

Die Null-Lösung ist eine Lösung eines

bekannt: Es gibt ein System von

Lösungen $(p_0 e^{3t}, p_1 e^{3t}, p_2 e^{3t})$ mit

$p_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ von Grad $\leq k$ ($k \in \{0, 1, 2\}$)

Ansatz $p_0(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $p_1(t) = \begin{pmatrix} d+et \\ f+gt \\ h+jt \end{pmatrix}$

$p_2(t) = \begin{pmatrix} k+lt+mt^2 \\ p+qt+rt^2 \\ s+ut+vt^2 \end{pmatrix}$

Vorgehensweise bei der Bestimmung einer Lösung von $y' = Ay + g(x)$ (wobei $A \in M_{n, \mathbb{R}}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) durch einen vorgeg. Punkt (a, b) (mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$)

- Bestimmung des Fundamentalsystems $\Phi(t) = e^{tA}$
- Berechnung von $u(t) = \int_a^t \Phi(s)^{-1} g(s) ds$
- Berechnung von $\varphi_0(t) = \Phi(t) u(t)$
(Lösung von $y' = Ay + g(x)$ mit $\varphi_0(a) = 0$)

$\begin{pmatrix} 1+2i \\ -1 \end{pmatrix}$

• Berechnung von $\varphi(t) = \varphi_0(t) + e^{(t-a)A} b$

Beispiel für eine Umrechnung eines komplexen in ein reelles Fund.-system:

$$\bar{\Phi}(t) = (\varphi_1, \varphi_2) \text{ mit}$$

$$\varphi_1(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1+2i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = e^t (\cos(2t) + i \sin(2t)) \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) - 2\cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$p_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} - i e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) - 2\cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ reelles Fundamentalsystem $\mathcal{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))$

$$p_1(t) = \frac{1}{2} p_1(t) + \frac{1}{2} p_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$p_2(t) = \frac{1}{2} (p_1(t) - p_2(t)) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) - 2\cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$$

Aufg. 1 (b) (Globalib. Blatt 1)

$$\int_0^t \sin(2s) e^{-\sin(s)} ds$$

$$= 2 \int_0^t \sin(s) \cos(s) e^{-\sin(s)} ds$$

$$= 2 \int_{\sin(0)}^{\sin(t)} s e^{-s} ds = 2 \left[-s e^{-s} \right]_{\sin(0)}^{\sin(t)}$$

$$+ \int_{\sin(0)}^{\sin(t)} e^{-s} ds = 2 \left[-(s+1) e^{-s} \right]_0^{\sin(t)}$$

$$= 2 \left(1 - (\sin(t) + 1) e^{-\sin(t)} \right)$$

Aufgabe 1 vom Globalübungsblatt 12

Berechnung von $\ker(A+E)$, $\ker((A+E)^2)$

$$A+E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = x_3, x_2 = x_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = x_3$$

$$S = \{1, 2, 3\} \setminus \{1\} = \{2, 3\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 = x_3 \right\} = \{1, 3\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

Trajektorien zu den Lösungen

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

