Die Lösungsmenge im diagonalisierbaren Fall

Satz (5.11)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, eine $\mathbb{C}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto e^{\lambda t} v$ ist genau dann eine Lösung des Systems $y' = Ay$ ungleich null, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(ii) Ist $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ ein Tupel komplexer Zahlen und $(v_1, ..., v_r)$ ein Tupel von Vektoren, wobei v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j bezeichnet, so ist das Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ von Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ genau dann linear unabhängig, wenn das Tupel $(v_1, ..., v_r)$ linear unabhängig ist.

(iii) Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die komplexen Zahlen λ_j alle verschieden sind.

Übergang zwischen Lösungsmengen durch Basiswechsel

Proposition (5.12)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B = TAT^{-1}$. Genau dann ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$, wenn $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ gegeben durch $\psi(t) = T\varphi(t)$ eine Lösung von $z' = Bz$ ist.

Umrechnung in reellwertige Lösungen

Proposition (5.13)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, eine $\mathbb{R}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, $\lambda = \nu + i\omega$ mit $\nu, \omega \in \mathbb{R}$, und ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, $v = u + iw$ mit $u, w \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $\bar{\lambda} = \nu - i\omega$ ein Eigenwert von A, und $\bar{v} = u - iw$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) In diesem Fall sind $\psi, \xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(t) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w)$$

und

$$\xi(t) = e^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$$

zwei linear unabhängige Lösungen der DGL.

Der reelle Lösungsraum im komplex-diagonalisierbaren Fall

Folgerung (5.14)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_p$ und Paaren $(\lambda_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+1}), ..., (\lambda_{p+q}, \bar{\lambda}_{p+q})$ nicht-reeller, komplex- konjugierter Eigenwerte, mit $n = p + 2q$, $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$, $\nu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq q$. Es sei $(v_1, ..., v_{p+q})$ ein System von Vektoren derart, dass

$$(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, \bar{v}_{p+1}, ..., v_{p+q}, \bar{v}_{p+q})$$

eine Basis des $\mathbb{C}^n$ und v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j ist, für $1 \leq j \leq p + q$. Weiter sei $v_j = u_j + iw_j$ für $p + 1 \leq j \leq p + q$ jeweils die Zerlegung von v_j in Real- und Imaginärteil. Dann ist durch $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq p$ sowie

$$\psi_j(t) = e^{\nu_{p+j} t}(\cos(\omega_{p+j} t) u_{p+j} - \sin(\omega_{p+j} t) w_{p+j})$$
$$\xi_j(t) = e^{\nu_{p+j} t}(\sin(\omega_{p+j} t) u_{p+j} + \cos(\omega_{p+j} t) w_{p+j})$$

für $1 \leq j \leq q$ ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

Beweis von Folgerung 5.14

geg. $A \in M_{n,\mathbb{R}}$, $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $n = p + 2q$

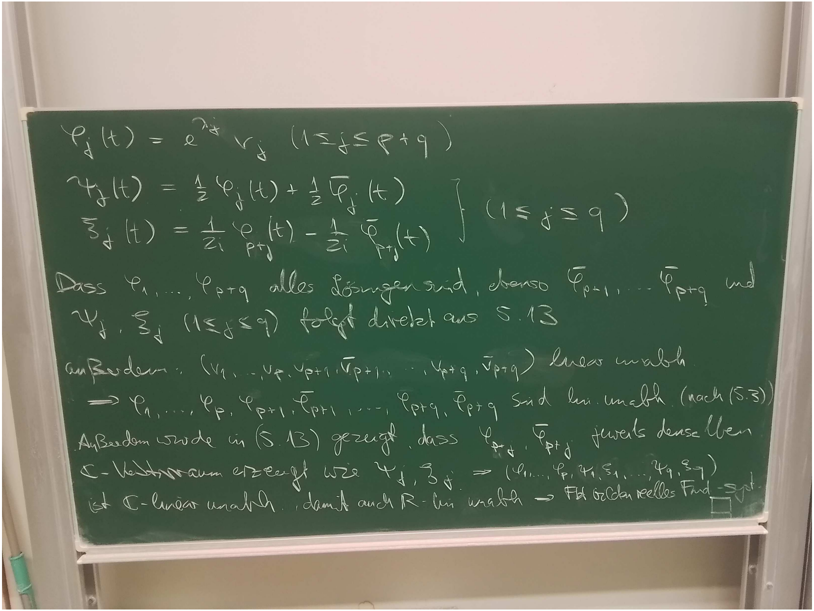
$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ versch. reelle Eigenwerte von A

