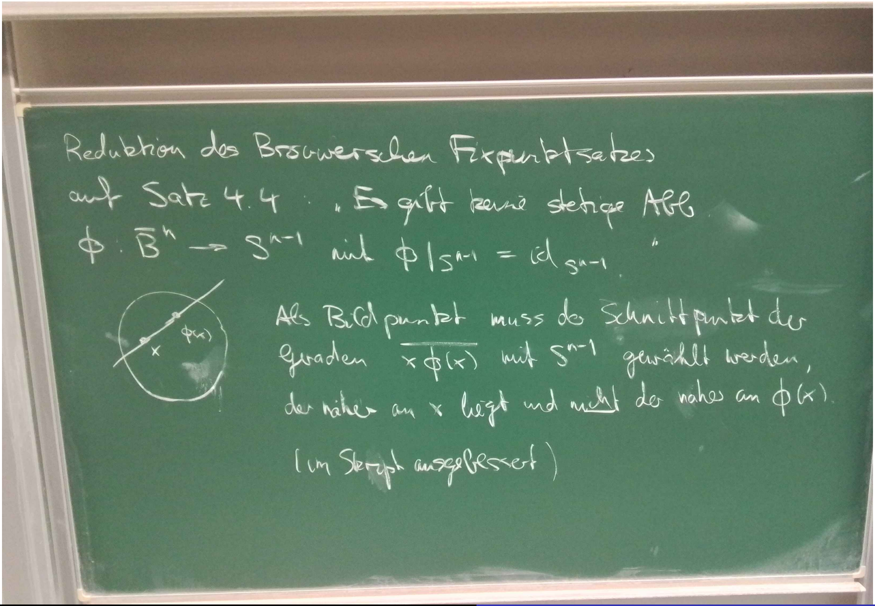
Der Existenzsatz von Peano

Satz (4.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a, b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem mindestens eine Lösung, die jedes Kompaktum in beide Richtungen verlässt.

Korrektur zum Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes



Der Fixpunktsatz von Schauder

Satz (4.14)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge. Sei $\phi : A \to A$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\phi(A)$ relativ kompakt ist. Dann besitzt ϕ einen Fixpunkt.

Die Supremumsmetrik

Notation: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.

- $\mathcal{C}(X, Y) =$ Menge der stetigen Abbildungen $X \to Y$
- $\mathcal{C}_b(X, Y) =$ Menge der beschränkten stetigen Abbildungen

Ist X kompakt, dann stimmen die Mengen überein.

Proposition (4.15)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann ist auf der Menge $\mathcal{C}_b(X, Y)$ durch $d_\infty(f, g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ eine Metrik definiert. Sie wird als Supremumsmetrik bezeichnet.

Definition der gleichgradigen Stetigkeit

Definition (4.16)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $M \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$. Man bezeichnet M als gleichgradig stetig, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $x, x' \in X$ und alle $f \in M$ aus $d_X(x, x') < \delta$ jeweils $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ folgt.

Topologische Eigenschaft der gleichgradigen Stetigkeit

Lemma (4.17)

Sei (X, d_X) ein kompakter und (Y, d_Y) ein beliebiger metrischer Raum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich d_∞ konvergente Folge in $\mathcal{C}(X, Y)$. Dann ist die Menge $M = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig.

Beweis von Lemma 4.17:

(X, d_X) kompakter, (Y, d_Y) bel. metrischer Raum

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{C}(X, Y)$, konvergent bzgl. d_∞

gegen ein $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $M = \{ f_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

z.zg.: M ist gleichgradig stetig

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$

$d_\infty(f, f_n) < \frac{1}{3}\varepsilon$ Sei $n \in \{1, \dots, N\}$. f_n stetig, (X, d_X)

kompakt $\Rightarrow$ f_n ist glm. stetig auf X $\Rightarrow \exists \delta_n \in \mathbb{R}^+ :$

$\forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta_n \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon$

f glm. stetig auf $X \Rightarrow \exists \delta' \in \mathbb{R}^+ : \forall x, x' \in X :$

$d_X(x, x') < \delta' \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon$

Sei nun $\delta = \min\{\delta', \delta_1, \ldots, \delta_{N-1}\}$.

Sei $g \in \Gamma$, und seien $x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$. Beh.: $d_Y(g(x), g(x')) < \varepsilon$

$g \in \Gamma \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: g = f_n$

1. Fall: $n < N$ Dann folgt aus $d_X(x, x') < \delta \leq \delta_n$, dass $d_Y(g(x), g(x')) = d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon$.

