Modifikation einer DGL durch Substitution

Satz (2.7)

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $V \subseteq I \times \mathbb{R}$ ein Gebiet und $f : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
- Sei $\phi : V \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung derart, dass für jedes $x \in I$ mit

$$V_x \quad = \quad \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in V\} \quad \neq \quad \varnothing$$

die Abbildung $\phi_x : V_x \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \phi(x, y)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf ihre Bildmenge $\phi_x(V_x)$ ist.

Für jedes offene Intervall $J \subseteq I$ und jede Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sind dann äquivalent:

(i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL $y' = f(x, y)$.

(ii) Die Funktion $\eta : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \phi(t, \varphi(t))$ ist eine Lösung von

$$y' \quad = \quad (\phi_x^{-1})'(y)^{-1} f(x, \phi_x^{-1}(y)) + \tfrac{\partial \phi}{\partial x}(x, \phi_x^{-1}(y)).$$

Beweis von Satz 2.7:

[Erinnerung mehrdim. Kettenregel (Formel):

$$\underbrace{(F\circ G)'(a)}_{\text{lin. Abb. } V\to W'} = \underbrace{F'(G(a))}_{\text{lin. Abb. } W\to W'} \circ \underbrace{G'(a)}_{\text{lin. Abb. } V\to W}$$

$G: V \to W$, $F: W \to W'$; V, W, W' endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorr.

alternative Notation: $d(F\circ G)(a) = dF(G(a)) \circ dG(a)$]

$V \subseteq I \times \mathbb{R}$ Gebiet, $f: V \to \mathbb{R}$ stetige Fkt.

$\phi: V \to \mathbb{R}$, $V_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in V\}$

Voraussetzung: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $V_x \neq \emptyset$ ist

$\phi_x(y) = \phi(x,y)$ ein Diffeomorphism zwischen V_x und $\phi_x(V_x)$

$V \subseteq I \times \mathbb{R}$ Gebiet. $f: V \to \mathbb{R}$ stetige Fkt.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" $\varphi: J \to \mathbb{R}$ sei eine Lsg. von $y' = f(x,y)$ definiert auf einem offenen Intervall $J \subseteq I$

Beh.: $\eta: J \to \mathbb{R}$ geg. durch $\eta(t) = \phi(t, \varphi(t))$ ist Lsg der DGL

$$y' = \left((\phi_x^{-1})'(y)\right)^{-1} f(x, \phi_x^{-1}(y)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \phi_x^{-1}(y)) \qquad (*)$$

Sei $t \in J$. zzg.: $\eta'(t) = \left((\phi_t^{-1})'(\eta(t))\right)^{-1} f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t)))$

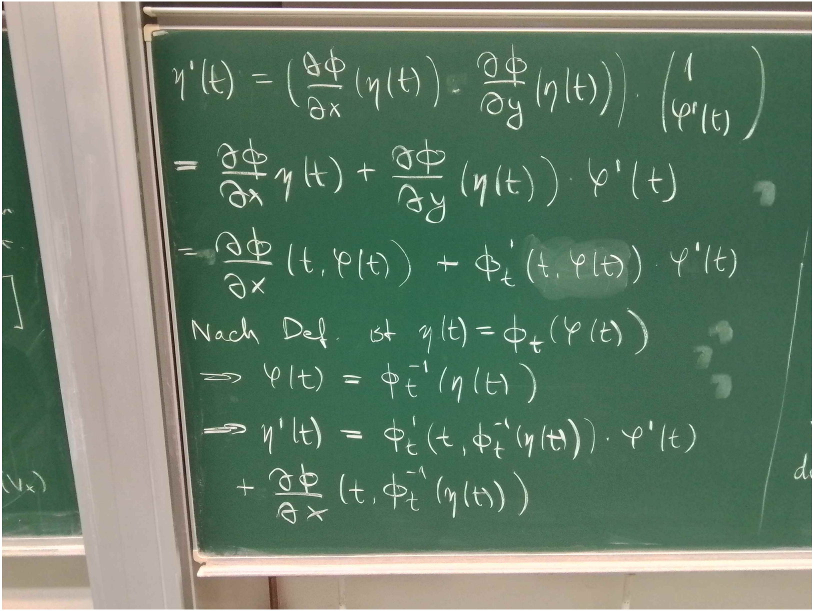
Die Fkt. η

ist Komposition von $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ und von ϕ. Deren Ableitungen sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ an der Stelle t bzw. $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(\eta(t)) \;\; \frac{\partial \phi}{\partial y}(\eta(t))\right)$ an der Stelle $\eta(t)$. mehrdim. Kettenregel $\Rightarrow$

Korrektur:

In den letzten beiden Zeilen ersetze $\eta(t)$ durch $(t, \varphi(t))$.

