

Das char. Polynom einer linearen DGL k -ter Ordnung

Eine lineare DGL k -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$. Man bezeichnet das Polynom

$$\chi = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$$

als das **charakteristische Polynom** der DGL.

Differentialoperatoren gegeben durch Polynome

Ist $p \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$,
 $p = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$, dann bezeichnen wir mit $p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ den
Differentialoperator auf dem Raum $C^k(I)$ der k -mal stetig
differenzierbaren Funktionen gegeben durch

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(f)(t) = a_k f^{(k)}(t) + \dots + a_1 f'(t) + a_0.$$

Zwei Hilfsaussagen

Lemma (5.22)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^k(I)$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^k (f(t)e^{\lambda t}) = f^{(k)}(t)e^{\lambda t}.$$

Lemma (5.23)

Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p(\lambda) \neq 0$. Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad k , dann gibt es eine weitere Polynomfunktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vom selben Grad mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(g(t)e^{\lambda t}) = h(t)e^{\lambda t}.$$

Beweis von Lemma 5.23:

geg: Polynom g vom Grad l

$\lambda \in \mathbb{C}$, p Polynom mit $p(\lambda) \neq 0$

Stelle p dar in der Form $p = \sum_{j=0}^k c_j (x-\lambda)^j$

$p(\lambda) \neq 0 \Rightarrow c_0 \neq 0$

$$\Rightarrow p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(g(t)e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^k c_j \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^j (g(t)e^{\lambda t})$$

$$= \sum_{j=0}^k c_j g^{(j)}(t) e^{\lambda t} = h(t) e^{\lambda t} \quad \text{mit}$$

\uparrow Lemma 5.22 $j=0$

$$h(t) = \sum_{j=0}^k c_j g^{(j)}(t) \quad \text{Wegen } c_0 \neq 0 \text{ hat dieses}$$

$$p(\lambda) \neq 0 \Rightarrow c_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (g(t) e^{\lambda t}) = \sum_{i=0}^k c_i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^i (g(t) e^{\lambda t})$$

Polynom denselben Grad wie g . □

Def. Fundamentalsystem einer DGL der Form

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = 0$$

= System $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ von k -mal stetig diff'baren Funktionen,
so dass die Matrix

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & \dots & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist. Man nennt $\det \Phi(t)$ die
Wronski-Determinante der DGL.

Lösung linearer DGLs höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der Begriff eines **Fundamentalsystems** von Lösungen eines Systems erster Ordnung lässt sich auf naheliegende Weise auf DGLs höherer Ordnung übertragen (nämlich durch die Übersetzung in ein System erster Ordnung).

Satz (5.24)

Sei $p \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom der Form $\prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{e_j}$, mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Differentialgleichung r -ter Ordnung mit charakteristischem Polynom p ein Fundamentalsystem von Lösungen bestehend aus den Funktionen

$$\varphi_{jm}(t) = t^m e^{\lambda_j t}, \quad 0 \leq m < e_j, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Beweis von Satz 5.24

geg. $p \in \mathbb{C}[t]$ mit der Zerlegung $p = \prod_{j=1}^r (t - \lambda_j)^{e_j}$
in Linearfaktoren, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ versch. Nullstellen

von p Beh.: $t^m e^{\lambda_j t}$ $1 \leq j \leq r$, $0 \leq m < e_j$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen

der DGL $p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) y = 0$

Überprüfe zunächst, dass die Fkt. Lösungen sind.

Sei $j \in \{1, \dots, r\}$ und $m \in \{0, \dots, e_j - 1\}$

Schreibe $p = (x - \lambda_j)^{e_j} q_j \Rightarrow$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(t^m e^{\lambda_j t}) = \left(q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j\right)^{e_j}\right)(t^m e^{\lambda_j t})$$

$$\stackrel{\text{Lemma 5.22}}{=} q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{e_j} t^m \cdot e^{\lambda_j t}\right) \stackrel{\text{Lemma 5.22}}{=} q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(0 \cdot e^{\lambda_j t}) = 0$$

Nachweis der linearen Unabhängigkeit:

Betrachte eine beliebige Linearkombination der Funktionen. Diese hat die Form

$\sum_{j=1}^r g_j(t) e^{\lambda_j t}$, wobei g_j ein Polynom vom Grad $< e_j$ ist. z.z.z. Ist die Summe gleich null, dann folgt $g_j = 0$ für $1 \leq j \leq r$.

$x_j(t)$) Zeige dies durch vollständige Ind. über r .