$\lambda_{p+j} = \nu_j + i\omega_j$, $\overline{\lambda}_{p+j} = \nu_j - i\omega_j$ komplex konj. Paar von Eigenwerten $(1 \le j \le q)$

Beh.: φ_j $(1 \le j \le p)$, ψ_j, ξ_j $(1 \le j \le q)$ bilden zusammen ein Fundamentalsystem von Lösungen

$v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \overline{v}_{p+1}, \dots, v_{p+q}, \overline{v}_{p+q}$ System von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \overline{\lambda}_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}, \overline{\lambda}_{p+q}$

Korrektur: Streiche „versch." in der dritten Zeile.



Korrekur 2. Zeile: $\psi_j(t) = \frac{1}{2}\varphi_{p+j}(t) + \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{p+j}(t)$

Anwendungsbeispiel zu Folgerung S. 14

$y_1' = y_1 - 2y_2,\quad y_2' = 2y_1 - y_3,\quad y_3' = 4y_1 - 2y_2 - y_3$

in Matrixschreibweise: $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

char. Pol. $\chi_A = \det(x E_3 - A) = x^3 + x - 2$

probeweises Einsetzen $\Rightarrow \chi_A(1) = 0$

Polynomdiv. $\Rightarrow \chi_A = (x-1)(x^2 + x + 2)$

Nullst. von $x^2 + x + 2$: $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{7}$,
$\bar{\alpha} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{7} \Rightarrow 1, \alpha, \bar{\alpha}$ sind die
Eigenwerte von A

Berechnung zugeh. Eigenvektoren:

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \ker(A - E_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{=}$$

$$\ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

Ebenso erhält man $\mathrm{Eig}(A,\alpha) = \left\langle \begin{pmatrix} 3+i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$

und $\mathrm{Eig}(A,\bar{\alpha}) = \left\langle \begin{pmatrix} 3-i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$ Somit ist

ein komplexes Fundamentalsystem von $y' = Ay$

geg. durch $(\varphi_1, \varphi_2, \bar{\varphi}_2)$ mit

$$\varphi_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 3+i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}_2(t) = e^{\bar{\alpha} t}\begin{pmatrix} 3-i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ein reelles Fundamentalsystem erhält man durch $(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)$ mit

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}\varphi_2(t) + \frac{1}{2}\overline{\varphi_2}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 3\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) - \sqrt{7}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 4\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 8\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \end{pmatrix}$$

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2i}\varphi_2(t) - \frac{1}{2i}\overline{\varphi_2}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 3\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) + \sqrt{7}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 4\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 8\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{\bar{\lambda}t}\begin{pmatrix} 3-i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Jordansche Normalform

(1) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ heißt Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn sie die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{besitzt.}$$

(2) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ befindet sich in Jordanscher Normalform, wenn sie sich als Blockmatrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordanmatrizen $J_1, \ldots, J_r$ schreiben lässt. Man bezeichnet diese dann als Jordanblöcke der Matrix A.

Wiederholung: Jordansche Normalform (Forts.)

(3) Allgemein ist eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ genau dann ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ in Jordanscher Normalform, wenn das charakteristische Polynom χ_A in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

(4) Zwei Matrizen $J, J' \in \mathcal{M}_{n,K}$ in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke enthalten. (Treten einzelne Jordanblöcke mehrfach auf, dann müssen auch die Vielfachheiten des Vorkommens übereinstimmen.)

