) - \tau$
 $\beta(a-\tau,b) = \beta(a,b) - \tau \quad \forall a,b,\tau$.)

$$(ii) \quad \varphi_{a-\tau, b}(t-\tau) = \varphi_{a, b}(t) \text{ f\"ur alle } a, b, \tau \\ \text{und alle } t \in I_{a, b}$$

Sei $(a, b) \in \mathbb{R} \times D$, betrachte auf dem Intervall
 $I =]a(a, b) - \tau, B(a, b) - \tau[$ die Funktion

$$\psi(t) = \varphi_{a, b}(t + \tau). \quad \text{Lemma 7.2} \Rightarrow$$

$$\psi \text{ ist Lsg. von } y' = f(y), \text{ mit } \psi(a - \tau) \\ = \varphi_{a, b}((a - \tau) + \tau) = \varphi_{a, b}(a) = b. \text{ Ang die}$$

Lösung ist nicht maximal. $\exists$ Fortsetzung $\tilde{\psi}$
 von ψ zu einer Lsg. von $y' = f(y)$ auf einem
 Intervall $J \not\subset I \Rightarrow$ erhalte durch $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\psi}(t - \tau)$
 eine Fortsetzung von $\varphi_{a, b}$ auf ein Intervall echt

τ größer als $I_{a,b}$ $\Downarrow$ zur Maximalität von $\varphi_{a,b}$
 $\Rightarrow$ Lsg. φ ist maximal $\Rightarrow$ Eindeutigkeit $\varphi = \varphi_{a-\tau,b}$

all und $I_{a-\tau,b} = I =]\alpha(a,b)-\tau, \beta(a,b)-\tau[$



)
 die
 $\tilde{\varphi}$
 em
 $= \tilde{\varphi}(t-\tau)$
 all

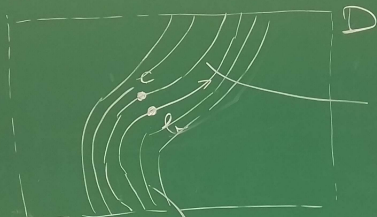
Definition (7.4)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 7.3 gewählt. Für jedes $b \in D$ setzen wir $\alpha(b) = \alpha(0, b)$, $\beta(b) = \beta(0, b)$ und $I_b =]\alpha(b), \beta(b)[= I_{0,b}$. Weiter sei

$$\mathcal{D} = \{(t, b) \mid b \in D, t \in I_b\}.$$

Dann wird die Funktion $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\Phi(t, b) = \varphi_{0,b}(t)$ der **Fluss** des autonomen Systems $y' = f(y)$ genannt.

zum Begriff des Flusses eines autonomen Systems



Bildmenge
 $\Phi(I_c \times]c[)$

Bildmenge $\Phi(I_b \times]b[)$

Definition (7.5)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Eine Teilmenge $T \subseteq D$ wird **Trajektorie** des Systems $y' = f(y)$ genannt, wenn ein $b \in D$ mit $T = \varphi_{0,b}(I_b)$ existiert. Die Teilmengen

$$T^-(b) = \varphi_{0,b}(] \alpha(b), 0]) \quad \text{bzw.} \quad T^+(b) = \varphi_{0,b}([0, \beta(b)[)$$

werden negative bzw. positive **Halbtrajektorie** des Systems genannt.

Satz (7.6)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann gilt für jedes $b \in D$ jeweils

- (i) Ist $T^-(b)$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\alpha(b) = -\infty$.
- (ii) Ist $T^+(b)$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\beta(b) = +\infty$.
- (iii) Ist $\alpha(b)$ endlich, dann ist $T^-(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t \rightarrow \alpha(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.
- (iv) Ist $\beta(b)$ endlich, dann ist $T^+(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t \rightarrow \beta(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.

Erinnerung: $y' = f(x, y)$ allgemeines (nicht-autonomes)
System mit Def. bereich $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$
Lösung durch $(a, c) \in D$

Satz 3.14: φ maximal $\Leftrightarrow \varphi$ verlässt nach links und
rechts jedes Kompaktum

Prop. 3.12 $\varphi:]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{K}^n$ verlässt nach rechts jedes
Kompaktum $\Leftrightarrow$ Es gilt alle drei Bedingungen

(i) $\beta = +\infty$

(ii) $\limsup_{t \rightarrow \beta} \|\varphi(t)\| = +\infty$

(iii) $\partial D \neq \emptyset$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} d((t, \varphi(t)), \partial D) = 0$

Beweis von Satz 7.6

geg. $y' = f(y)$, $f: D \rightarrow \mathbb{K}^n$ lokal L-stetig

Sei $\tilde{D} = D \times \mathbb{R}$. Es sei $t_0 \in D$ und $\varphi_{t_0}: I_{t_0} \rightarrow D$
die zugehörige maximale Lösung. $\Rightarrow T(t_0) = \varphi_{t_0}(I_{t_0})$,

$T^+(t_0) = \varphi_{t_0}(I_{t_0} \cap [0, +\infty[)$, $T^-(t_0) = \varphi_{t_0}(I_{t_0} \cap]-\infty, 0])$

