

Definition (2.1)

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = f(x)g(y)$$

eine Differenzialgleichung mit **getrennten Variablen**.

Satz (2.2)

Seien f, g wie oben definiert und außerdem $(a, b) \in I \times J$ mit $g(b) \neq 0$. Sei $J' \subseteq J$ ein Intervall mit $b \in J'$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J'$, und seien $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J' \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad G(y) = \int_b^y g(t)^{-1} dt.$$

Dann besitzt G eine Umkehrfunktion $H : G(J') \rightarrow J'$, und es existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J')$. Darüber hinaus ist die Funktion $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi = H \circ F$ die **einzigste** durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL.

und ecktsseitigen Ableitung in b bzw. c .

Klausur: voraussichtlich Do 30. Juli 16³⁰ - 18³⁰

Bem. In Allgemeinen gibt es für eine DGL $y' = f(x, y)$ unendl. viele Lsg durch einen Punkt (a, b) .

Bsp. $y' = \sqrt{|y|}$ auf $D = \mathbb{R}^2$

zeige. Diese DGL hat unendlich viele Lsg.

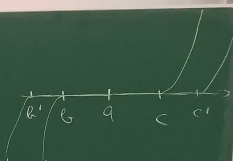
durch den Punkt $(a, 0)$, falls $a \in \mathbb{R}$ bel vorgeg.

Eine Lösung ist die Nullfunktion.

Seien nun b, c bel gewählt mit $b < a < c$.

Definiere dann $\varphi_{b,c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{bc}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-b)^2 & \text{falls } t < b \\ 0 & \text{falls } b \leq t < c \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{falls } t \geq c \end{cases}$$



~~$\varphi_{bc}'(t) = \sqrt{|\varphi_{bc}(t)|}$~~ $\varphi_{bc}'(t) \stackrel{(\ast)}{=} \sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ und } \varphi_{bc}(a) = 0$

Die Gl. $\varphi_{bc}'(a) = 0$ ist nach Def. erfüllt, da $b < a < c$.

Sei nun $t \in \mathbb{R}$. 1. Fall: $b < t < c$ Dann ist $\varphi_{bc}'(t) = 0$ und $\sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} = 0$

2. Fall: $t > c$ Dann ist $\varphi_{bc}'(t) = \frac{1}{2}(t-c)$ und $\sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} = \sqrt{\frac{1}{4}(t-c)^2} = \frac{1}{2}|t-c| = \frac{1}{2}(t-c)$

3. Fall: $t < b$ Dann ist $\varphi_{bc}'(t) = -\frac{1}{2}(t-b)$ und $\sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} = \sqrt{-\frac{1}{4}(t-b)^2} = \frac{1}{2}|t-b| = -\frac{1}{2}(t-b)$

4. Fall: $t \in \{b, c\}$ Dieser Fall ergibt sich durch Betrachtung der links- und rechtsseitigen Ableitung in b bzw. c .

Kriterium für die Eindeutigkeit im Fall $g(y) = 0$

Proposition (2.3)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 2.2 gewählt. Ist $g(b) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass $g(y) > 0$ für alle $y \in]b, b + \alpha]$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_b^{b+\alpha} \frac{dy}{g(y)}$$

divergiert, dann gibt es **keine** Lösung $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\varphi(t) > b$ für ein $t \in I'$.

Beweis von Prop 2.3

Vor: $x \in \mathbb{R}^+$, $g(y) > 0 \forall y \in]b, b+x]$

Angenommen, $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lösung von $y' = f(x)g(y)$ mit $\varphi(a) = b$, wobei $I' \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $a \in I'$ und $\varphi(t_1) > b$ für ein $t_1 \in I'$.

O.B.d.A. $t_1 > a$ (Fall $t_1 < a$ analog)

weitere Voraussetzung war $\int_b^{b+x} \frac{dy}{g(y)} = +\infty$

Setze $t_0 = \sup \{ t \in I' \mid \varphi(t) = b \}$

Dann gilt $\varphi(t_0) = b$ da φ auf I' unbesondere stetig ist, aber $\varphi(t) > b$ für alle

$t \in I'$ mit $t > t_0$ (dann. Ang. $\varphi(t) = b \Rightarrow$
 \Downarrow zw. Def. von t_0 . Ang. $\varphi(t) < b$. Dann existiert
kt. ZWS auch ein $t \in I'$ mit $\varphi(t) = b$, $t > t_0$.)

