

Definition (2.8)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, dann bezeichnet man die 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

als **äußere Ableitung** von f . Eine 1-Form ω auf U wird **exakt** genannt, wenn eine partiell differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $dg = \omega$ existiert. Die Funktion g bezeichnet man in diesem Fall als **Stammfunktion** von ω .

Satz (2.9)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ω eine stetige exakte 1-Form auf U und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω . Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow U$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Kurve γ ist eine Lösung der DGL $\omega(x, y) = 0$.
- (ii) Die Funktion $F \circ \gamma$ ist auf I konstant.

Erinnerung: Der **Gradient** einer Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\nabla F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $(\nabla F)_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ für $1 \leq k \leq n$.

Definition (2.10)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man bezeichnet die Differenzialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y) y' = 0$$

als **exakt**, wenn eine C^1 -Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\nabla F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

existiert. Man bezeichnet F dann als **Stammfunktion** der DGL.

Folgerung (2.11)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$ eine exakte DGL und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zugehörige Stammfunktion. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL.
- (ii) Die Funktion $\tilde{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto F(t, \varphi(t))$ ist konstant.

Satz (2.12)

Seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$, die eine exakte Differenzialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0 \quad \text{definieren.}$$

Sei außerdem $(a, b) \in U$ ein Punkt mit $g(a, b) \neq 0$. Dann existiert eine auf einem offenen Intervall I definierte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch den Punkt (a, b) , und dies ist auf dem Intervall I die einzige Lösung durch diesen Punkt.

Beweis von Satz 2.12

geg. exakte DGL $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$
mit Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (offen)

$p \in U$, $p = (a, b)$ mit $g(a, b) \neq 0$

F Stammfkt. der DGL, d.h. $\nabla F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

Existenz eines Lsg.: Folgerung 2.11 \Rightarrow Es genügt,
dass eine Fkt. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall
 $I \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so dass $t \mapsto F(t, \varphi(t))$

Satz über implizite Fkt. \rightarrow \exists offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$
angewandt auf F , mit $\partial_2 F(a, b) = g(a, b) \neq 0$

mit $a \in I$, $b \in J$ und eine Fkt. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $(x, y) \in I \times J$ die Äquiv $y = \varphi(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$ erfüllt ist. Dann ist $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ auf I konstant null.

Eindeutigkeit: Ang. $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine weitere Lsg. der DGL ^{mit $\psi(a) = b$} . Folgerung 2.11 $\Rightarrow t \mapsto F(t, \psi(t))$ ist auf I konstant, sei $c \in \mathbb{R}$ der konstante Wert $\Rightarrow c = F(a, \psi(a)) = F(a, b) = F(a, \varphi(a)) = 0$. Da ψ stetig ist, existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\psi(t) \in J \forall t \in I'$ (da J offen). Für alle $(x, y) \in I' \times J$ gilt nun $y = \varphi(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x) \Rightarrow \varphi|_{I'} = \psi|_{I'}$.

Ang. $I' \not\subseteq I$ (sonst sind wir fertig.)

Definiere $t_0 = \sup \{ t \in I \mid t > a, \varphi|_{[a,t]} = \psi|_{[a,t]} \}$

Nehme an, dass weder $t_0 = +\infty$ oder t_0 der rechte Rand von I ist.

Stetigkeit von $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi(t_0) = \psi(t_0)$

Dieselbe Überlegung, die oben auf den Punkt (a, b) angewendet wurde, können

wir auch auf $(t_0, \varphi(t_0)) = (t_0, \psi(t_0))$

anwenden. $\Rightarrow \exists$ offenes Intervall $I'' \subseteq I$

mit $t_0 \in I''$, auf dem φ und ψ übereinstimmen

$\Rightarrow \varphi$ und ψ stimmen überein auf einem ^{offenen} Intervall,
dass $[a, t_0]$ enthält, aber darüber hinausgeht
 \Downarrow zur Def. von t_0

