

Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$. Wir bezeichnen eine vektor- oder matrixwertige Funktion f auf \mathbb{R} als ω -periodisch, wenn $f(t + \omega) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Im weiteren Verlauf betrachten wir nun lineare Systeme der Form

$$y' = A(x)y$$

mit einer ω -periodischen Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$.

Satz (6.7)

Für jede Matrix $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ existiert eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit

$$e^B = C.$$

(Die Matrix B mit dieser Eigenschaft ist **nicht** eindeutig bestimmt.)

Beweis von Satz 6.7 (Forts.)

geg. Jordanmatrix $J \in GL_n(\mathbb{C})$, z.zg.

Es gibt ein $B \in M_n(\mathbb{C})$ mit $e^B = J$.

Erinnerung: $J = \lambda E + F$, wobei $E =$ Einheitsmatrix,

$F =$ „1. Nebendiagonale mit Eintrag 1“, $\lambda =$ Eigenwert von J

bekannt: nat. Logarithmus $z \mapsto \ln(1+z)$ ist in eine

Potenzreihe entwickelbar, mit Konvergenzradius 1

Ansatz: $J = \lambda \left(E + \frac{F}{\lambda} \right)$, setze $\frac{F}{\lambda}$ in die Logarithmus-
reihe ein

Betrachte die Potenzreihe $f \in \mathbb{C}[[z]]$ geg durch

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k \quad \text{bekannt: } \ln(1+z) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1$$

definiere $U = \{C \in M_{n, \mathbb{C}} \mid f(C) \text{ konvergiert in } M_{n, \mathbb{C}}\}$

außerdem bekannt: $\exp(f(z)) = 1+z$ in $\mathbb{C}[[z]]$

$$\text{Definiere nun } B = (\ln \lambda) E + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k \lambda^k} F^k$$

Wegen $F^k = 0$ für $k \geq n$ liegt $E + \frac{F}{\lambda}$ in U

$$\rightarrow B = (\ln \lambda) E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \lambda^k} = (\ln \lambda) \cdot E + \ln\left(E + \frac{F}{\lambda}\right)$$

$$\rightarrow e^B = e^{(\ln \lambda) E} \cdot e^{\ln\left(E + \frac{F}{\lambda}\right)} = \lambda E \cdot \left(E + \frac{F}{\lambda}\right) = \lambda E + F = J$$

□

Satz (6.8)

Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine ω -periodische stetige Funktion. Dann existiert eine ω -periodische stetig differenzierbare Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ und eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, so dass durch $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$ gegeben ist.

Beweis von Satz 6.8

geg. $y' = A(x)y$, wobei $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$

ω -periodische Fkt., stetig

z.zg. $\exists p: \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ stetig ω -periodisch

und $B \in M_n(\mathbb{C})$, so dass $\Phi(t) = p(t) e^{tB}$

ein Fundamentalsystem ist

• Sei Φ ein bel. Fundamentalsystem, definiere

$$\Psi(t) = \Phi(t + \omega). \Rightarrow \Psi'(t + \omega) =$$

$$\Phi'(t + \omega) = A(t + \omega)\Phi(t + \omega) = A(t)\Psi(t)$$

→ Auch Ψ ist ein Fund.-system von $y' = A(x)y$.

→ $\exists C \in GL_n(\mathbb{C})$ mit $\Psi(t) = \Phi(t)C$.

Satz 6.7 $\Rightarrow \exists B \in M_n, \mathbb{C}$ mit $e^{\omega B} = C$.

Definiere außerdem p durch $p(t) = \Phi(t) \cdot e^{-tB}$

Dann ist $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ offenbar erfüllt.

noch zu überprüfen: p ist ω -periodisch

$$\text{Es gilt } p(t+\omega) = \Phi(t+\omega) e^{-(t+\omega)B} = \Psi(t) e^{-(t+\omega)B}$$

$$= \Phi(t)C e^{-(t+\omega)B} = \Phi(t) e^{\omega B} e^{-\omega B} e^{-tB}$$

$$= \Phi(t) e^{-tB} = p(t) \quad \square$$

Folgerung (6.9)

- (i) Das Fundamentalsystem Φ aus Satz 6.8 ist durch seine Werte auf einem abgeschlossenen Intervall der Form $[t_0, t_0 + \omega]$ **eindeutig festgelegt**.
- (ii) Sind Φ, Ψ ein Fundamentalsysteme von $y' = A(t)y$, und ist $B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{C}}$ mit $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)e^{\omega B}$, dann existiert eine zu B **ähnliche** Matrix $B_1 \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{C}}$ mit $\Psi(t + \omega) = \Psi(t)e^{\omega B_1}$.