φ_{t_0} ist maximale Lsg $\xRightarrow{\text{Satz 3.14}}$ φ_{t_0} verlässt nach links oder
rechts jedes Kompaktum $\Rightarrow \varphi_{t_0}$ erfüllt eine der
drei Bed. (i), (ii), (iii) aus Prop 3.12

zu (i) $T^-(b)$ ist in einer kompakten Teilmenge $K \subseteq D$ enthalten
 Ang. $\alpha(b)$ ist endlich $\rightarrow$ Der Graph $T^-(p_b)$ liegt in einer kompakten Teilmenge von $\tilde{D}$, nämlich in $[\alpha(b), 0] \times K$
 $\Rightarrow$ $\downarrow$ zu Satz 3.14

zu (ii) analog zu (i)

zu (iii) Vor. $\alpha(b)$ ist endlich $\xRightarrow{p_b \text{ verlässt } \partial \tilde{D} \text{ nach links jedes kompakt}}$ Aussage (ii), (iii) von Prop. 3.12 erfüllt

d.h. es gilt $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|p_b(t)\| = +\infty$ oder $\lim_{t \rightarrow \infty} d((t, p_b(t)), \partial \tilde{D}) = 0$
 $\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \|p_b(t)\| = +\infty$ oder $\lim_{t \rightarrow \infty} d((t, p_b(t)), \partial \tilde{D}) = 0$

zu (iv) analog zu (iii) □

Zerlegungseigenschaft der Trajektorien

Proposition (7.7)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann ist auf der Menge D durch

$$b \sim c \iff \exists t \in I_b : \Phi(t, b) = c$$

eine **Äquivalenzrelation** auf D definiert, und für jedes $b \in D$ ist die **Äquivalenzklasse** $[b]$ genau die Trajektorie $T(b)$ des Systems.

Aus der Proposition folgt, dass die Trajektorien des Systems eine **Zerlegung** von D bilden. Diese Zerlegung wird als **Phasenportrait** des Systems bezeichnet.

Beweis von Prop. 7.7

$$\begin{aligned} \text{z.zg. } b \sim c &\iff \exists t \in I_b : \Phi(t, b) \\ &= p_b(t) = c \end{aligned}$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf D
und die Äquivalenzklassen sind genau die
Trajektorien

(i) Reflexivität : geg. $b \in D$, z.zg. $b \sim b$
ist erfüllt, da $p_b(0) = b$ nach Def von p_b

(ii) Symmetrie : geg. $b, c \in D$ mit $b \sim c$

z.zg. $c \sim b$ $b \sim c \rightarrow \exists \tau \in I_b$ mit

$$\varphi_b(s) = c \Rightarrow \varphi_{0,b}(s) = c$$

$$\Rightarrow \varphi_{0,b} = \varphi_{s,c} \text{ auf Grund der Eindeutigkeit}$$

$$\text{Lemma 7.3} \Rightarrow \varphi_{0,c}(t-s) = \varphi_{s,c}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{mit } t-s \in I_c \Rightarrow b = \varphi_{0,b}(0) = \varphi_{s,c}(0) \\ = \varphi_{0,c}(-s) = \varphi_c(-s) \Rightarrow c \sim b$$

iii) Transitivität: geg. $b, c, d \in D$ mit

$$b \sim c \text{ und } c \sim d \text{ z.z. } b \sim d$$

$$b \sim c \Rightarrow \exists s_1 \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_b(s_1) = c$$

$$c \sim d \Rightarrow \exists s_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_c(s_2) = d$$

$$\text{Eindeutigkeit} \Rightarrow \varphi_{0,b} = \varphi_{s_1,c}, \varphi_{0,c} = \varphi_{s_2,d}$$

Anmerkung zur 2. Zeile: Wegen $\varphi_{0,b}(s) = c = \varphi_{s,c}(s)$ folgt
 $\varphi_{0,b} = \varphi_{s,c}$ aus Satz 3.6.

$$\text{Lemma 7.3} \Rightarrow \varphi_{0,c}(t-s_1) = \varphi_{s_1,c}(t)$$

$$\varphi_{0,d}(t-s_2) = \varphi_{s_2,d}(t) \text{ jeweils f\"ur alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$t-s_1 \in I_c, t-s_2 \in I_d$$

$$\Rightarrow \varphi_b(s_1+s_2) = \varphi_{0,b}(s_1+s_2) = \varphi_{s_1,c}(s_1+s_2)$$

$$= \varphi_{0,c}(s_2) = \varphi_{s_2,d}(s_2) = \varphi_{0,d}(0) = \varphi_d(0)$$

$$= d \Rightarrow b \sim d$$

$$(iv) \text{ Sei } b \in D, \text{ z.z. } [b] = T(b)$$

Äquivalenzklasse

$$\begin{aligned} \text{"} \subseteq \text{" } c \in [b] &\Rightarrow b \sim c \Rightarrow \exists t \in I_b: \varphi_b(t) = c \\ T(b) &= \varphi_b(I_b) \\ \Rightarrow c \in T(b) \end{aligned} \quad \text{"} \supseteq \text{" } c \in T(b) \Rightarrow \exists t \in I_b$$

$$c = \varphi_b(t) \Rightarrow B \sim c \Rightarrow c \in [b]$$

