

# Variation der Konstanten für Differenzialgleichungen höherer Ordnung

## Satz (6.3)

Gegeben sei eine inhomogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung der Form

$$y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit stetigen Funktionen  $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) und  $b : I \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

- Es sei  $w$  die Wronski-Determinante eines Fundamentalsystems  $(u_1, \dots, u_n)$  von Lösungen der entsprechenden homogenen DGL.
- Für  $1 \leq j \leq n$  sei  $w_j$  die Wronski-Determinante des Systems  $(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, u_n)$  von Ordnung  $n - 1$ .
- Sei  $a \in I$  beliebig gewählt.

Dann ist durch

$$w(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} u_j(t) \int_a^t \frac{b(s)}{w(s)} w_j(s) ds$$

eine Lösung der DGL gegeben.

Bew. von Satz 6.3

geg. DGL der Form  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$

Sei  $(u_1, \dots, u_n)$  ein Fundamentalsystem der homogenen DGL

Sei  $y' + A(x)y = \hat{\beta}(x)$  das zugeordnete System 1. Ord. n.

mit  $\hat{\beta}(x) = \begin{pmatrix} \beta(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  Sei  $\Phi$  ein Fundamentalsystem

für das hom. System 1. Ord. n. ( $y' + A(x)y = 0$ )

Satz 5.8 (Variation der Konstanten)  $\Rightarrow$  Setzt

man  $v(t) = \int_a^t \Phi(s)^{-1} \hat{\beta}(s) ds$  dann ist  $\Psi(t) = \Phi(t)v(t)$

eine Lösung des inhomogenen Systems.

Sei  $z(t) = \underline{\Phi}(t)^{-1} \hat{g}(t)$ . Dies ist jeweils eine Lösung des

LGS  $\underline{\Phi}(t) \cdot x = \hat{g}(t)$ . Cramersche Regel  $\rightarrow$  Für  $1 \leq j \leq n$

gilt jeweils  $z_j(t) = \frac{\det \underline{\Phi}_j(t)}{\det \underline{\Phi}(t)}$ , wobei man  $\underline{\Phi}_j(t)$  durch

Ersatzung der  $j$ -ten Spalte durch  $\hat{g}(t)$  erhält. Die Entzerrung  
von  $\underline{\Phi}_j(t)$  zur  $j$ -ten Spalte ergibt  $\det \underline{\Phi}_j(t) = (-1)^{n+j} \hat{g}(t) \det \underline{\Psi}_j^{(n,j)}(t)$

Dabei ist  $\underline{\Psi}_j^{(n,j)}(t)$  die Matrix, die man durch Streichen der  $j$ -ten  
Spalte und der  $n$ -ten Zeile aus  $\underline{\Phi}_j$  erhält. Das ist genau die Matrix,  
die durch Streichen der  $j$ -ten Spalte und  $n$ -ten Zeile von  $\underline{\Phi}(t)$

entsteht  $\Rightarrow \det \Psi^{(u, j)}(t) = w_j(t)$

$$\Rightarrow z_j(t) = (-1)^{n+j} b(t) w(t)^{-1} w_j(t)$$

$$\Rightarrow v_j(t) = (-1)^{n+j} \int_a^t w(s)^{-1} w_j(s) b(s) ds$$

(jeweils für  $1 \leq j \leq n$ )

$\Rightarrow$  erhalte eine Lösung der inhomogenen DGL durch

$$w(t) = z_1(t) = \sum_{j=1}^n u_j(t) v_j(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} u_j(t) \int_a^t \frac{b(s)}{w(s)} w_j(s) ds. \quad \square =$$

## Anwendungsbeispiel zu Satz 6.3

$$y'' - \cos(x)y' + \sin(x)y = \sin(x)$$

bereits bekannt:  $(u_1(t), u_2(t))$  mit

$$u_1(t) = e^{\sin(t)}, \quad u_2(t) = e^{\sin(t)} \phi(t)$$

ist Fundamentalsystem der homogenen DGL

$$\text{wobei } \phi(t) = \int_0^t e^{-\sin(s)} ds$$

Berechnung der Wronski-Determinante:

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \quad \text{Dabei ist}$$

$$u_1'(t) = \cos(t) e^{\sin(t)} \text{ und } u_2'(t) = \cos(t) e^{\sin(t)} \phi(t)$$

$$+ e^{\sin(t)} \phi'(t) = \cos(t) e^{\sin(t)} \phi(t) + e^{\sin(t)} e^{-\sin(t)}$$

$$= \cos(t) e^{\sin(t)} + 1$$

$$\Rightarrow w(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\sin(t)} & e^{\sin(t)} \phi(t) \\ \cos(t) e^{\sin(t)} \phi(t) & \cos(t) e^{\sin(t)} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\sin(t)} (1 + \cos(t) \phi(t) e^{\sin(t)}) - \cos(t) e^{\sin(t)} e^{\sin(t)} \phi(t)$$