2. Fall: $n \geq N$ $d_X(x, x') < \delta \leq \delta_N$ und

$d_Y(g(x), f(x)) = d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \sup\{d_Y(f_N(x), f(x)) \mid x \in X\} = d_\infty(f_N, f) < \frac{1}{3}\varepsilon$

A

mi

nau

ebenso $d_Y(g(x'), f(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon \implies$

$$d_Y(g(x), g(x')) \leq d_Y(g(x), f(x)) + d_Y(f(x), f(x'))$$
$$+ d_Y(f(x'), g(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \quad \square$$

e

Se

ε_k

$\implies$

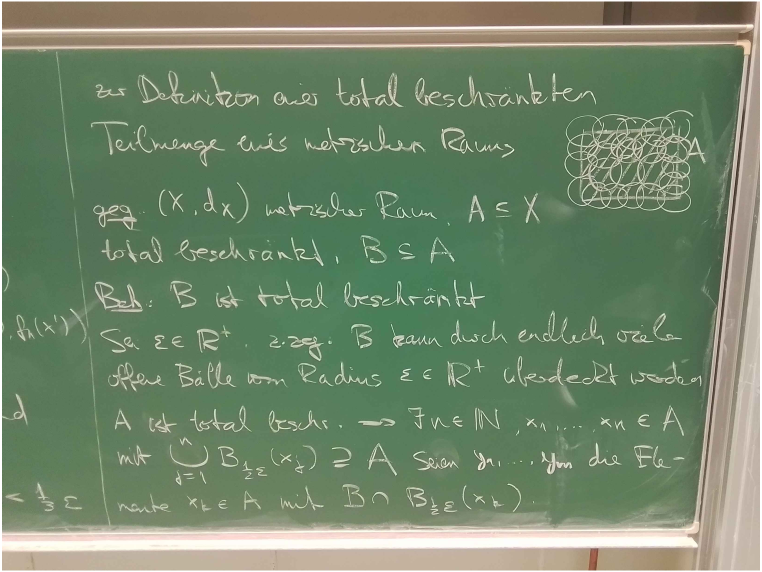
$\implies$

Total beschränkte Teilmengen

Definition (4.18)

Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) bezeichnet man als total beschränkt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, ..., x_n \in A$ existieren, so dass A von den endlich vielen offenen Bällen $B_\varepsilon(x_j) = \{x \in X \mid d(x_j, x) < \varepsilon\}$ überdeckt wird, also $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$ gilt.

Jede Teilmenge $B \subseteq A$ einer total beschränkten Menge ist wiederum total beschränkt.



Korrektur letzte Zeile: „... $x_k \in A$ mit $B \cap B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_k) \neq \varnothing$“

Beh. $\bigcup_{k=1}^{m} B_\varepsilon(z_k) \supseteq B$, wobei z_k jeweils einen Punkt aus $B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y_k) \cap B$ bezeichnet

Sei $b \in B \overset{b \in A}{\Longrightarrow} \exists\, k \in \{1, \dots, m\}$ mit $b \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y_k)$

$z_k \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y_k) \Rightarrow d(z_k, y_k) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow d(b, z_k) \leq d(b, y_k) + d(y_k, z_k) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow b \in B_\varepsilon(z_k)$ $\square$

Der Satz von Heine-Borel für metrische Räume

Satz (4.19)

Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.

Beweis von Satz 4.19, nur „$\Leftarrow$"

Vor: (X, d_X) vollständig und total beschränkt

Ang. X ist nicht kompakt. $\Rightarrow$ $\exists$ offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X ohne endliche Teilüberdeckung

Beh: Es gibt in X eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ nicht durch endlich viele Elemente von $(U_i)_{i \in I}$ überdeckt werden kann.

X total beschr. $\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_k \in X$, so dass $X = \bigcup_{j=1}^{k} \bar{B}_{\frac{1}{2}}(x_j)$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$, so dass

$\bar{B}_{\frac{1}{2}}(x_j)$ nicht durch endlich viele Elemente aus $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt werden kann

Ang $y_1, \dots, y_n$ bereits konstruiert, $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ nicht durch endl viele U_i überdeckbar. $\bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ ist total beschr. $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_k \in \bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$ (andere als für $n=1$) mit $\bigcup_{j=1}^{k} \bar{B}_{2^{-(n+1)}}(x_j) \supseteq \bar{B}_{2^{-n}}(y_n)$

Wieder muss es ein j geben, so dass $\bar{B}_{2^{-(n+1)}}(x_j)$ nicht endlich überdeckbar ist. Setze $y_{n+1} = x_j$ $(\Rightarrow$ Beh.$)$

Nach Konstruktion gilt $y_n \in \bar{B}_{2^{-m}}(y_m)$ für $n > m$ $\Rightarrow$ $d(y_n, y_m) \leq 2^{-m}$. Daraus folgt, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d) ist. (X, d) vollständig $\Rightarrow$ Die Folge hat einen Grenzwert y. $(U_i)_{i\in I}$ Überdeckung $\Rightarrow y \in U_{i_0}$

für ein $i_0 \in I$. U_{i_0} ist offen $\Rightarrow$

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\delta(y) \subseteq U_{i_0}$. Wähle

$n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n} < \frac{1}{2}\delta$ und $d(y, y_n) < \frac{1}{2}\delta$

