

Definition (1.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennt man eine Gleichung der Form

$$y' = f(x, y)$$

eine (gewöhnliche) **explizite Differenzialgleichung (DGL)** erster Ordnung. Eine **Lösung** einer solchen DGL ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t)) \in D \quad \text{und} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Definition (1.2)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann wird eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y') = 0$$

eine **implizite DGL** erster Ordnung genannt. Eine **Lösung** ist in diesem Fall eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D \quad \text{und} \quad F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt.

Definition (1.3)

Man bezeichnet eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL $y' = f(x, y)$ als **maximal**, wenn keine Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.

Definition (1.4)

Sei $y' = f(x, y)$ eine explizite DGL erster Ordnung wie oben. Dann nennt man die Funktion $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + f(x, y)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

das **normierte Richtungsvektorfeld** der DGL. Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL, dann bezeichnet man den **Graphen** von φ gegeben durch $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (t, \varphi(t))$ auch als **Lösungskurve** der DGL.

- **Sprechweise:** Eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ **durchläuft** einen Punkt (x, y) des Definitionsbereichs D der DGL, wenn ein $t \in I$ mit $\gamma(t) = (t, \varphi(t)) = (x, y)$ existiert.
- Die Definitionen sind so gewählt, dass für jedes $t \in I$ der Vektor $(\vec{f} \circ \gamma)(t)$ jeweils der **normierte Tangentialvektor** an die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$ ist.

Definition (1.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (i) Man sagt, die Funktion f genügt einer **Lipschitz-Bedingung**, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq L|y - y'|$$

für alle $x, y, y' \in \mathbb{R}$ mit $(x, y), (x, y') \in D$ erfüllt ist. Die Zahl L wird in diesem Zusammenhang eine **Lipschitz-Konstante** der Funktion f genannt.

- (ii) Die Funktion f genügt einer **lokalen** Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine Umgebung U existiert, so dass $f|_{D \cap U}$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Satz (1.6)

Sei $y' = f(x, y)$ eine explizite DGL erster Ordnung, gegeben durch eine Funktion f auf einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) *(Existenzsatz von Peano)*

Ist f **stetig**, dann existiert für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine maximale, durch (x, y) verlaufende Lösung der DGL.

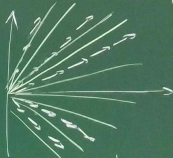
(ii) *(Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf)*

Genügt f darüber hinaus einer **lokalen Lipschitz-Bedingung**, dann existiert für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine **eindeutig bestimmte** maximale Lösung durch (x, y) .

Beispiele für explizite DGL und ihre Lösungskurven

$$(1) D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad y' = \frac{y}{x}$$

normiertes Richtungsvektorfeld



$$f(x, y) = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y) &= \frac{1}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix} \|} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beh. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_c: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto ct$
eine maximale Lösung der DGL, denn:

maximales Richtungsfeld \vec{f}

$$f(x, y) = \frac{1}{t} \Rightarrow$$



$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi_c'(t) = c, \text{ ebenso } \frac{\varphi_c(t)}{t} = \frac{ct}{t} = c$$

Da t nur Werte in \mathbb{R}^+ annehmen darf, ist φ_c eine maximale Lösung.

$$(2) D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, y' = -\frac{x}{y}$$

normiertes Richtungsfeld



$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ In diesem Fall sind die maximalen Lösungen geg. durch $\varphi_c:]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[\rightarrow \mathbb{R}^+, t \mapsto \sqrt{c-t^2}, c \in \mathbb{R}^+$

Lösungseigenschaft: Sei $c \in \mathbb{R}^+, t \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$

$$\varphi_c'(t) = (-2t) \cdot \frac{1}{2} (c-t^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2t \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{c-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{c-t^2}}$$

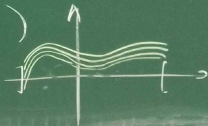
$$\text{ebenso } -\frac{t}{\varphi_c(t)} = -\frac{t}{\sqrt{c-t^2}}$$

(3) $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $y' = f(x)$
wobei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion

normiertes Richtungsvektorfeld

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+f(x)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Die maximalen Lösungen der DGL sind geg.
durch $\varphi_c(t) = F(t) + c$, $c \in \mathbb{R}$, wobei
 F eine bel. Stammfunktion von f bezeich-
net. ($\varphi_c: I \rightarrow \mathbb{R}$)



Definition (1.7)

Eine **Linearform** auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass diese linearen Abbildungen selbst einen \mathbb{R} -Vektorraum bilden, den wir als den **Dualraum** V^* von V bezeichnen.