$$\stackrel{\text{DGL}}{=} e^{\sin(t)} + \cos(t) \phi(t) e^{2\sin(t)} - \cos(t) \phi(t) e^{2\sin(t)}$$

$$= e^{\sin(t)}$$

Nach Def. ist  $w_1(t) = u_2(t)$ ,  $w_2(t) = u_1(t)$

Nach Satz 6.3 erhalten wir eine Lsg. durch

$$w(t) = -u_1(t) \int_0^t \frac{b(s) u_2(s)}{w(s)} ds + u_2(t) \int_0^t \frac{b(s) u_1(s)}{w(s)} ds$$


$$\left. \begin{matrix} t) e^{\sin(t)} \\ \phi(t) \end{matrix} \right|$$

Umformung  $\rightarrow$  Skript

$$-e^{\sin(t)} \int_0^t \sin(s) \phi(s) ds - \phi(t) e^{\sin(t)} \cos(t)$$

Betrachte den Bereich  $\Delta = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq s \leq t\}$

Berechnung des Integrals:

$$\int_0^t \sin(s) \phi(s) ds = \int_0^t \sin(t) \left( \int_0^s e^{-\sin(r)} dr \right) ds$$


$$= \int \sin(s) e^{-\sin(r)} d(r, s) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^t e^{-\sin(r)} \left( \int_r^t \sin(s) ds \right) dr$$

Fubini  $\Delta$

$$= -\cos(t) \int_0^t e^{-\sin(r)} dr - \int_0^t e^{-\sin(r)} (-\cos(r)) dr$$

$$= -\cos(t) \int_0^t e^{-\sin(r)} dr - \int_0^t e^{-\sin(r)} (-\cos(r)) dr =$$

$$-\cos(t) \phi(t) - \int_0^t e^{-\sin(\tau)} = -\cos(t) \phi(t) - e^{-\sin(t)} + 1$$

$$\text{Einsetzen} \Rightarrow w(t) = \dots = 1 - e^{\sin(t)}$$

Da  $t \mapsto e^{\sin(t)}$  eine homogene Lösung ist, ist auch 1 eine spezielle Lösung.

## Lemma (6.4)

- (i) Für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt  $\frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$ .
- (ii) Für jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[t]$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{\lambda t} = p(\lambda)e^{\lambda t}.$$

## Lemma (6.5)

Seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $b_1, \dots, b_m : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetige Funktionen auf einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b = \sum_{j=1}^m b_j$  deren Summe und  $p \in \mathbb{C}[x]$ . Für  $1 \leq i \leq m$  sei  $\psi_j$  eine Lösung der DGL  $p(\frac{\partial}{\partial x})y = b_j(x)$ . Dann ist  $\psi(x) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x)$  eine Lösung von  $p(\frac{\partial}{\partial x})y = b(x)$ .

Beweis von Lemma 6.5

geg. stetige Fkt  $b_1, \dots, b_m : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $b = \sum_{j=1}^m b_j$

$\psi_j$  Lösung von  $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_j = b_j(x)$ , wobei  $p \in \mathbb{C}[t]$

Beh.  $\psi = \sum_{j=1}^m \psi_j$  ist Lsg. von  $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = b(x)$  (\*)

leicht zu überprüfen:  $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  ist eine lineare Abbildung  
auf dem Raum der  $r$ -mal stetig diff'baren Fkt.

wobei  $r = \text{grad}(p)$ , d.h. sind  $\psi_1, \psi_2$  solche Fkt. und

$\lambda \in \mathbb{C}$ , dann gilt  $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi_1 + \psi_2) = p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi_1) + p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi_2)$

$$\text{und } p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\lambda \varphi_i) = \lambda p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\varphi_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi)(t) &= \sum_{j=1}^m p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\varphi_j)(t) \\ &= \sum_{j=1}^m \psi_j(t) = \psi(t), \text{ d.h. } \psi \text{ ist tats\u00e4chlich eine} \end{aligned}$$

Lsg. von (\*)



## Satz (6.6)

Seien  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,  $c \in \mathbb{C}$  und  $\mu \in \mathbb{C}$  mit  $p(\mu) \neq 0$ .

- (i) Die DGL  $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y = ce^{\mu x}$  hat  $\psi(t) = \frac{c}{p(\mu)}e^{\mu t}$  als Lösung.
- (ii) Sei allgemeiner  $m \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Polynomfunktion vom Grad  $m$ . Dann hat die DGL  $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y = f(x)e^{\mu x}$  eine Lösung der Form

$$\psi(x) = g(x)e^{\mu x} ,$$

mit einer geeigneten Polynomfunktion  $g$  vom Grad  $m$ .