<u>Beh</u>: $\overline{B}_{2^{-n}}(y_n) \subseteq U_{i_0}$

Sei $z \in \overline{B}_{2^{-n}}(y_n) \Rightarrow d(z, y) \leq$

$d(z, y_n) + d(y_n, y) \leq 2^{-n} + \frac{1}{2}\delta$

$< \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta \Rightarrow z \in B_\delta(y) \Rightarrow$

$z \in U_{i_0}$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Aber die Beh. widerspricht der Aussage, dass $\overline{B}_{2^{-n}}(y_n)$ in $(U_i)_{i \in I}$ keine endl. Teilüberdeckung besitzt. $\square$

Der Satz von Arzela-Ascoli

Satz (4.20)

Es sei (X, d_X) ein kompakter und (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ ist genau dann kompakt bezüglich der Supremumsmetrik d_∞, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für alle $x \in X$ ist $M(x) = \{f(x) \mid f \in M\} \subseteq Y$ relativ kompakt.

(ii) Die Menge M ist gleichgradig stetig.

(iii) Die Menge M ist abgeschlossen.

Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli,

nur „$\Leftarrow$"

(X, d_X) kompakter, (Y, d_Y) vollst. metr. Raum

$M \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ Voraussetzungen:

(i) $M(x) = \{ f(x) \mid f \in M \}$ ist relativ kompakt in Y, für jedes $x \in X$

(ii) M ist gleichgradig stetig

(iii) M ist abgeschlossen in $\mathcal{C}(X, Y)$

Nach Satz 4.19 genügt es zu zeigen, dass M vollständig und total beschränkt ist. Der Beweis der Vollständigkeit läuft parallel zum Bew. von Satz 3.7, siehe Skript.

zu totalen Beschränktheit:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

Vor. (ii) $\rightarrow \forall x \in X : \exists \delta_x \in \mathbb{R}^+ : \forall x' \in X \; \forall f \in M :$

$$d(x, x') < \delta_x \longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \tfrac{1}{8} \varepsilon$$

$(B_{\delta_x}(x))_{x \in X}$ ist offene Überd. von X, X kompakt

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_r \in X : X = \bigcup_{j=1}^{r} B_{\delta_{x_j}}(x_j)$

$M(x_j) \subseteq Y$ relativ kompakt $\Rightarrow K_M = \bigcup_{j=1}^{r} \overline{M(x_j)}$

ist kompakt $(B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y))_{y \in K_M}$ ist offene Überd. von K_M

$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}, y_1, \ldots, y_s \in K_M$ mit $\bigcup_{k=1}^{s} B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_k) \supseteq K_M$

Für jede Abb. $\varphi : \{1, \ldots, r\} \rightarrow \{1, \ldots, s\}$ setze

...um

...ränkt

...ft

...e Skript)

$\frac{1}{2}\delta$

$\Rightarrow$

...ssage.

... Teil-

$\square$

$$M_\varphi = \{ f \in M \mid f(x_j) \in B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_{\varphi(j)}),\ 1 \le j \le r \}$$

Dann gilt $M = \bigcup_\varphi M_\varphi$, denn für jedes $f \in M$ und $1 \le j \le r$ gibt es jeweils ein $k \in \{1, \dots, r\}$ mit $f(x_j) \in B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_k)$ wegen $f(x_j) \in M(x_j) \subseteq KM$.

Da die Menge der Abb. φ endlich ist, genügt es z.zg., dass jedes M_φ durch endlich viele offene Bälle bzgl. d_∞ überdeckt werden kann.

Sei also φ fest vorgeg., und $f, g \in M_\varphi$.

Beh.: $d_\infty(f, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$ Sei $x \in X$.

$\exists j \in \{1, \dots, r\}$ mit $x \in B_{\delta_{x_j}}(x_j) \Rightarrow d(x, x_j) < \delta_{x_j}$

$\Rightarrow d_Y(f(x), f(x_j)) < \frac{1}{8}\varepsilon$ genauso:

$d_Y(g(x), g(x_j)) < \frac{1}{8}\varepsilon$

Nach Def. von M_φ gilt $f(x_j), g(x_j) \in B_{\frac{1}{8}\varepsilon}(y_{\varphi(j)})$

$\Rightarrow d_Y(f(x_j), g(x_j)) \leq d_Y(f(x_j), y_{\varphi(j)}) + d_Y(y_{\varphi(j)}, g(x_j))$

$< \frac{1}{8}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon = \frac{1}{4}\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), g(x)) \leq$

$d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), g(x_j)) + d_Y(g(x_j), g(x)) <$

$\frac{1}{8}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$

Sei nun $f_\varphi \in M_\varphi$ beliebig gewählt. Dann gilt für jedes $f \in M_\varphi$

$d_\infty(f_\varphi, f) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow M_\varphi \subseteq B_\varepsilon(f_\varphi)$