Beispiel: $e_1^*, e_2^* \in (\mathbb{R}^2)^*$ gegeben durch $e_1^*(v) = v_1$, $e_2^*(v) = v_2$ für $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

Definition (1.8)

Eine **1-Form** auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$.

Beispiel: die konstanten Abbildungen $dx, dy : D \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ gegeben durch $dx(x, y) = e_1^*$, $dy(x, y) = e_2^*$

Definition (1.9)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und seien ω und η zwei auf D definierte 1-Formen. Dann bezeichnen wir die Gleichung

$$\omega(x, y) = \eta(x, y)$$

als eine DGL **in symmetrischer Form**. Eine differenzierbare Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ wird eine **Lösung** der DGL genannt, wenn $\gamma(t) \in D$ und

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \eta(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Definition (1.10)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und seien ω und η zwei auf D definierte 1-Formen. Wir bezeichnen eine Abbildung $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ als **normiertes Richtungsvektorfeld** der DGL $\omega(x, y) = \eta(x, y)$, wenn für alle $(x, y) \in D$ jeweils

$$\|\vec{f}(x, y)\| = 1 \quad \text{und} \quad \omega(x, y)(\vec{f}(x, y)) = \eta(x, y)(\vec{f}(x, y))$$

erfüllt ist.

Anmerkung:

Bezeichnet \vec{f} das normierte Richtungsvektorfeld der **expliziten** DGL $y' = f(x, y)$, dann ist \vec{f} zugleich das normierte Richtungsvektorfeld der DGL $dy = f(x, y) dx$ in symmetrischer Form.

Bem. Sei $y' = f(x, y)$ eine explizite DGL mit Definitionsbereich D und $dy = f(x, y) dx$ die zugeh. DGL in symm. Form. Ist $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$, dann ist $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ eine Lösung von $(**)$.

Sei $t \in I, \omega = dy, \eta = f(x, y) dx$.

z.zg. $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \eta(\gamma(t))(\gamma'(t))$

linke Seite: $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \omega(t, \varphi(t)) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \right)$
 $= e_2^* \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \right) = \varphi'(t)$

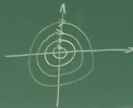
rechte Seite: $\eta(\gamma(t))(\gamma'(t)) = f(t, \varphi(t)) e_1^* \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \right)$
 $= f(t, \varphi(t)) \cdot 1 = f(t, \varphi(t))$ □

Bem.: Verwendet man DGLs in symmetrischer Form, dann kann der Def.-bereich gegenüber den expliziten DGL ausgedehnt werden.

Bsp.: An Stelle der expliziten DGL $y' = -\frac{x}{y}$ auf dem Def.-bereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ betrachten wir die DGL $y \, dy = -x \, dx$ auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Die Lösungen sind nun geg. durch $\gamma_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $t \mapsto (c \cos(t), c \sin(t))$ mit $c \in \mathbb{R}^+$

denn. Sei $c \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega = y \, dy$.



Stamm: Sei $c \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega = \frac{1}{c} dx$

$$\eta = -x dx \quad \text{z.z.} \quad \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \eta(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

linke Seite: $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \omega(c \cos(t), c \sin(t)) \left(\begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix} \right)$
 $= c \sin(t) e_2^* \begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix} = c^2 \sin(t) \cos(t)$

rechte Seite: $\eta(\gamma(t))(\gamma'(t)) = -c \cos(t) \cdot e_1^* \begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix}$
 $= c^2 \sin(t) \cdot \cos(t)$

Definition (2.1)

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = f(x)g(y)$$

eine Differenzialgleichung mit **getrennten Variablen**.

