

Folgerung (5.14)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine diagonalisierbare $n \times n$ -Matrix, mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ und Paaren $(\lambda_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+1}), \dots, (\lambda_{p+q}, \bar{\lambda}_{p+q})$ nicht-reeller, komplex-konjugierter Eigenwerte, mit $n = p + 2q$, $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$, $\nu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq q$. Es sei (v_1, \dots, v_{p+q}) ein System von Vektoren derart, dass

$$(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \bar{v}_{p+1}, \dots, v_{p+q}, \bar{v}_{p+q})$$

eine Basis des \mathbb{C}^n und v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j ist, für $1 \leq j \leq p + q$. Weiter sei $v_j = u_j + iw_j$ für $p + 1 \leq j \leq p + q$ jeweils die Zerlegung von v_j in Real- und Imaginärteil.

Dann ist durch $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq p$ sowie

$$\psi_j(t) = e^{\nu_{p+j} t} (\cos(\omega_{p+j} t) u_{p+j} - \sin(\omega_{p+j} t) w_{p+j})$$

$$\xi_j(t) = e^{\nu_{p+j} t} (\sin(\omega_{p+j} t) u_{p+j} + \cos(\omega_{p+j} t) w_{p+j})$$

für $1 \leq j \leq q$ ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

Übersetzung der Jordanschen Normalform in eine reelle Matrix

Proposition (5.15)

Sei $C \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $C = A + iB$ mit $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, und sei \bar{C} die Matrix, die dadurch zu Stande kommt, dass man sämtliche Einträge komplex konjugiert. Dann ist die $2n \times 2n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} \quad \text{ähnlich zu} \quad \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Sind speziell $J(\lambda), J(\bar{\lambda}) \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ zueinander Jordanmatrizen mit komplex-konjugierten Eigenwerten $\lambda = a + ib$ und $\bar{\lambda} = a - ib$, dann ist die $2n \times 2n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} J(\lambda) & 0 \\ 0 & J(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \quad \text{ähnlich zu} \quad \begin{pmatrix} J(a) & -bE \\ bE & J(a) \end{pmatrix},$$

wobei $E \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Beweis von Prop. 5.15:

geg $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_{n, \mathbb{R}}$, $C = A + iB$, $\bar{C} = A - iB$

Beh. $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix}$ ähnlich zu $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$

$$\text{Setze } T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow T \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+iB & A-B \\ A-iB & -A+iB \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2A & -2B \\ 2B & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$\lambda = a + ib \Rightarrow f(\lambda) = \lambda E + F = (a + ib)E + F$$

$$= (aE + F) + i bE = J(a) + i bE$$

$J(\bar{\lambda}) = J(a) - i bE$ einsetzen \Rightarrow Die Matrix

$$\begin{pmatrix} J(a) & 0 \\ 0 & J(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \text{ ist \u00e4hnlich zu } \begin{pmatrix} J(a) - bE & \\ & bE \end{pmatrix} \quad \square$$

reelle Jordansche Normalform

invertierbar $\begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_n) \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} J(a_1) - b_1E & & \\ & \ddots & \\ & & J(a_n) - b_nE \\ & & & b_nE \end{pmatrix}$

wobei $\lambda_j = a_j + i b_j$ f\u00fcr $1 \leq j \leq n$ ($a_j, b_j \in \mathbb{R}$)

Proposition (5.16)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine komplexe Potenzreihe vom Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\|A\| < r$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

im \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bezüglich der **Zeilensummennorm**.

Definition des Matrixexponentials

Folgerung:

Bekanntlich besitzt die **Exponentialreihe** einen **unendlichen** Konvergenzradius. Daraus folgt, dass für alle $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ die Reihe

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

einen wohldefinierten Wert in $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ besitzt. Man bezeichnet diesen Wert als **Matrixexponential** von A .

Explizite Form des Matrixexponentials

Es bezeichne $F \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ die Matrix mit Einsen auf der
1. Nebendiagonalen, also die Matrix gegeben durch $f_{ij} = \delta_{i+1,j}$.