also: $\varphi(t) = \psi(t) \forall t \in I$ mit $t > a$

zeige analog: $\varphi(t) = \psi(t) \forall t \in I$ mit $t < a$

□

- Sei X ein topologischer Raum, und seien $\gamma, \delta : [a, b] \rightarrow X$ stetige Funktionen. Eine **Homotopie** zwischen γ und δ ist eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H(s, 0) = \gamma(s)$ und $H(s, 1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a, b]$.
- Gilt zusätzlich $H(a, t) = \gamma(a) = \delta(a)$ und $H(b, t) = \gamma(b) = \delta(b)$ für alle $t \in [0, 1]$, dann spricht man von einer Homotopie **relativ zu den Endpunkten**.
- Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, also eine Kurve mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, wird **nullhomotop** oder **zusammenziehbar** genannt, wenn eine Homotopie zwischen γ und der konstanten Abbildung $c : [a, b] \rightarrow X, t \mapsto \gamma(a)$ relativ zu den Endpunkte existiert.

- Der topologische Raum X wird als **einfach zusammenhängend** bezeichnet, wenn er zusammenhängend und jede geschlossene Kurve in X nullhomotop ist.
- Es ist zum Beispiel leicht zu zeigen, dass **sternförmige** und insbesondere **konvexe** Gebiete im \mathbb{R}^n einfach zusammenhängend sind.

Satz (2.13)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und ω eine 1-Form auf U , $\omega = f dx + g dy$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist ω exakt, dann gilt $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ auf ganz U . Ist U einfach zusammenhängend, dann gilt auch die Umkehrung.

Definition (2.14)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\omega = f dx + g dy$ eine 1-Form auf U , mit stetigen Funktionen f und g . Eine stetige Funktion

$m : U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wird **integrierender Faktor** für ω genannt, wenn $m\omega$ eine exakte 1-Form ist.

Bestimmung eines integrierenden Faktors

ges. $m: U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\frac{\partial(mf)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(mg)}{\partial x}(x,y)$

für alle $(x,y) \in U$

auf Grund der Produktregel äquiv. Bed.

$$f(x,y) \cdot \frac{\partial m}{\partial y}(x,y) + m(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

$$g(x,y) \cdot \frac{\partial m}{\partial x}(x,y) + m(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

Hängt m nur von x ab, dann vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$m(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = m'(x) g(x, y) + m(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{g(x, y)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right)$$

$$\Leftrightarrow (\ln \circ m)'(x) = \frac{1}{g(x, y)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right)$$

konkretes Beispiel:

$$\omega = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y \, dx + (3y^2 + x) \, dy$$

$$\text{hier: } f(x, y) = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y$$

$$g(x, y) = 3y^2 + x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4xy + (2x^2 + 2xy^2 + 1) \\ &= 6xy^2 + 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1$$

$$\text{Ansatz s.o.} \rightarrow (\ln \circ \omega)'(x) = \frac{1}{3y^2 + x} (6xy^2 + 2x^2)$$

$$= 2x \rightsquigarrow (\ln \circ m)(x) = x^2 \rightsquigarrow m(x) = e^{x^2}$$

Ergebnis der Rechnung: $e^{x^2} \omega$ ist eine
exakte 1-Form (mit $F(x,y) = (x+y^2)y e^{x^2}$
als Stammfunktion)

Er
t

Im Folgenden bezeichnet \mathbb{K} einen der beiden Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition (3.1)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{nk}$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

als (explizite) \mathbb{K} -wertiges System von n Differenzialgleichung der Ordnung k . Dabei wird U der Definitionsbereich des Systems genannt.

Definition (3.2)

Ein **Anfangswertproblem** besteht aus der Angabe eines \mathbb{K} -wertiges System von n Differenzialgleichung wie in Definition 3.1 und eines Punktes $(a, b) \in U$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{K}^{kn}$. Eine **Lösung** dieses Anfangswertproblems ist eine (mindestens) k -mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, definiert auf einem offenen Intervall I , mit der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$$

und

$$\varphi_j^{(k)}(t) = f_j(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$$

für $1 \leq j \leq n$ und alle $t \in I$ erfüllt ist. Eine solche Lösung wird als **maximal** bezeichnet, wenn keine Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.