Satz (2.2)

Seien f, g wie oben definiert und außerdem $(a, b) \in I \times J$ mit $g(b) \neq 0$. Sei $J' \subseteq J$ ein Intervall mit $b \in J'$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J'$, und seien $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J' \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad G(y) = \int_b^y g(t)^{-1} dt.$$

Dann besitzt G eine Umkehrfunktion $H : G(J') \rightarrow J'$, und es existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J')$. Darüber hinaus ist die Funktion $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi = H \circ F$ die einzige durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL.

Beweis von Satz 2.2.

geg. DGL $y' = f(x)g(y)$ mit getrennten
Variablen, wobei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$
wobei $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle

$a \in I$, $b \in J$ mit $g(b) \neq 0$, f, g stetig

Es gibt ein offenes Intervall $J' \subseteq J$ mit
 $b \in J'$ und $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in J'$ auf Grund
der Stetigkeit von g . Zwischenwertsatz

$\rightarrow g(x) > 0 \quad \forall x \in J'$ falls $g(b) > 0$

$g(x) < 0 \quad \forall x \in J'$ falls $g(b) < 0$

Die Funktion $G(y) = \int_b^y \frac{dt}{g(t)}$ ist somit

entweder streng monoton wachsend oder streng
monoton fallend ^(auf J'), außerdem stetig (sogar stetig
diff'bar) ^{offenes}

$\Rightarrow G(J') \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall

und G ist als Fkt. $J' \rightarrow G(J')$ bijektiv,
mit stetiger Umkehrfkt. $H: G(J') \rightarrow J'$

Auch $F: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ ist stetig
diff'bar. $F(a) = 0 = G(b) \in G(J')$

Stetigkeit von $F \Rightarrow$ Es gibt ein offenes

Intervall $I' \subseteq I$ mit $F(I') \subseteq G(J')$

$\rightarrow \varphi = H \circ F$ ist auf I' definiert

zu überprüfen: φ ist eine Lsg. von $y' = f(x)g(y)$

$$\varphi = H \circ F \Rightarrow G \circ \varphi = F$$

G Umkehrfd.
von H

$$\Rightarrow (G \circ \varphi)'(t) = F'(t) \quad \forall t \in I'$$

Kettenregel
 \Rightarrow

$$G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = F'(t) \quad \forall t \in I'$$

$$\Rightarrow g(\varphi(t))^{-1} \cdot \varphi'(t) = f(t) \quad \forall t \in I'$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t)) \quad \forall t \in I'$$

$\Rightarrow \varphi$ ist Lösung der DGL

Eindeutigkeit: siehe Skript

□

Beispiel: $y' = y^2$

Bestimme eine Lsg. dieser DGL durch $(0, c)$,
für bel. $c \in \mathbb{R}^+$

hier: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y^2$

$$F(x) = \int_0^x 1 \cdot dt = x$$

$$G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_c^y = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+$$

Bestimme wir G die Umkehrfunktion.

$$x = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \iff x + \frac{1}{y} = \frac{1}{c} \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{c} - x$$

$$\iff y = \frac{1}{\frac{1}{c} - x} = \frac{c}{1 - cx} \quad \text{Also ist } H(x) = \frac{c}{1 - cx}$$

eine Umkehrfunktion von G .

$\Rightarrow \varphi(t) = (H \circ F)(t) = \frac{c}{1-ct}$ ist eine Lösung
der DGL, mit $\mathbb{J} =]-\infty, \frac{1}{c}[$ als Definitionsbereich.

Probe: z.zg $\varphi'(t) = \varphi(t)^2$

$$\text{linke Seite: } \varphi'(t) = c \cdot (-c) \left(-\frac{1}{(1-ct)^2}\right) = \frac{c^2}{(1-ct)^2}$$

$$\text{rechte Seite: } \varphi(t)^2 = \frac{c^2}{(1-ct)^2}$$