Lemma (5.17)

Sei $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J = \lambda E + F \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Dann gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Folgerung (5.18)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Dann ist $\Phi(t) = e^{tA}$ ein **Fundamentalsystem von Lösungen** für das System $y' = Ay$.

Beweis von Satz 5.18

geg. $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n, \mathbb{C}}$ zu zeigen:

$\Phi = e^{tA}$ ist ein Fundamentalsystem von
Lösungen für $y' = Ay$

Beweis: Sind $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto B(t)$ diff'bare
 $M_{n, \mathbb{C}}$ -wertige Abbildungen, dann gelten

die Ableitungsregeln $(A+B)'(t) =$
 $A'(t) + B'(t)$ und $(AB)'(t) =$
 $A'(t)B(t) + AB'(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt, dass die Ableitung

von $t \mapsto (tA)^m$ durch $t \mapsto m t^{m-1} A^m$

geg. ist. Daraus wiederum folgt,

Für $f = \sum_{k=0}^n a_k t^k \in \mathbb{C}[t]$ ist die Ab-

leitung von $t \mapsto f(tA)$ jeweils geg.

durch $t \mapsto A f'(tA)$, falls $A \in M_n$ &

konst. $f' = \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1}$ formale Ableitung

des Polynoms f , denn

$$\frac{d}{dt} (f(tA)) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k A^k \right) = \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} A^k =$$

$$A \sum_{k=1}^n k a_k (tA)^{k-1} = A f'(tA)$$

Ist nun f eine Potenzreihe, $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ mit
 Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und f' die for-
 male Ableitung, dann folgt siehe Skript

$$\frac{d}{dt} (f(tA)) = \frac{d}{dt} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k (tA)^k \right) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^n a_k (tA)^k \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A \sum_{k=1}^n k a_k (tA)^{k-1} \right) \\ = A f'(tA)$$

Wenden wir dies auf $f(t) = \exp(tA)$ an, dann gilt
 $f' = f$, und wir erhalten $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A f'(tA)$
 $= A f(tA) = A e^{tA} \rightarrow \Phi(t) = e^{tA}$ ist Lösung
von $y' = A y$ noch z.z. $\Phi(t)$ ist Fund.-system

Betrachte nun eine Matrix $J \in M_{n, \mathbb{C}}$ in JNF. In diesem
Fall ist $\Phi(t) = e^{tJ}$ nach Prop. (5.17) in $t=0$ die Einheits-
matrix E_n , insb. $\Phi(0)$ ist invertierbar $\rightarrow \Phi(t)$ ist Funda-
mentalsystem in diesem Fall.

Im allgemeinen Fall gibt es zu A ein $T \in GL_n(\mathbb{C})$ und eine
Matrix $J \in M_{n, \mathbb{C}}$ in JNF mit $A = TAT^{-1}$

$$\text{Es gilt } T^{-1} e^{tJ} T = T^{-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tJ)^k \right) T$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} T^{-1} J^k T$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (T^{-1} J T)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tA)^k = \exp(tA) = e^{tA}$$

Mit e^{tJ} ist also auch e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$

invertierbar. $\Rightarrow \Phi(t) = e^{tA}$ ist ein

Fundamentalsystem von Lösungen. \square

Anwendungsbeispiele zu Satz 5.18

(1) System mit einer Matrix in JNF

$$y_1' = 3y_1 + y_2, \quad y_2' = 3y_2 + y_3, \quad y_3' = 3y_3$$

in Matrixform $y' = Jy$ mit $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Nach Satz 5.18 (und der Formel aus Prop 5.17)

$$\text{ist } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & t e^{3t} & \frac{1}{2} t^2 e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & t e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \text{ ein Fundamentalsystem von Lösungen}$$

(2) System mit Matrix in reeller JNF

$$y' = A y, \text{ mit } A = \begin{array}{c} \text{J(A)} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\ \text{GE} \end{array}$$

