Moodle: izs9196AEWT

---

gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) =
Gleichung, die eine Funktion in einer Variablen
in Beziehung zu ihrer Ableitung setzt

Bsp. $y' = y$ Lösung: $\varphi(x) = e^x$

Allgemeiner kann man Systeme gew. DGL
definieren. Bsp: $y' = z$, $z' = -y$

Lösung: $\varphi(x) = (\sin(x), \cos(x))$

partielle DGL = Gleichung, die die eine Fkt. in mehreren Variablen zu ihren (höheren) partiellen Ableitungen in Beziehung setzt

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x$ Lsg.: $u(x,y) = xy$

<u>Differentialgleichungen</u> <u>in der</u> <u>Theoretischen</u> <u>Physik</u>

(1) Klassische Mechanik

(1.1) freier Fall $y(t)$ = Höhe eines Massepunkts m zum Zeitpunkt t

Gleichung des freien Falls: $y'' = -g$, g = Erdbeschleunigung $\approx 9{,}81\ m/s^2$

allgemeine Lösung

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$y_0 = y(0)$ Höhe bei $t = 0$

v_0 = Geschwindigkeit in y-Richtung (Höhe) bei $t = 0$

(1.2) Wurfbewegung (in x- und y-Richtung)

Flugbahn $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

DGL für die Wurfbewegung

$y_1'' = 0, \quad y_2'' = -g$

allgemeine Lg $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$

wobei (x_0, y_0) = Position bei $t = 0$

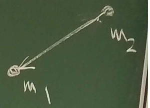
$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ geschwindigkeit bei $t = 0$

(1.3) Bewegung zweier Massepunkte, die sich durch eine Kraft gegenseitig beeinflussen

Flugbahnen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der beiden Massen

$F(r) = F_{12}(r)$ = Kraft, die m_2 auf

m ausübt, wenn $r \in \mathbb{R}^3$ der Vektor von m_2 nach m_1 ist ($F_{21}(r) = -F_{12}(r)$ Kraft von m_1 auf m_2)



Bahnen erfüllen das System gew. DGL

$$m_1 \varphi_1''(t) = F(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$
$$m_2 \varphi_2''(t) = -F(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

Bsp Gravitationskraft $F(r) = -G \frac{m_1 m_2}{\|r\|^3} r$

↑ G = Gravitationskonstante

(System besteht aus 6 Gleichungen in 6 Funktionen)

(2) Elektrodynamik

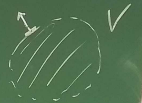
Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} j$ (*)

$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Ladungsdichte

$j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Strömungsdichte

$\operatorname{div} j = \langle \nabla, j \rangle$

Gradient



Stokesches Integralsatz angewendet auf (*)

liefert $Q_V'(t) = -\int_{\partial V} \langle j, dA \rangle$

in V eingeschlossene Ladung zum Zeitpunkt t

$Q_V(t) = \int_V \rho(t)\, dV$

$gt^2)$

0

$t = 0$

...ahte,

...ft ge-

...n

$\to \mathbb{R}^3$

...e m_2 auf

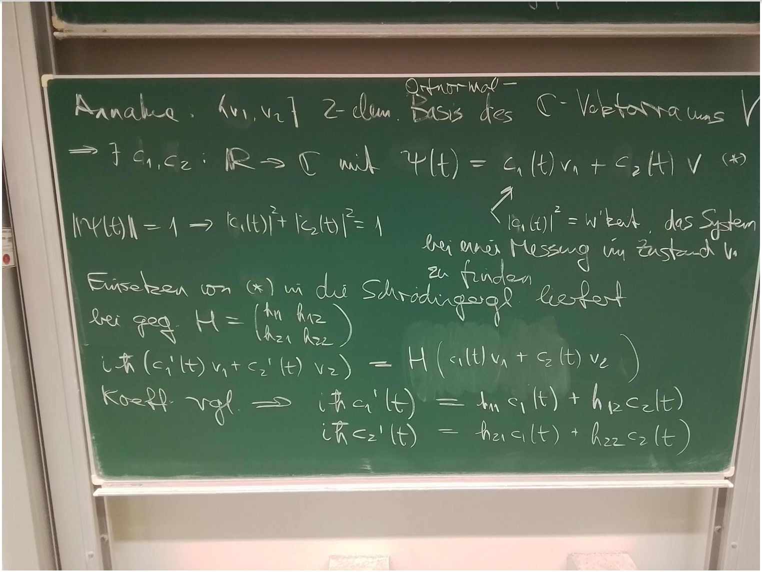
(3) Quantenmechanik

V = Hilbertraum = $\mathbb{C}$-Vektorraum mit pos. def. Sesquilinearform, vollst. bzgl. der entspr. Norm

Elemente von V = Zustände eines quantenmechanischen Systems (z.B. Elektron, das Atomkern umkreist)

Zustandsentwicklung $\Psi : \mathbb{R} \to V$

Schrödingergleichung $\underbrace{i\hbar}_{\text{reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \underbrace{H}_{\text{Hamilton-operator } V \to V} \Psi$



Hinweis:

Genau genommen stimmt der Hamilton-Operator H nicht mit der angegebenen Matrix überein. Statt dessen ist die 2×2-Matrix die Darstellungsmatrix von H bezüglich Orthonormalbasis (v_1, v_2).

Vorlesungsthemen

- elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche DGLs
- Existenz- und Eindeutigkeitssätze, Randverhalten von Lösungen
- Systeme von linearen DGLs (insbesondere solche mit konstanten und periodischen Koeffizienten)
- Stabilität von Lösungen, Abhängigkeit von Parametern
- Systeme von DGLs im Komplexen

Gewöhnliche explizite DGLs erster Ordnung

Definition (1.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennt man eine Gleichung der Form

$$y' = f(x, y)$$

eine (gewöhnliche) explizite Differenzialgleichung (DGL) erster Ordnung. Eine Lösung einer solchen DGL ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t)) \in D \quad \text{und} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Definition (1.2)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann wird eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y') \quad = \quad 0$$

eine implizite DGL erster Ordnung genannt. Eine Lösung ist in diesem Fall eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D \quad \text{und} \quad F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt.

Bem Sei $F(x,y,y') \overset{(*)}{=} 0$ eine implizite DGL, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $F: D \to \mathbb{R}$, (x_0,y_0,z_0) innerer Punkt von D. Bezeichne mit x, y, z die Variablen von F. Gilt $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, dann ist $(*)$ in einer Umgebung von (x_0,y_0,z_0) äquivalent zu einer expliziten DGL, denn:

Satz über implizite Fkt $\Rightarrow$ $\exists$ offene Intervalle I, J, K mit $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $z_0 \in K$ und eine Fkt. $f: I \times J \to K$, so dass für alle $(x,y,z) \in I \times J \times K$ gilt: $F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x,y)$

Eine Fkt. φ durch (x_0,y_0) ist genau dann eine Lsg. von $(*)$, wenn sie eine Lösung von $y' = f(x,y)$ $(**)$ ist (solange $(\varphi(x,y)) \in I \times J$ $\forall x,y$)

Maximalität von Lösungen

Definition (1.3)

Man bezeichnet eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der DGL $y' = f(x, y)$ als maximal, wenn keine Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}$ mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.