Wiederholung: Jordansche Normalform (Forts.)

Im Folgenden sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ und $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine zu A ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert der Matrix A.

(5) Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(A, \lambda)$ ist gleich der Summe der Größen sämtlicher Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ.

(6) Die geometrische Vielfachheit $\mu_g(A, \lambda)$ ist gleich der Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ in J.

(7) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des Minimalpolynoms $\mu_A \in K[x]$ ist gleich der Größe des größten Jordanblocks in J zum Eigenwert λ.

Zur Erinnerung: Das Minimalpolynom μ_A ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom minimalen Grades in $K[x]$ mit $\mu_A(A) = 0$.

Bem. Bei großen Matrizen genügen die Werte $\mu_a(A,\lambda)$, $\mu_g(A,\lambda)$ für die Eigenw. λ und χ_A, μ_A nicht mehr aus, um für A die JNF zu bestimmen.

Bsp.:

$$\lambda=2,\quad J_1=(2),\quad J_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix},\quad J_3=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}J_3&&\\&J_2&\\&&J_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}J_3&&\\&J_3&\\&&J_1\end{pmatrix}$$

$$\chi_A=(x-2)^7=\chi_B$$
$$\mu_A=(x-2)^3=\mu_B$$
$$\mu_a(A,2)=7=\mu_a(B,2)$$
$$\mu_g(A,2)=3=\mu_g(B,2)$$

Korrektur: Streiche das Wort „aus“ in der dritten Zeile.

Wiederholung: Jordansche Normalform (Forts.)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ und λ ein Eigenwert von A.

- Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$V_k = \ker((A - \lambda E)^k) \quad \text{und} \quad d_k = \dim V_k.$$

  Nach Definition ist $d_0 = 0$ und $d_1 = \mu_g(A, \lambda)$, und offenbar gilt $d_k \leq d_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
- Das kleinste $p \in \mathbb{N}$ mit $d_p = d_{p+1}$ erfüllt auch die Bedingung $d_p = d_k$ für alle $k \geq p$.
- Die Anzahl a_k der Jordankästchen der Größe k zum Eigenwert λ in einer zu A ähnlichen Matrix J in Jordanscher Normalform ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Formel

$$a_k \quad = \quad 2d_k - 2d_{k-1} - d_{k+1}.$$

Verfahren zur Bestimmung einer Transformationsmatrix

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine Matrix mit einem zerfallendem charakteristischen Polynom χ_A. Gesucht wird eine Transformationsmatrix T, so dass

$$J \quad = \quad T^{-1}AT$$

in Jordanscher Normalform vorliegt. Es sei $\phi : K^n \to K^n$ der Endomorphismus $v \mapsto (A - \lambda E)v$ gegeben durch Matrix-Vektor-Multiplikation.

(1) Zunächst bestimmt man Basen für die Untervektorräume $V_k = \ker(\phi^k)$ für $1 \leq k \leq p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ minimal mit $V_p = V_{p+1}$ ist.

Bestimmung einer Transformationsmatrix (Forts.)

(2) Dann bestimmt man eine Basis $\mathcal{B}_p$ eines Vektorraums $W_p = U_p$ mit $V_{p-1} \oplus U_p = V_p$, indem man eine Basis von V_{p-1} zu einer Basis von V_p ergänzt.

(3) Anschließend bestimmt man nacheinander für $k = p-1, p-2, \ldots, 2, 1$ jeweils eine Basis $\mathcal{B}_k$ eines Vektorraums W_k mit $V_{k-1} \oplus \phi(U_{k+1}) \oplus W_k = V_k$, indem man eine Basis von V_{k-1} und die Bilder einer Basis von U_{k+1} unter ϕ zu einer Basis von V_k ergänzt, und definiert anschließend $U_k = \phi(U_{k+1}) \oplus W_k$. Nach Konstruktion gilt dann stets $V_{k-1} \oplus U_k = V_k$.

