Offene und abgeschl. Teilmengen eines metrischen Raums

Definition (3.1)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird offen genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt.

(ii) Man bezeichnet eine Teilmenge $A \subseteq X$ als abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus A$ von A in X offen ist.

Definition der topologischen Räume

Definition (3.3)

Sei X eine Menge und $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Man bezeichnet $\mathscr{T}$ als Topologie auf X, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\varnothing \in \mathscr{T}$ und $X \in \mathscr{T}$.

(ii) Für alle $U, V \in \mathscr{T}$ gilt $U \cap V \in \mathscr{T}$.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X, wobei $U_i \in \mathscr{T}$ für jedes $i \in I$ gilt, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ ein Element von $\mathscr{T}$.

Ein Paar $(X, \mathscr{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Topologie $\mathscr{T}$ auf X bezeichnet man als topologischen Raum. Die Elemente von $\mathscr{T}$ werden als offene, die Mengen der Form $X \setminus U$ mit $U \in \mathscr{T}$ als abgechlossene Teilmengen des topologischen Raums bezeichnet.

Bem:

- Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $r \in \mathbb{N}$, und $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{T}$, dann gilt $U_1 \cap \ldots \cap U_r \in \mathcal{T}$. (Bew. durch vollst. Ind., wobei im Ind-schritt Punkt (ii) aus Def. 3.3 verwendet wird)
- Ist aber $(U_i)_{i \in I}$ eine unendliche Familie von Mengen aus $\mathcal{T}$, dann liegt $\bigcap_{i \in I} U_i$ im Allg. nicht in $\mathcal{T}$.

Bsp: Betrachte $I = \mathbb{N}$, $U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\subseteq \mathbb{R}$.
Sei $\mathcal{T}$ die Topologie auf $\mathbb{R}$ geg. durch die

Standardmetrik $d(a,b) = |a-b|$. Dann gilt $U_n \in \mathcal{J}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, aber: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$ („$\supseteq$" wg. $0 \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ für alle $n \in \mathbb{N}$. „$\subseteq$" Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. $\Rightarrow x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ang. $x \neq 0$ $\Rightarrow |x| > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < |x|$ $\Rightarrow x < -\frac{1}{n}$ oder $x > \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $x \notin]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ $\lightning$ zur Voraussetzung) Aber $\{0\}$ ist keine offene Teilmenge des top. Raums.

Bem. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
Dann erfüllen die abgeschlossenen Teilmengen von X folgende Regeln:

(i) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(ii) Sind A, B abgeschlossen, dann auch die Vereinigung $A \cup B$.

(iii) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen ($\bigcup_{i \in I} A_i$ aber im Allg. nicht)

zu (i) X ist offen $\Rightarrow \emptyset = X \setminus X$ ist abgeschl.
$\emptyset$ ist offen $\Rightarrow X = X \setminus \emptyset$ ist abgeschl.

zu (ii) A, B sind abgeschl. $\Rightarrow X \setminus A, X \setminus B$ sind offen. z.zg.: $A \cup B$ ist abgeschlossen, d.h. z.zg.: $X \setminus (A \cup B)$ ist offen.
$X \setminus A, X \setminus B$ offen $\Rightarrow (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ ist offen, und diese Menge stimmt mit $X \setminus (A \cup B)$ überein.

zu (iii) A_i ist abg. $\forall i \in I \Rightarrow X \setminus A_i$ ist offen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$ ist offen, und engen

nach

lossener

$\bigcap_{i\in I} A_i$

lg. nicht)

diese Menge stimmt mit $X\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ überein (*)

$\Rightarrow X\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ ist offen $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ ist abgeschl.

(*) zeige: $\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i) = X\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$

Sei $x\in X$. Dann gilt die Äquivalenz

$$x\in \bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i) \Leftrightarrow \exists i\in I: x\in X\setminus A_i$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(\forall i\in I: x\in A_i\right) \Leftrightarrow \neg\left(x\in \bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in X\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

Um zu zeigen, dass bel. Vereinigungen abg. Teilmengen im Allg. nicht abgeschlossen sind, betrachte den top. Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ von oben und die Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geg. durch $A_n = [0, 1-\frac{1}{n}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 1[$, und $[0, 1[$ ist nicht abgeschlossen.

Satz (3.4)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathscr{T}$ die Menge der in (X, d) offenen Teilmengen. Dann ist $\mathscr{T}$ eine Topologie auf X.

Der Umgebungsbegriff

Definition (3.5)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird Umgebung von x genannt, wenn eine offene Teilmenge V von X mit $x \in V$ und $V \subseteq U$ existiert.