Beweis von Folgerung 6.9

geg: System $y' = A(x)y$ wie in (6.8)

zu 1) z.zg. Jedes Fundamentalsystem Φ ist
eindeutig bestimmt durch $\Phi|_{[t_0, t_0+\omega]}$,
wobei $t_0 \in \mathbb{R}$ bel. vorgeg.

siehe (6.8) $\Rightarrow \exists C \in GL_n(\mathbb{C})$ mit

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{insb.}$$

$$C = \Phi(t_0)^{-1} \Phi(t_0+\omega) \quad \text{Sei } B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ mit}$$

$$e^{\omega B} = C \Rightarrow \text{erhalte durch } p: \mathbb{R} \rightarrow$$

$$GL_n(\mathbb{C}), t \mapsto \Phi(t)e^{-tB} \text{ eine } \omega\text{-periodische}$$

y Fkt Diese ist durch $p|_{[t_0, t_0+\omega]}$ eindeutig festgelegt. \rightarrow erhalte $\Phi(t) = p(t) e^{tB}$ auf ganz \mathbb{R} durch die Werte von $p|_{[t_0, t_0+\omega]}$

tB zu ii) geg. Fund.-systeme Φ, Ψ für $y' = A(x) y$

Sei $\Phi(t) = p(t) e^{tB}$ mit p ω -periodisch, stetig

und $B \in M_n, \mathbb{C}$ z.z.zg: Es gibt ein $B_1 \in M_n, \mathbb{C}$,

ähnlich zu B , mit $\Psi(t+\omega) = \Psi(t) e^{\omega B_1}$

Φ, Ψ beides Fund.-systeme $\Rightarrow \exists S \in GL_n(\mathbb{C})$

mit $\Psi(t) = \Phi(t) S$ $\Phi(t+\omega) = \Phi(t) e^{\omega B}$

$\Rightarrow \Psi(t+\omega) = \Phi(t+\omega) S = \Phi(t) e^{\omega B} S =$

\square

$$\Phi(t) S S^{-1} e^{WB} S = \Phi(t) e^{WS^{-1}BS}$$

Also erfüllt $B_1 = S^{-1}BS$ die anges. Gleichung. \square

Folgerung (6.10)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 6.8. Dann erhält man durch die Zuordnung $\varphi \mapsto p\varphi$ eine **bijektive lineare Korrespondenz** zwischen den Lösungen des Systems $z' = Bz$ und den Lösungen des periodischen Systems $y' = A(x)y$. Man bezeichnet diese Zuordnung als **Lyapunov-Transformation**.

Charakteristische Exponenten und Multiplikatoren

- Die Eigenwerte der Matrix B in Satz 6.8 werden **charakteristische Exponenten** des periodischen Systems $y' = A(x)y$.
- Die Eigenwerte der Matrix $C = e^{\omega B}$ nennt man die **charakteristische Multiplikatoren**.
- Im Gegensatz zu den charakteristischen Exponenten sind die charakteristischen Multiplikatoren **eindeutig bestimmt**.

Polynome mit periodischen Koeffizienten

- Als **Polynom mit ω -periodischen Koeffizienten** vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ der Form

$$f(t) = a_m(t)t^m + \dots + a_1(t)t + a_0(t) \quad ,$$

wobei $a_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ jeweils eine stetige Funktion mit $a_k(t + \omega) = a_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

- Wir verwenden denselben Ausdruck auch für eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$, deren n Komponentenfunktionen $F_\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ($1 \leq \ell \leq n$) diese Gestalt haben.

Beweis von Folgerung 6.10 :

$L_0 =$ Lösungsraum von $z' = Bz$

$L =$ Lösungsraum von $y' = A(x)y$

wobei $e^{\omega B} = C \in GL_n(\mathbb{C})$, $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C$

Φ Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$

Beh. erhalte durch $\varphi \mapsto p\varphi$ eine bijektive \mathbb{C} -lineare
Abbildung zwischen L_0 und L

Die \mathbb{C} -Linearität des AB ist offensichtlich.

Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig diff. bes und $\varphi = p\psi$

$\mathcal{L} = \text{Lösungsraum von } y' = A(x)y$

z.zg: $\varphi \in \mathcal{L} \iff \varphi \in \mathcal{L}_0$

$$\varphi \in \mathcal{L} \iff \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \iff$$

$$p'(t)\varphi(t) + p(t)\varphi'(t) = A(t)p(t)\varphi(t) \iff$$

$$\varphi'(t) = p(t)^{-1} (A(t)p(t)\varphi(t) - p'(t)\varphi(t)) \iff$$

$$\varphi'(t) = p(t)^{-1} (A(t)p(t) - p'(t)) \varphi(t)$$

Γ Einschub: $p(t) = \Phi(t) e^{-tB} \Rightarrow p'(t) = A(t)\Phi(t) e^{-tB} + \Phi(t) e^{-tB} (-B) = A(t)p(t) - p(t)B$

$$\iff \varphi'(t) = p(t)^{-1} (A(t)p(t) - A(t)p(t) + p(t)B) \varphi(t)$$

$$\iff \varphi'(t) = p(t)^{-1} p(t) B \varphi(t) = B\varphi(t) \iff \varphi \in \mathcal{L}_0 \quad \square$$

Folgerung (6.11)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 6.8 gewählt, sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Exponent und sei $r \in \mathbb{N}$ die **algebraische Vielfachheit** von λ als Eigenwert von B . Dann gibt es ein linear unabhängiges Tupel $(\psi_0, \dots, \psi_{r-1})$ von Lösungen von $y' = A(x)y$ der Form

$$\psi_k(t) = e^{\lambda t} f_k(t) \quad ,$$

wobei $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ jeweils ein **Polynom** vom Grad $\leq k$ mit **ω -periodischen Koeffizienten** ist.

Satz (6.12)

Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine ω -periodische stetige Funktion. Dann existiert eine 2ω -periodische stetig differenzierbare Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ und eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, so dass durch $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$ gegeben ist.

Anwendung der Floquet-Theorie
auf DGLs 2-ter Ordnung mit
periodischen Koeffizienten

geg. $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (*)

wobei $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ω -periodisch
entspricht dem System 1. Ordnung

$$y' = A(x)y \text{ mit } A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$$

Ist $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ ein Fund-system von (*),

ein

z

w

wird

(5.6)

\Rightarrow

\Rightarrow

dass

dann ist $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{pmatrix}$ eines von (\mathbb{R}^2) .

O.B.d.A. $\psi_1(0) = 1, \psi_1'(0) = 0, \psi_2(0) = 0$
und $\psi_2'(0) = 1 \rightarrow \Phi(0) = E$.

Sei $C = \Phi(\omega) \in GL_2(\mathbb{R})$.

mögliche Einzelfälle:

- (1) C hat zwei verschiedene Eigenwerte λ_1, λ_2 (beide reell oder konjugiert-komplex)
 $\Rightarrow \exists B \in M_{2,\mathbb{C}}$ mit zwei verschiedenen Eigenwerten $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}, e^{\omega \mu_j} = \lambda_j$ für $j=1,2$

Folgerung 6.11 \Rightarrow \exists stetig diff'bare ω -periodische
Fkt. $p_1, p_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)$ mit
 $\tilde{\Psi}_1(t) = p_1(t) e^{Mt}$, $\tilde{\Psi}_2(t) = p_2(t) e^{M\omega(t)}$ ein
Fundamentalsystem von Lsg. ist.

(ii) C hat nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}^+$,
mit geom. Vielfachheit 2

$\Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}$, $p_1, p_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ω -periodisch
so dass $\tilde{\Psi}_1(t) = p_1(t) e^{Mt}$, $\tilde{\Psi}_2(t) = p_2(t) e^{Mt}$
ein Fundamentalsystem von Lösungen ergibt

explan)
in Eigen-
= 1, 2

(iii) C hat nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}^+$
mit $M_\omega(C, \lambda) = 1$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{R}$ und
ein Fundamentalsystem, bestehend aus $\Phi(t)$.

$$\tilde{\Psi}_1(t) = p_1(t) e^{mt}, \quad \tilde{\Psi}_2(t) = (p_2(t) + p_3(t)t) e^{mt}$$

mit $p_1, p_2, p_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ω -periodisch

wichtiger Spezialfall: Hill'sche DGL

$$y'' + b(x)y = 0$$

(S.6)
 \Rightarrow Wronski-Det. $w(t) = \det \Phi(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \det C = 1 \Rightarrow m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ können so gewählt werden,
dass $m_1 + m_2 = 0$ gilt