Nach Prop. 5.15 gibt es ein $T \in GL_n(\mathbb{C})$,

so dass $T J T^{-1} = A$ mit $J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{array} \right)$

erhalte mit (5.17), (5.18) für

$y' = J y$ das Fundamentalsystem

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{(2+i)t} & t e^{(2+i)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2+i)t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(2-i)t} & t e^{(2-i)t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{(2-i)t} \end{pmatrix}$$

Eulersche Formel \rightarrow

$$e^{(2+i)t} = e^{2t} (\cos t + i \sin t), \quad e^{(2-i)t} = e^{2t} (\cos t - i \sin t)$$

$$te^{(2+i)t} = te^{2t} (\cos t + i \sin t), \quad te^{(2-i)t} = te^{2t} (\cos t - i \sin t)$$

Prop. 5.15 $\rightarrow \Psi(t) = T \Phi(t) T^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & te^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t & -te^{2t} \sin t \\ 0 & e^{2t} \cos t & 0 & -e^{2t} \sin t \\ e^{2t} \sin t & te^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t & te^{2t} \cos t \\ 0 & e^{2t} \sin t & 0 & e^{2t} \cos t \end{pmatrix}$$

□

(3) System mit allgem. reeller Matrix

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Berechnung der JNF} \Rightarrow$$

$$J = T^{-1}AT \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sei $\Phi(t)$ die Fundamentalmatrix aus Beispiel (1), ist Lsg. von $y' = Jy$.

Nach Prop. 5.12 erhalten wir ein Fund.-system für $y' = Ay$

$$\text{durch } \Psi(t) = T\Phi(t) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \begin{pmatrix} 9 & 9t-3 & 9/2t^2-3t \\ 9 & 9t-6 & 9/2t^2-6t \\ 3 & 3t & 3/2t^2+1 \end{pmatrix}$$

Satz (5.19)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Matrix, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $r \in \mathbb{N}$ dessen algebraische Vielfachheit. Dann gibt es für das System $y' = Ay$ ein linear unabhängiges Tupel

$$(\varphi_0, \dots, \varphi_{r-1})$$

von Lösungen der Form $\varphi_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, wobei die Funktion $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ in jeder Komponente ein **Polynom vom Grad $\leq k$** ist.

alternative Lösung von $y' = Ay$ (mit A aus (3)),
durch Anwendung von Satz 5.19

Setze die erste Komponente einer Lösung $(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$

von $y' = Ay$ an in der Form $\tilde{\psi}_0(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Es gilt die Äquivalenz $\tilde{\psi}_0'(t) = A \tilde{\psi}_0(t) \Leftrightarrow$

$$3e^{3t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{3t} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Eig}(A, 3) \quad \text{Rechnung} \rightarrow \text{Eig}(A, 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \text{wähle } \tilde{\psi}_0(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setze $\tilde{\Psi}_1$ an in der Form $\tilde{\Psi}_1(t) = e^{zt} \begin{pmatrix} a+dt \\ b+et \\ c+ft \end{pmatrix}$ mit
a, b, ..., f $\in \mathbb{R}$ Einsetzen in die Gfl.

$$\tilde{\Psi}_1'(t) = A \tilde{\Psi}_1(t) \Leftrightarrow e^{zt} \begin{pmatrix} d+3(a+dt) \\ e+3(b+et) \\ f+3(c+ft) \end{pmatrix} = e^{zt} A \begin{pmatrix} a+dt \\ b+et \\ c+ft \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d+3a+3dt \\ e+3b+3et \\ f+3c+3ft \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a+dt \\ b+et \\ c+ft \end{pmatrix} \quad \text{Vergleiche in jeder}$$

Komponente die Koeff. von t und 1 \Rightarrow
erhalte das Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+3a \\ e+3b \\ f+3c \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{Setze } d=3, e=3,$$

f=1, setze dies in die 1. Gfl. ein. Auflösen ergibt a=0,
b=-1, c=1/3. Berechne genauso noch $\tilde{\Psi}_2(t)$