(4) Für $1 \leq k \leq p$ und jeden Vektor $v \in \mathcal{B}_k$ trägt man jeweils nacheinander $\phi^{k-1}(v), \phi^{k-2}(v), \ldots, \phi(v), v$ als Spaltenvektoren in eine Matrix T ein. Diese Matrix ist dann invertierbar, und $J = T^{-1}AT$ ist eine Matrix in Jordanscher Normalform.

Beispiel für die Berechnung einer Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \chi_A = (x-3)^3$$

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto (A - 3E_3)v$$

$V_k = \ker(\phi^k)$ Der Gauß-Algorithmus liefert

$$V_1 = \ker(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Eig}(A, 3)$$

$$V_2 = \ker(\phi^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad V_3 = \ker(\phi^3) = \mathbb{R}^3$$

Nachrechnen ergibt $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V_2 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ kann durch e_3 zu einer Basis von V_3 ergänzt werden. $\Rightarrow$ e_3 kann zur Bildung einer Jordankette der Länge 3 verwendet werden

Trage $\Phi^2(e_3)$, $\Phi(e_3)$, e_3 als Spalten in eine Matrix T ein, erhalte $T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nachrechnen ergibt

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Konvergenz matrixwertiger Potenzreihen

Proposition (5.16)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine komplexe Potenzreihe vom Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\|A\| < r$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bezüglich der Zeilensummennorm.

__Erinnerung__ Die Zeilensummennorm einer Matrix A in $M_{n,\mathbb{R}}$ oder $M_{n,\mathbb{C}}$ ist definiert durch
$$\|A\| = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;\middle|\; 1 \le i \le n \right\}.$$

Diese Norm ist eine __Operatornorm__ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$, d. h. es gilt
$$\|A\| = \sup\left\{ \|Av\|_\infty \;\middle|\; v \in \mathbb{K}^n,\ \|v\|_\infty = 1 \right\}$$
$$= \sup\left\{ \|Av\|_\infty \;\middle|\; v \in \mathbb{K}^n,\ \|v\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Folgerung:

Bekanntlich besitzt die Exponentialreihe einen unendlichen Konvergenzradius. Daraus folgt, dass für alle $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ die Reihe

$$e^A \quad = \quad \exp(A) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

einen wohldefinierten Wert in $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ besitzt. Man bezeichnet diesen Wert als Matrixexponential von A.

Explizite Form des Matrixexponentials

Es bezeichne $F \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ die Matrix mit Einsen auf der 1. Nebendiagonalen, also die Matrix gegeben durch $f_{ij} = \delta_{i+1,j}$.

Lemma (5.17)

Sei $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J = \lambda E + F \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Dann gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Beweis von Lemma 5.17

(Form des Matrixexponentials e^{tJ} für eine Matrix $J \in M_{n,\mathbb{C}}$ in JNF)

z.zg.: Für $0 \leq k \leq n-1$ hat e^{tJ} auf der k-ten Nebendiagonalen den Eintrag $\frac{1}{k!} t^k e^{\lambda t}$

Überprüfe: F^m $(0 \leq m \leq n-1)$ hat auf der m-ten Nebendiagonalen den Wert 1 und enthält ansonsten nur Nullen

Binomischer Lehrsatz $\Longrightarrow$

$$J^m = (\lambda E + F)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \lambda^{m-k} F^k$$

$\Longrightarrow$ Eintrag $\binom{m}{k} \lambda^{m-k}$ auf der k-ten Nebendiagonalen, falls $m \geq k$, für $0 \leq k \leq n-1$

$\Rightarrow \frac{1}{m!}(tJ)^m$ hat auf der k-ten Nebendiag.
den Eintrag $\frac{1}{(m-k)!\,k!}(\lambda t)^{m-k}\, t^k$ falls $m \geq k$.
$0 \leq k \leq n-1$

Durch Summation erhalten wir auf der k-ten Nebendiag. $\sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!\,k!}(\lambda t)^{m-k}\, t^k =$

$$\frac{t^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!}(\lambda t)^{m-k} = \frac{t^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(\lambda t)^m = \frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}$$