Ind.-auf. Voraussetzung $g_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0$,
wobei $g_1 \in \mathbb{C}[t]$ von Grad $< e_1$. Dann folgt
 $g_1 = 0$ unmittelbar (da $e^{\lambda_1 t} \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$)

Ind.-schritt $r-1 \rightarrow r$:

Vor. $\sum_{j=1}^r g_j(t)e^{\lambda_j t} = 0$, mit $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{C}[t]$

won. der ungeg. Form. O.B.d.A. $g_j \neq 0$ für
alle j . (sonst wende die Ind.-Vor. direkt an)

Wende nun den Operator $D = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_r\right)^{e_r}$

auf die Gleichung an

e_j
 (λ_j)
llen

$$\text{Lemma 5.22} \Rightarrow D(g_r(t) e^{\lambda_r t}) = g_r(t) e^{\lambda_r t} = 0 \cdot e^{\lambda_r t} = 0$$

\uparrow $\text{grad}(g_r) < e_r$

Lemma 5.23 \Rightarrow Für $1 \leq j \leq r-1$ gilt

$$D(g_j(t) e^{\lambda_j t}) = h_j(t) e^{\lambda_j t}, \text{ wobei } h_j \in \mathbb{C}[t]$$

mit demselben Grad wie g_j . \Rightarrow

ind.

$$\sum_{j=1}^{r-1} h_j(t) e^{\lambda_j t} = 0 \quad \text{Zd.-V.} \Rightarrow h_j = 0 \text{ für}$$

$$1 \leq j \leq r-1 \Rightarrow g_j = 0 \text{ für } 1 \leq j \leq r-1$$

$$\text{einsetzen} \Rightarrow g_r(t) e^{\lambda_r t} = 0 \xrightarrow{\text{Zd.-Ans.}} g_r = 0 \quad \square$$

Anwendungsbeispiel: Betrachte die DGL

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

char Polynom $p = x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2$
 $= (x + 2i)^2 (x - 2i)^2$

Nach Satz 5.24 ist ein Fundamentalsystem geg. durch

$$p_{10}(t) = e^{2it}, \quad p_{11}(t) = t e^{2it}, \quad p_{20}(t) = e^{-2it},$$

$$p_{21}(t) = t e^{-2it} \quad \text{Wie in früheren Beispielen}$$

erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem durch

$p_{21}(t) = t e^{-2it}$ Wie in früheren Beispielen

$$\psi_{00}(t) = \frac{1}{2} \psi_{10}(t) + \frac{1}{2} \psi_{20}(t) = \cos(2t)$$

$$\psi_{01}(t) = \frac{1}{2i} \psi_{10}(t) - \frac{1}{2i} \psi_{20}(t) = \sin(2t)$$

$$\psi_{10}(t) = \frac{1}{2} \psi_{11}(t) + \frac{1}{2} \psi_{21}(t) = t \cos(2t)$$

$$\psi_{11}(t) = \frac{1}{2i} \psi_{11}(t) - \frac{1}{2i} \psi_{21}(t) = t \sin(2t)$$

Probe: $\psi_0''(t) = -4 \cos(2t)$, $\psi_0^{(4)}(t) = 16 \cos(2t)$

$$\Rightarrow \psi_0^{(4)}(t) + 8 \psi_0^{(2)}(t) + 16 \psi_0(t) = 0$$

Das Reduktionsverfahren von d'Alembert

Satz (6.1)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $y' = A(x)y$ ein lineares System, mit einer matrixwertigen Funktion $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lösung mit $\varphi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Sei außerdem $z' = B(x)z$ das lineare System mit $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n-1,\mathbb{K}}$ gegeben durch

$$b_{ij}(x) = a_{ij}(x) - \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)} a_{1j}(x) \quad \text{für } 2 \leq i, j \leq n.$$

- (i) Ist $\rho : I \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$ eine Lösung von $z' = Bz$, $a \in I$, und ist $\phi : I \rightarrow \mathbb{K}$ definiert durch

$$\phi(t) = \int_a^t \frac{1}{\varphi_1(s)} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j}(s) \rho_j(s) \right) ds, \quad ,$$

dann ist $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ gegeben durch

$$\psi(t) = \phi(t)\varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(t) \end{pmatrix} \text{ eine Lösung von } y' = A(x)y.$$

Das Reduktionsverfahren von d'Alembert (Forts.)

Satz (6.1)

- (ii) Sei $P = (\rho_{ij})$ ein **Fundamentalsystem** von $z' = Bz$. Für $2 \leq j \leq n$ seien $\phi_j : I \rightarrow \mathbb{K}$ und $\psi_j : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ definiert durch

$$\phi_j(t) = \int_a^t \frac{1}{\varphi_1(s)} \left(\sum_{k=2}^n a_{1k}(s) \rho_{kj}(s) \right) ds$$

und

$$\psi_j(t)(t) = \phi_j(t)\varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_{2j}(t) \\ \vdots \\ \rho_{nj}(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist die matrixwertige Funktion $\Psi : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ mit den Spalten $\varphi, \psi_2, \dots, \psi_n$ ein Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$.