Beweis von Satz 6.6

$$\begin{aligned}\text{zu i)} \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \psi(t) &= P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{c}{P(\mu)} e^{\mu t} \\ &= \frac{c}{P(\mu)} P(\mu) e^{\mu t} = c e^{\mu t}\end{aligned}$$

zu ii) geg.  $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) y = f(x) e^{mx}$ ,  $f \in \mathbb{C}[t]$

Bew. durch vollständige Ind. über  $m = \text{grad}(f)$

Ind.-anf.  $m=0$  folgt direkt aus i)

Ind.-schritt  $m-1 \rightarrow m$

Lemma 5.25  $\Rightarrow \exists p_0 \in \mathbb{C}[t]$  von Grad  $m$

$$\text{mit } p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (t^m e^{mt}) = f_0(t) e^{mt}$$

Wegen  $\text{grad}(f) = \text{grad}(f_0) = m$  existiert ein  $c \in \mathbb{C}$ , so dass  $p_1 = p - c f_0$  vom Grad  $\leq n-1$

ist. Ind.-Voraussetzung  $\Rightarrow \exists g_1 \in \mathbb{C}[t]$  vom Grad  $\leq m-1$  mit  $p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (g_1(t) e^{mt}) = f_1(t) e^{mt}$

Setze  $g(t) = ct^m + g_1(t) \Rightarrow g \in \mathbb{C}[t]$ ,  $\text{grad}(g) = m$ , außerdem

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (g(t) e^{mt}) &= c p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (t^m e^{mt}) + \\ p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (g_1(t) e^{mt}) &= c f_0(t) e^{mt} + f_1(t) e^{mt} \\ &= f(t) e^{mt} \quad \square \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel für Satz 6.6

$$y''' - 2y'' - 2y' + 2y = 2 \sin(x) \quad (*)$$

Die linke Seite ist geg. durch

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y \quad \text{mit} \quad P = t^3 - 2t^2 - 2t + 2$$

Offenbar ist eine reelle Lösung von (\*) genau  
der Imaginärteil einer Lösung von

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y = 2e^{ix} \quad (**)$$

$$\left( \text{denn } e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \right)$$

□

$$p(i) = 4 - 3i \neq 0 \quad \text{Satz 6.6 (i)} \Rightarrow$$

$$\psi_c(t) = \frac{2}{p(i)} e^{it} \text{ ist Lösung von (*)}$$

$$\text{Dabei ist } \frac{2}{p(i)} = \frac{2}{4-3i} = \frac{1}{25} (8+6i)$$

$$\Rightarrow \psi_c(x) = \frac{1}{25} (8+6i) (\cos(t) + i \sin(t))$$

$$= \left( \frac{8}{25} \cos(t) - \frac{6}{25} \sin(t) \right) + i \left( \frac{6}{25} \cos(t) + \frac{8}{25} \sin(t) \right)$$

$\rightarrow$  erhalte Lösung von (\*) durch

$$\psi(t) = \frac{8}{25} \cos(t) + \frac{6}{25} \sin(t)$$

$\mathbb{C}[t]$

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$

Sei  $\omega \in \mathbb{R}^+$ . Wir bezeichnen eine vektor- oder matrixwertige Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$  als  $\omega$ -periodisch, wenn  $f(t + \omega) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Im weiteren Verlauf betrachten wir nun lineare Systeme der Form

$$y' = A(x)y$$

mit einer  $\omega$ -periodischen Funktion  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ .

## Satz (6.7)

Für jede Matrix  $C \in GL_n(\mathbb{C})$  existiert eine Matrix  $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$  mit

$$e^B = C.$$

(Die Matrix  $B$  mit dieser Eigenschaft ist **nicht** eindeutig bestimmt.)

Beweis von Satz 6.7:

geg.  $C \in GL_n(\mathbb{C})$ , z.zg.  $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$  mit  $e^B = C$

Ang., die Aussage ist bewiesen in dem Fall, dass  $C$  eine invertierbare Jordanmatrix ist.

• Dann ist die Aussage auch für Matrizen in Jordanscher Normalform gültig, denn:

Sei  $C \in GL_n(\mathbb{C})$  in JNF.  $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$ , Jordanmatrizen  $J_1, \dots, J_r \in GL_n(\mathbb{C})$  mit  $C = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$

Annahme  $\rightarrow \exists B_1, \dots, B_r$  mit  $e^{B_k} = J_k$  für  $1 \leq k \leq r$

Setze  $B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} \rightarrow e^B = \begin{pmatrix} e^{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{B_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$

$= C$

- Sei nun  $C \in GL_n(\mathbb{C})$  bel.  $\rightarrow \exists J$  in JNF und  $T \in GL_n(\mathbb{C})$   
 mit  $C = T J T^{-1}$   $C \in GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow J \in GL_n(\mathbb{C})$   
 s.o.  $\rightarrow \exists B \in M_{n, \mathbb{C}}$  mit  $e^B = J$  Setze  $B_1 = T B T^{-1}$   
 $\rightarrow e^{B_1} = T e^B T^{-1} = T J T^{-1} = C$