Wir können t_1 so vorgeben, dass $t_1 < b + \alpha$
ist. φ ist Lsg. der DGL $\Rightarrow \forall t \in]t_0, b + \alpha]$

$$\varphi'(t) = f(t) \cdot g(\varphi(t)) \Rightarrow \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} = f(t) \Rightarrow$$

$$\int_x^{t_1} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_x^{t_1} f(t) dt \quad \Rightarrow \text{Subst.-regel}$$

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(t_1)} \frac{ds}{g(s)} = F(t_1) - F(x)$$

Für $t_1 \rightarrow b + \alpha$ geht die linke Seite gegen $+\infty$,
während die rechte Seite beschränkt bleibt, da
 f stetig ist. \Downarrow \square

Korrekturanmerkungen zur letzten Tafel:

- Das Ende der 4. Zeile muss „ $\forall t \in]t_0, t_1] : \varphi(t) < b + \alpha$ “ lauten. (Hier wird wieder die Stetigkeit von φ verwendet. Wegen $\varphi(t_0) = b$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\delta < t_1 - t_0$ und $b < \varphi(t) < b + \alpha$ für alle $t \in]t_0, t_0 + \delta[$. Wir können dann t_1 durch $t_0 + \delta$ ersetzen.)
- Am Ende der 5. Zeile muss es $\forall t \in]t_0, t_1]$ heißen.
- In der drittletzten Zeile heißt es richtig „Für $x \rightarrow t_0$ geht die linke Seite...“. Die linke Seite divergiert dann wegen

$$\int_b^{\varphi(t_1)} \frac{ds}{g(s)} = +\infty.$$

- Genauso zeigt man: Ist $g(b) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass $g(y) < 0$ für alle $y \in [b - \alpha, b[$ gilt und das uneigentliche Integral $\int_{b-\alpha}^b g(y)^{-1} dy$ divergiert, dann gibt es keine Lösung $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\varphi(t) < b$ für ein $t \in I'$.
- Sind beide Bedingungen zugleich erfüllt, dann ist die konstante Funktion mit dem Wert b also tatsächlich die **einzigste Lösung** auf I durch den Punkt (a, b) .

Definition (2.4)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = f(x)y + g(x)$$

eine **lineare DGL** erster Ordnung. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann spricht man von einer **homogenen**, ansonsten von einer **inhomogenen** Differenzialgleichung.

Proposition (2.5)

- (i) Für jedes Paar $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ existiert eine **eindeutig bestimmte Lösung** $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch (a, b) . Diese ist gegeben durch

$$\varphi(t) = be^{F(t)}$$

mit der Stammfunktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ von f .

- (ii) Sind φ_1, φ_2 Lösungen der homogenen linearen DGL, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda\varphi_1$ Lösungen dieser DGL.
- (iii) Sei ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL. Dann sind die Lösungen dieser DGL insgesamt die Funktionen der Form $\psi = \psi_0 + \varphi$, wobei φ die Lösungen der homogenen linearen DGL durchläuft.

Beweis von Prop. 2.5

geg. stetige Fkt. $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$

Betrachte die DGLs $y' = f(x)y$ und $y' = f(x)y + g(x)$

Sei $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$

zu 1) Definiere $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Beh. $\varphi(t) = b e^{F(t)}$ ist die und best. Lsg.
von $y' = f(x)y$ durch den Punkt (a, b) .

Es gilt $\varphi(a) = b e^{F(a)} = b e^0 = b$. Hauptsatz der

Differential- und Integralrechnung (HDI) $\Rightarrow F'(t) = f(t)$

$\forall t \in I \Rightarrow \varphi'(t) = b \cdot F'(t) \cdot e^{F(t)} = f(t) \cdot \varphi(t) \quad \forall t \in I$
Kettenregel

zur Eindeutigkeit: Zeige, dass die Fkt. $(x, y) \mapsto f(x)y$
 einer lokalen Lipschitz-Bed. genügt. Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$
 f stetig. $\Rightarrow \exists$ offenes Teilintervall $I' \subset I$ mit $x_0 \in I'$ und
 $|f(x)| \leq L \quad \forall x \in I'$ (Maximumprinzip) Für alle $y, z \in \mathbb{R}$
 gilt dann $|f(x)y - f(x)z| = |f(x)||y-z| \leq L|y-z|$, d.h.
 L ist Lipschitz-Konstante für die Ung. $I' \times \mathbb{R}$ von (x_0, y_0) .