Auch hier: Ersetze $\eta(t)$ durch $(t, \varphi(t))$ in den ersten beiden Zeilen.



noch zu überprüfen:

$$\phi_t'(t,\phi_t^{-1}(\eta(t)))\cdot\varphi'(t) = (\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} f(t,\phi_t^{-1}(\eta(t)))$$

φ' Lsg von $y' = f(x,y) \Rightarrow \varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$

$$= f(t,\phi_t^{-1}(\eta(t)))$$

noch zu überprüfen:

$$(\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} = \phi_t'(\phi_t^{-1}(\eta(t)))$$

$$\phi_t\circ\phi_t^{-1} = id_{\phi_t(V_t)} \Rightarrow (\phi_t\circ\phi_t^{-1})' = 1$$

$$\Rightarrow \phi_t'(\phi_t^{-1}(\eta(t)))\,(\phi_t^{-1})'(\eta(t)) = 1$$

$$\Rightarrow (\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} = \phi_t'(\phi_t^{-1}(\eta(t))) \qquad \square$$

Anwendungen der Substitutionsregel:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$

Betrachte die DGL $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$

Verwende für die Subst. die Abb.

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$

$\phi_x(y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ Es gilt $z = \phi_x(y) \Leftrightarrow$

$z = \alpha x + \beta y + \gamma \Leftrightarrow z - \alpha x - \gamma = \beta y \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{\beta}(z - \alpha x - \gamma)$ Also ist $\phi_x^{-1}(z) = \frac{1}{\beta}(z - \alpha x - \gamma)$

die Umkehrfkt. von ϕ_x, mit Ableitung $(\phi_x^{-1})'(z) = \frac{1}{\beta}$

$\eta(t)))$

$\varphi(t))$

$\square$

Einsetzen in die Formel aus Satz 2.7 liefert die DGL

$$z' = \beta f(z) + \alpha$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen. Ist $\varphi: J \to \mathbb{R}$ ein Lsg. der ursprünglichen DGL, dann ist $\eta(t) = \Phi(t, \varphi(t)) = \alpha t + \beta \varphi(t) + \gamma$ eine Lsg. der neuen. Umkehrt liefert eine Lsg. η der neuen DGL durch $\varphi(t) = \frac{1}{\beta}(\eta(t) - \alpha t - \gamma)$ eine Lsg. der alten.

(2) $V \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet, ohne Schnitt mit der y-Achse

$f : V \to \mathbb{R}$ stetige Fkt. mit $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$

für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Betrachte die DGL $y' = f(x, y)$ und die

Substitutionsfkt. $\phi : V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$

$\forall (x, y) \in V : \phi_x(y) = \frac{y}{x}$ Die Umkehrfkt. von

$\phi_x : V_x \to \phi_x(V_x)$ ist also geg. durch $\phi_x^{-1}(z) = xz$.

Ableitung der Umkeh-fkt. $(\phi_x^{-1})'(z) = x$

Einsetzen in die Formel aus Satz 2.7 liefert die

neue DGL $z' = \frac{1}{x}(f(1, z) - z)$

Ist $\eta : J \to \mathbb{R}$ eine Lsg. der neuen DGL, dann
$\varphi(t) = t\,\eta(t)$ eine Lösung der alten.

Definition (2.8)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, dann bezeichnet man die 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

als äußere Ableitung von f. Eine 1-Form ω auf U wird exakt genannt, wenn eine partiell differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $dg = \omega$ existiert. Die Funktion g bezeichnet man in diesem Fall als Stammfunktion von ω.

Satz (2.9)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ω eine stetige exakte 1-Form auf U und $F : U \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω. Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to U$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Kurve γ ist eine Lösung der DGL $\omega(x, y) = 0$.

(ii) Die Funktion $F \circ \gamma$ ist auf I konstant.

Beweis von Satz 2.9:

geg: $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ω stetige 1-Form auf U

ω außerdem exakt, mit $F: U \to \mathbb{R}$ als Stammfkt

$I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $\gamma: I \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. zzg: Äquivalenz der beiden Aussagen

(1) γ ist Lsg. von $\omega(x, y) = 0$.

(2) $F \circ \gamma$ ist konstant auf I

(2

Sei

Nac

Lsg

kons

F Stammfkt. von $\omega \Rightarrow \omega = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\, dy$

(1) $\Rightarrow$ (2) γ ist Lsg. $\Rightarrow \forall t \in I$:

$\omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \ \forall t \in I \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot dx(\gamma'(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot dy(\gamma'(t)) = 0$

$\forall t \in I \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)$

$= 0 \ \forall t \in I$, wobei γ_1, γ_2 die Komponenten von γ sind

Andererseits gilt für jedes $t \in I$ auf Grund

also

dass

(2)

$= 0$

der mehrdim. Kettenregel

$$(F\circ\gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) \;\; \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))\right)\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t)$$

also: $(F\circ\gamma)'(t) = 0 \;\forall t\in I$. Daraus folgt, dass $F\circ\gamma$ auf I konstant ist.