Beispiel für Systeme zweier DGLs in zwei Variablen

$$(1) \quad y_1'' = y_1 + y_2', \quad y_2'' = -3y_1 + 3y_2' + 7$$

hier: $n = k = 2$, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^2$

Die DGL hat die Form $y'' = f(x, y, y')$

mit $f(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = (y_{01} + y_{02}, -3y_{01} + 3y_{02} + 7)$

Eine Lsg einer solchen DGL ist eine

Fkt $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall

$I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$(xy^2 + 2x^2)$

$$= e^{x^2}$$

$$p_1''(t) = p_1(t) + p_2'(t), \quad p_2''(t) = -3p_1(t) + 3p_2'(t) + 7$$

$$(2) \quad y_1'' = y_2, \quad y_2'' = y_1$$

$$\text{hier: } n=k=2, \quad U = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^2$$

kompakte Form: $y'' = f(x, y, y')$ mit

$$f(x, y_01, y_02, y_12, y_22) = (y_02, y_01)$$

Eine Lsg wäre zum Beispiel $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Korrespondenz zwischen Systemen erster und höherer Ordnung

Jedem System von n Differenzialgleichungen k -ter Ordnung wie oben kann auf folgende Weise ein System $y' = g(x, y)$ von kn Differenzialgleichungen zugeordnet werden: Man definiert eine Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{K}^{kn}$ durch

$$g_{i,j}(x, y) = y_{i+1,j} \quad \text{für } 0 \leq i \leq k-2, 1 \leq j \leq n$$

$$g_{k-1,j}(x, y) = f_j(x, y) \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

Dabei wird für die Nummerierung der Indizes der Raum \mathbb{K}^{kn} mit $(\mathbb{K}^n)^k$ gleichgesetzt.

Satz (3.3)

Sei $y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$ ein n -elementiges System von DGLs k -ter Ordnung der oben angegebenen Form und $y' = g(x, y)$ das zugeordnete kn -elementige System.

- (i) Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lösung des n -elementigen Systems, dann ist die Abbildung $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^{kn}$ gegeben durch $\psi(t) = (\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ für $t \in I$, in ausgeschriebener Form $\psi_{i,j}(t) = \varphi_j^{(i)}(t)$ $0 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq n$, eine Lösung des kn -elementigen Systems.
- (ii) Ist umgekehrt $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^{kn}$ eine Lösung des nk -elementigen Systems, dann ist durch $\varphi_j(t) = \psi_{0,j}(t)$ für $1 \leq j \leq n$ eine Lösung des n -elementigen Systems gegeben.

Übersetzung der Systeme (1) und (2) in Systeme erster Ordnung.

zu (1) Definiere $g_0, g_1: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$g_{0,1}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{11}$$

$$g_{0,2}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{12}$$

$$g_{1,1}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{01} + y_{12}$$

$$g_{1,2}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = -3y_{01} + 3y_{12} + 7$$

gesamtes System in ausgeschriebener Form:

$$y_{01}' = y_{11}, \quad y_{02}' = y_{12}$$

$$y_{11}' = y_{01} + y_{12}, \quad y_{12}' = -3y_{01} + 3y_{12} + 7$$

zu (2) Definiere $g_0, g_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$g_{01}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{11}$$

$$g_{02}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{12}$$

$$g_{11}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{02}$$

$$g_{12}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{01}$$

in ausgeschriebener Form: $y_{01}' = y_{11}, y_{02}' = y_{12},$

$$y_{11}' = y_{02}, y_{12}' = y_{01}$$

konkrete Lsg: $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi_{01}(t) \\ \varphi_{02}(t) \\ \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{12}(t) \end{matrix}$