Zu II) Seien $\varphi_1, \varphi_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von $y' = f(x)y$ und $\lambda \in \mathbb{R}$
 z.z. $\varphi_1 + \varphi_2, \lambda \varphi_1$ sind Lsg. Sei $t \in I$. Dann gilt
 $(\varphi_1 + \varphi_2)'(t) = \varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) = f(t)\varphi_1(t) + f(t)\varphi_2(t)$
 $= f(t)(\varphi_1 + \varphi_2)(t) \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$ ist Lsg.
 $(\lambda \varphi_1)'(t) = \lambda \varphi_1'(t) = \lambda f(t)\varphi_1(t) = f(t)(\lambda \varphi_1)(t)$.
 $\Rightarrow \lambda \varphi_1$ ist Lösung.

zu iii) Sei γ_0 eine spezielle Lsg. der DGL
 $y' \stackrel{(*)}{=} f(x)y + g(x)$ und $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine
diff'bare Fkt. Beh.:

γ ist Lsg von $(*) \iff \exists$ eine Lsg φ von
 $y' = f(x)y$ mit $\gamma = \gamma_0 + \varphi$

" \Leftarrow " Sei $t \in I$, z.zg. $\gamma'(t) = f(t)\gamma(t) + g(t)$

$$\gamma_0 \text{ löst } (*) \Rightarrow \gamma_0'(t) = f(t)\gamma_0(t) + g(t)$$

$$\varphi \text{ löst } y' = f(x)y \Rightarrow \varphi'(t) = f(t)\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = (\gamma_0 + \varphi)'(t) = \gamma_0'(t) + \varphi'(t) =$$

$$f(t)\gamma_0(t) + g(t) + f(t)\varphi(t) =$$

$$f(t)(\gamma_0(t) + \varphi(t)) + g(t) = f(t)\gamma(t) + g(t)$$

$\Rightarrow \varphi$ löst (*)

" \Rightarrow " Setze $\varphi = \varphi - \varphi_0$ Einsetzen wie unten

" \Leftarrow " zeigt, dass φ eine Lsg von $y' = f(x)y$ ist,
und es gilt $\varphi = \varphi_0 + \varphi$. \square

Satz (2.6)

Sei $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ vorgegeben und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch $(a, 1)$. Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) = b + \int_a^t \frac{g(s)}{\varphi(s)} ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann ist $\psi = u\varphi$ die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen linearen DGL $y' = f(x)y + g(x)$ durch den Punkt (a, b) .

SL Beweis von Prop. 2.6.

geg. $y' = f(x)y$ (*)

$$y' = f(x)y + g(x) (**)$$

wobei $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ Lsg. von (*) durch $(a, 1)$, wobei $a \in \mathbb{R}$

Sei außerdem $b \in \mathbb{R}$ und $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine bel.

diff'bare Fkt. Sei außerdem $\psi = u\varphi$.

Dann gilt die Äquivalenz

ψ ist Lsg. von (**) $\Leftrightarrow \forall t \in I$:

$$\psi'(t) = f(t)\psi(t) + g(t) \Leftrightarrow$$

$$(u\varphi)'(t) = f(t)u(t)\varphi(t) + g(t) \quad \forall t \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'(t) \varphi(t) + u(t) \varphi'(t) = f(t) u(t) \varphi(t) + g(t) \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow u'(t) \varphi(t) + u(t) \cancel{f(t) \varphi(t)} = \cancel{f(t) u(t) \varphi(t)} + g(t)$$

$$\forall t \in I \Leftrightarrow u'(t) \varphi(t) = g(t) \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow u'(t) = \frac{g(t)}{\varphi(t)} \quad \forall t \in I, \text{ d.h. } u \text{ ist Stammfkt}$$

von $t \mapsto \frac{g(t)}{\varphi(t)}$ Außerdem gilt die Äquivalenz

$$\varphi(a) = \beta \Leftrightarrow u(a) \varphi(a) = \beta \stackrel{\varphi(a)=1}{\Leftrightarrow} u(a) = \beta$$

Dies ist g.d. der Fall, wenn die Stammfkt.

durch $u(x) = \beta + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)} dt$ geg. ist.

Genau wie unter Prop. 2.5 sieht man, dass (\Rightarrow^*) einer lok. Lipschitz-Bed. genügt und die Lsg. somit eindeutig ist. \square

Anwendungsbeispiel: $y' = 2xy + x^3$

Sei $b \in \mathbb{R}$. Wir suchen die euid. best. Lsg. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

durch $(0, b)$. Lösung von $y' = 2xy$ durch $(0, 1)$:

$$\text{Setze } f(x) = 2x \rightarrow F(x) = \int_0^x 2t \, dt = t^2$$

$$\rightarrow \text{hom. Lsg. } \varphi(t) = e^{t^2}$$

$$u(x) = b + \int_0^x \frac{t^3}{e^{t^2}} \, dt = b + \int_0^x t^3 e^{-t^2} \, dt = b + \frac{1}{2} \int_0^x (2t) t^2 e^{-t^2} \, dt$$

$$= b + \frac{1}{2} \int_0^x t e^{-t} \, dt \quad \text{part. Integr.} \quad b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1) e^{-x^2}$$

$$\varphi(x) = u(x) \varphi(x) = (b + \frac{1}{2}) e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$