Hausdorffsche topologische Räume

Definition (3.6)

Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{T})$ wird hausdorffsch genannt, wenn für zwei beliebige verschiedene Punkte $x, y \in X$ jeweils Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \varnothing$ existieren.

Konvergenz in topologischen Räumen

Definition (3.7)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir sagen, die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Punkt a und bezeichnen a als Grenzwert der Folge, wenn für jede Umgebung U von x in $(X, \mathscr{T})$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x^{(n)} \in U$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

Proposition (3.8)

Ist $(X, \mathscr{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum, dann besitzt jede Folge in X höchstens einen Grenzwert.

Abgeschlossener Mengen und Grenzwerte

Satz (3.9)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

(i) Ist A abgeschlossen und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A, die in X einen Grenzwert x besitzt, dann gilt $x \in A$.

(ii) Ist die Topologie $\mathscr{T}$ durch eine Metrik d definiert, dann gilt auch die Umkehrung: Liegt der Grenzwert jeder in A enthaltenen, in X konvergenten Folge in A, dann ist A eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Beweis von Satz 3.9

zu (ii) Ang., die Voraussetzung über die Folgen gilt, aber A ist keine abgeschlossene Teilmenge von X.

A nicht abgeschlossen $\Rightarrow$ $X \setminus A$ ist nicht offen

$\Rightarrow$ Es gibt ein $x \in X \setminus A$, für das kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$ existiert. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist somit die Schnittmenge $B_\varepsilon(x) \cap A$ nicht leer. Insb. gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x^{(n)} \in B_{1/n}(x) \cap A$.

Dann ist $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A, und es gilt

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$

Ist nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, dann gilt also $d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

$\llcorner x^{(n)} \in B_{1/n}(a)$

Aber der Grenzwert der Folge liegt in $X \setminus A$, also nicht in A.

$\rightarrow$ Die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ widerspricht der Annahme. $\square$

Inneres, Abschluss und Rand

Definition (3.10)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Man nennt x einen inneren Punkt von A, wenn x eine Umgebung U mit $U \subseteq A$ besitzt. Die Menge der inneren Punkte von A wird mit A° bezeichnet und das Innere von A genannt.

(ii) Ein Punkt $x \in X$ liegt im Abschluss $\bar{A}$ von A, wenn für jede Umgebung U von x der Durchschnitt $A \cap U$ nicht leer ist.

(iii) Die Menge $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ wird der Rand von A genannt.

Proposition (3.11)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Die Menge A° ist die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist. Ist also $U \subseteq A$ offen in X, dann gilt $U \subseteq A^\circ$.

(ii) Die Menge $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält. Ist also $Z \subseteq X$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge mit $Z \supseteq A$, dann folgt $\bar{A} \subseteq Z$.

(iii) Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zum Rand ∂A, wenn jede Umgebung U von x jeweils mindestens einen Punkt von A und einen Punkt des Komplements $X \setminus A$ enthält.

Definition der Stetigkeit auf topologischen Räumen

Definition (3.12)

Seien $(X, \mathscr{T})$ und $(Y, \mathscr{U})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, und sei $a \in X$.

- Wir bezeichnen f als stetig im Punkt a, wenn für jede Umgebung V von $f(a)$ in $(Y, \mathscr{U})$ eine Umgebung U von a in $(X, \mathscr{T})$ mit $f(U) \subseteq V$ existiert.
- Die Funktion f wird ingesamt als stetig bezeichnet, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Bem: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume,
$f: X \to Y$ eine Abbildung und $a \in X$.
Seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{U}$ die durch d_X bzw. d_Y geg. Topologien.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig in a als Abb. zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y).

(ii) f ist stetig in a als Abb. zwischen den topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{U})$.

Erinnerung: ε-δ-Kriterium
f ist stetig in a (als Abb. zwischen den metrischen

gwischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{U})$.

Erinnerung: ε-δ-Kriterium

f ist stetig in a (als Abb. zwischen den metrischen Räumen) genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in X: d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" geg: eine Umgebung V von $f(a)$ in $(Y, \mathcal{U})$

z.zg: Es gibt eine Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq V$

V Umgebung von $f(a)$ $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$

f ist stetig als Abb. zwischen metr. Räumen $\overset{\varepsilon\text{-}\delta\text{-Kriterium}}{\Longrightarrow}$ $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$,

so dass $\forall x \in X: d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ $(*)$

Setze $U = B_\delta(a)$. **Beh:** $f(U) \subseteq V$. Sei $x \in U$, z.zg: $f(x) \in V$.