Anwendungsbeispiel zu Satz 6.1:

$$y' = A(x)y, \quad A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}$$

(definiert auf $I = \mathbb{R}^+$)

Überprüfe: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ ist Lösung des Systems.

und $\varphi(t) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ für alle $t \in I$

Bestimmung des zugehörigen Systems der Größe 1.

$$b_{22}(x) = a_{22}(x) - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} a_{12}(x) = \frac{2}{x} - \frac{-x}{x^2} (-1) = \frac{1}{x}$$

Lösung des Systems $y' = \frac{1}{x}y$ $\rho_{22}(t) = t$

Bestimmung des neuen Fundamentalsystems

$$\begin{aligned}\phi_2(t) &= \int_1^t (e_1(s))^{-1} a_{12}(s) p_{22}(s) ds = \int_1^t \frac{1}{s^2} (-1) s ds \\ &= - \int_1^t \frac{ds}{s} = -\ln(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(t) &= \phi_2(t) p(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{22}(t) \end{pmatrix} = (-\ln(t)) \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t^2 \ln(t) \\ t \ln(t) + t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem zur ursprünglichen Gleichung ist somit

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln(t) \\ -t & t \ln(t) + t \end{pmatrix}$$

Satz (6.2)

Gegeben sei eine DGL höherer Ordnung

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

mit $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq n$. Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Lösung der DGL mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und für $1 \leq j \leq n$ sei $b_j(x) = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k(x) \varphi^{(k-j)}(x)$.

(i) Ist ρ eine Lösung von

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(x)y^{(j)} = 0 \quad ,$$

und ist $\hat{\rho} : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Stammfunktion von ρ , dann ist durch $\psi = \varphi \hat{\rho}$ eine **Lösung** der ursprünglichen DGL definiert.

Satz (6.2)

- (ii) Ist (ρ_2, \dots, ρ_n) ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL aus Teil (i), und ist $\hat{\rho}_k$ jeweils eine Stammfunktion von ρ_k für $2 \leq k \leq n$, dann ist durch

$$\varphi, \varphi \hat{\rho}_2, \dots, \varphi \hat{\rho}_n$$

ein **Fundamentalsystem** der ursprünglichen DGL definiert.

Beweis von Satz 6.2

zu (i) geg. $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = 0$

φ Lösung davon mit $\varphi(t) \neq 0 \forall t \in I$

ρ Lsg von $\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(x)y^{(j)} = 0$

$\hat{\rho}$ Stammfkt. von ρ , z.zg. $\psi = \varphi \hat{\rho}$

ist Lsg der ursprünglichen DGL

Formel für die höheren Ableitungen eines Produkts:

$$(fg)^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(k-j)}(t) g^{(j)}(t)$$

(Beweis durch vollst. Ind.)

Setze ψ in die ursprüngliche DGL ein.

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) \psi^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) (\psi \hat{\rho})^{(k)}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \hat{\rho}^{(j)}(t) \psi^{(k-j)}(t) =$$

↳ Umstellung

$$= \sum_{j=0}^n \hat{\rho}^{(j)}(t) \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k(t) \psi^{(k-j)}(t)$$

$$= \hat{\rho}(t) \sum_{k=0}^n a_k(t) \psi^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^n \hat{\rho}^{(j)}(t) \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} \cdot$$

$$a_k(t) \psi^{(k-j)}(t) = \hat{\rho}(t) \cdot 0 + \sum_{j=1}^n \hat{\rho}^{(j)}(t) \cdot$$

$$\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k(t) \psi^{(k-j)}(t) =$$

der

$$\sum_{d=0}^{n-1} P^{(d)}(t) \sum_{k=d+1}^n \binom{k}{d+1} a_k(t) \varphi^{(k-d-1)}(t)$$

$$= \sum_{d=0}^{n-1} \left(\sum_{k=d+1}^n \binom{k}{d+1} a_k(t) \varphi^{(k-d-1)}(t) \right) \cdot P^{(d)}(t)$$

$$= \sum_{d=0}^{n-1} G_{d+1}(t) P^{(d)}(t) = 0$$

zu (ii) siehe Skript-



Anwendungsbeispiel zu Satz 6.2:

$$y'' - \underbrace{\cos(x)}_{a_1(x)} y' + \underbrace{\sin(x)}_{a_0(x)} y = 0$$

$$a_2(x) = 1$$

$$= a_1(x)$$

$$= a_0(x)$$

Eine Lösung ist geg. durch $\varphi(x) = e^{\sin(x)}$

Bildung eines DGL der Ordnung 1:

$$b_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_1(x) \varphi(x) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} a_2(x) \varphi'(x)$$

$$= (-\cos(x)) e^{\sin(x)} + 2 \cdot 1 \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

$$= \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

$$\text{erhalte ebenso } b_2(x) = \varphi(x) = e^{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow \text{DGL 1. Ordnung: } b_2(x)y' + b_1(x)y = 0$$

$$\Rightarrow e^{\sin(x)} y' + \cos(x) e^{\sin(x)} y = 0$$

$$\text{äquivalent dazu: } y' + \cos(x) y = 0$$

$$\text{Lösung dieser DGL: } p(t) = e^{-\sin(t)}$$

\Rightarrow erhalte weitere Lsg. des ursprünglichen

$$\text{DGL durch } \gamma_2(t) = \varphi(t) \hat{p}(t) =$$

$$e^{\sin(t)} \int_0^t e^{-\sin(s)} ds$$

$\Rightarrow (\varphi(t), \gamma_2(t))$ ist Fundamentalsystem der
ursprünglichen DGL.