<u>(2) $\Rightarrow$ (1)</u> $F\circ\gamma$ konstant auf $I \Rightarrow (F\circ\gamma)'(t) = 0 \;\forall t\in I \overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \gamma$ ist Lsg. von $\omega(x,y) = 0$.

$\square$

Exakte Differenzialgleichungen

Erinnerung: Der Gradient einer Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\nabla F : U \to \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $(\nabla F)_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ für $1 \leq k \leq n$.

Definition (2.10)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man bezeichnet die Differenzialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' \quad = \quad 0$$

als exakt, wenn eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla F \quad = \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

existiert. Man bezeichnet F dann als Stammfunktion der DGL.

Lösung exakter Differenzialgleichungen

Folgerung (2.11)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ eine exakte DGL und $F : U \to \mathbb{R}$ eine zugehörige Stammfunktion. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL.

(ii) Die Funktion $\tilde{\varphi} : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ ist konstant.

Beweis der Folgerung 2.11:

z.zg: Äquivalenz der Aussagen

(1) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung der DGL

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0 \quad (*)$$

(2) $F \circ \tilde{\varphi}$ ist auf I konstant, wobei $\tilde{\varphi} : I \to \mathbb{R}^2$ geg. durch $\tilde{\varphi}(t) = (t, \varphi(t))$

Sei $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$.

Nach Satz 2.9 ist $\tilde{\varphi}$ genau dann eine Lsg. von $\omega(x,y) = 0$, wenn $F \circ \tilde{\varphi}$ auf I konstant ist. Zu zeigen ist also die Äquiv.

φ ist Lsg. von $(*)$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ ist Lsg. von $\omega(x,y) = 0$

$\tilde{\varphi}$ Lsg. von $\omega(x,y)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\, t \in I: \ f(\tilde{\varphi}(t)) \cdot dx(\tilde{\varphi}'(t))$

↑ Def. von ω

$+ \, g(\tilde{\varphi}(t))\, dy(\tilde{\varphi}'(t)) = 0 \Longleftrightarrow f(t, \varphi(t)) \cdot \tilde{\varphi}_1'(t)$

$+ \, g(t, \varphi(t)) \cdot \tilde{\varphi}_2'(t) = 0 \ \forall\, t \in I \Longleftrightarrow$

$f(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g(t, \varphi(t))\, \varphi'(t) \ \forall\, t \in I$

Dies ist äquivalent dazu, dass φ eine Lsg. von $(*)$ ist. $\square$

Anwendungsbeispiel zu (2.11):

$$(2xy + e^x) + x^2 y' = 0$$

hier: $f(x,y) = 2xy + e^x$, $g(x,y) = x^2$

überprüfe: $F(x,y) = e^x + x^2 y$ ist Stammfkt. der DGL, d.h.

es gilt $\frac{\partial F}{\partial x} = f$, $\frac{\partial F}{\partial y} = g$

Laut (2.11) ist $\varphi: I \to \mathbb{R}$ genau eine Lsg., wenn $t \mapsto$

$F(t, \varphi(t))$ auf I konstant ist, d.h. $\exists c \in \mathbb{R}$

mit $F(t, \varphi(t)) = c \ \forall t \in I \Leftrightarrow e^t + t^2 \varphi(t) = c$

Ist φ eine Lsg. durch $(1,0)$, dann ist $c = F(1,0) = e$

$e^t + t^2 \varphi(t) = e \Leftrightarrow \varphi(t) = \frac{e - e^t}{t^2}$, ist Lsg. auf $I = \mathbb{R}^+$

Einsetzen in die Formel aus Satz 2.7 liefert die neue DGL $z' = \frac{1}{x}(f(1,z) - z)$

Bem: Für eine exakte DGL kann eine Stammfkt. häufig durch Integration gefunden werden

geg. offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$, $b \in J$

$f, g : I \times J \to \mathbb{R}$ stetige Fkt

ges: Fkt. F mit $\nabla F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ HDI $\Rightarrow$ Ansatz:

$$F(x,b) = \int_a^x \frac{\partial F}{\partial x}(t,b)\,dt = \int_a^x f(t,b)\,dt$$

$$F(x,y) = F(x,b) + \int_b^y \frac{\partial F}{\partial y}(x,t)\,dt$$

$$= F(x,b) + \int_b^y g(x,t)\,dt \quad \forall (x,y) \in I \times J$$