$x \in U \Rightarrow d(a,x) < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

$\overset{\subseteq \text{ s.o.}}{\Longrightarrow} f(x) \in V$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Vor: f ist stetig in a als

Abb. zwischen den top. Räumen $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$

Überprüfe, dass für a das ε-δ-Krit. erfüllt

ist. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. z.zg.:

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$

Sei $V = B_\varepsilon(f(a))$, dies ist eine Umg. von $f(a)$

Vor. $\Rightarrow$ Es gibt eine Umgebung U von a

mit $f(U) \subseteq V$. U Umg. von a $\Rightarrow$

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\delta(a) \subseteq U$.

(i)

(ii)

(iii)

Beh: Dieses δ erfüllt $(*)$.

Sei $x \in X$ mit $d_X(a,x) < \delta$ z.z.g. $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$

$d_X(a,x) < \delta \Rightarrow x \in B_\delta(a) \Rightarrow x \in U \overset{f(U) \subseteq V}{\Longrightarrow}$

$f(x) \in V \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ $\square$

Charakterisierung der stetigen Funktionen

Proposition (3.13)

Seien $(X, \mathscr{T})$ und $(Y, \mathscr{U})$ topologische Räume. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Abbildung f ist stetig.

(ii) Für jede offene Teilmenge V in $(Y, \mathscr{U})$ ist $f^{-1}(V)$ offen.

(iii) Für jede abgeschlossene Teilmenge A in $(Y, \mathscr{U})$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

$\mathcal{U})$
fällt
$). f(x) < \varepsilon$
$f(a)$
a
$\Rightarrow$

Beweis von Proposition 3.13:

geg: topologische Räume $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{U})$

$f : X \to Y$ Abbildung   z. zg:

Äquivalenz der Aussagen

(i) f ist eine stetige Abbildung

(ii) Jede Urbildmenge einer offenen Teilmenge von Y ist eine offene Teilmenge von X (Urbild bzgl. f)

(iii) Jedes Urbildmenge einer abgeschlossenen Teilmenge von Y ist eine abgeschl. Teilmenge von X.

ε

ε $\square$

„(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)" Beob.: Für jede Teilmenge $V \subseteq Y$

gilt $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ (*)

denn: Für jedes $x \in X$ gilt die Äquivalenz

$x \in f^{-1}(Y \setminus V) \Longleftrightarrow f(x) \in Y \setminus V \Longleftrightarrow$

$f(x) \in Y$ und $f(x) \notin V \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(V)$

$\Longleftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(V)$

Zeige nun „(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $A \subseteq Y$ abgeschl.

z.zg.: $f^{-1}(A) \subseteq X$ abg. $A \subseteq Y$ abg. $\Rightarrow Y \setminus A$ ist offen $\xRightarrow{\text{Vor (ii)}} f^{-1}(Y \setminus A)$ ist offen $\Rightarrow X \setminus f^{-1}(A)$ ist offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ ist abg. „(iii) $\Rightarrow$ (ii)" analog

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $V \subseteq Y$ offen z.zg.: $f^{-1}(V)$ ist offen in X

Vor. (f stetig) $\Rightarrow$ f ist stetig in jedem Punkt $a \in X$

$\Rightarrow$ Für jedes $a \in X$ und jede Umg. $\tilde{V}$ von $f(a)$ gibt es eine Umg. $\tilde{U}$ von a mit $f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$.

Sei nun $a \in f^{-1}(V)$ $\Rightarrow$ $f(a) \in V$. V offen $\Rightarrow$ V ist Umgebung von $f(a)$ $\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Umg. $\tilde{U}_a$ von a mit $f(\tilde{U}_a) \subseteq V$. Def. des Umgebungsbegriffs $\Rightarrow$ $\exists$ offene Teilmenge U_a mit $a \in U_a$ und $U_a \subseteq \tilde{U}_a$. <u>Beh.</u>: $f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} U_a$

U_a mit $a \in \tilde{U}_a$ und $\tilde{U}_a \subseteq U_a$. Beh.: $f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} \tilde{U}_a$

(Ist das gezeigt, sind wir fertig, denn jedes $\tilde{U}_a$ ist offen, somit auch die Vereinigung.) „$\subseteq$" $a \in f^{-1}(V) \Rightarrow a \in \tilde{U}_a$ (s.o.) Also liegt a auch in der Vereinigung.

„$\supseteq$" Sei $x \in \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} \tilde{U}_a \Rightarrow \exists a \in f^{-1}(V)$ mit $x \in \tilde{U}_a \Rightarrow x \in \hat{U}_a$

$\overset{f(\tilde{U}_a) \subseteq V}{\Longrightarrow} f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$